T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AMENABLE YARI GRUPLARDA FOLNER DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

BURAK ÇAKAL

DANIŞMAN

DOÇ. DR. ÖMER KİŞİ

BARTIN-2021

T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMENABLE YARI GRUPLARDA FOLNER DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burak ÇAKAL

BARTIN-2021

KABUL VE ONAY

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Ömer KİŞİ danışmanlığında hazırlamış olduğum "AMENABLE YARI GRUPLARDA FOLNER DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

28.05.2021

Burak ÇAKAL

ÖNSÖZ

Beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul eden, tez çalışmamın her aşamasında bilgilerini, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ömer Kişi' ye (Bartın Üniversitesi), engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, ufkumu genişleten değerli tez izleme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Erhan GÜLER' e (Bartın Üniversitesi), jüri üyesi Sayın Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ' e (Necmettin Erbakan Üniversitesi), bu bölümde okumam için beni yönlendiren, tüm fedakârlığıyla beni destekleyen aileme en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Burak ÇAKAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AMENABLE YARI GRUPLARDA FOLNER DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Burak ÇAKAL

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2021, sayfa: 35

Tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, Folner dizilerinin *I*-yakınsaklık kavramı tanımlandı. Dördüncü bölümde, Folner dizilerinin *I*-asimptotik λ-istatistiksel denkliği kavramı verildi. Beşinci bölümde, Folner dizilerinin *I*-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği kavramı verildi. Altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Folner dizisi; amenable yarı grup; ideal yakınsaklık, lacunary dizi.

Bilim Alanı Kodu: 502.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

IDEAL CONVERGENCE OF FOLNER SEQUENCES ON AMENABLE SEMIGROUPS

Burak ÇAKAL

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Dr. Ömer KİŞİ
Bartın-2021, pp: 35

This thesis includes six chapters. A general knowledge of literature is given in the first chapter. In the second chapter, basic notions are mentioned. In the third chapter, *I*-convergence of Folner sequences is defined. In the fourth chapter, the concept of *I* asymptotically λ-statistical equivalence of Folner sequences is given. In the fifth chapter, the idea of *I* asymptotically lacunary statistical equivalence of Folner sequences is given. In the last chapter, some results and suggestions are given.

Keywords: Folner sequence; amenable yarı grup; ideal convergence, lacunary sequence.

Scientific Field Code: 502.03.01

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(S_n)	: Folner dizisi
χ_P	: P kümesinin karakteristik fonksiyonu
G	: Diskret (ayrık) sayılabilir amenable yarı grup
$S(G)$	: İstatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi
$f \rightarrow^{I(G)} s$	: $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye I-yakınsaktır
$I(G)$	: İdeal yakınsak Folner dizilerinin kümesi
$f \rightarrow^{S_\lambda(G)} s$	: $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye λ-istatistiksel yakınsaktır
$S_\lambda(G)$	: λ-istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi
$f \sim h$	: $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonları asimptotik denktir
$f \sim^{\omega} h$	: $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonları kuvvetli asimptotik denktir
$f \sim^{I(G)} h$	: $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonları asimptotik I-denktir
$f \rightarrow^{(V,\lambda)(G)} s$	: $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye kuvvetli (V, λ) toplanabilirdir
$(V, \lambda)(G)$	: Kuvvetli (V, λ) toplanabilir Folner dizilerinin kümesi
$f \rightarrow^{S_I(G)} s$	: $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye I-istatistiksel yakınsaktır
$S_I(G)$	: I-istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi
$f \sim^{S_I(G)} h$	: $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonları I- asimptotik istatistiksel denktir
$f \xrightarrow{[C]_I} s$	: $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye kuvvetli I-toplanabilirdir
$f \rightarrow^{S_\theta(G)} s$	: $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye lacunary istatistiksel yakınsaktır
$S_\theta(G)$	: Lacunary istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi
$f \sim^{S_I^\theta(G)} h$	: $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonları I-asimptotik lacunary istatistiksel denktir

1. GİRİŞ

“İstatistiksel yakınsaklık” kavramı ilk defa Steinhaus tarafından Polonya’da Wroclaw Üniversitesinde düzenlenen bir konferansta tanıtılmıştır (Steinhaus,1949). Daha sonra Fast tarafından çalışılmıştır (Fast, 1951). Toplanabilme teorisi üzerine yapılan çalışmalar istatistiksel yakınsaklığa farklı bir bakış açısı kazandırmıştır (Šalát, 1980; Freedman ve Sember 1981; Fridy, 1985). Zygmund, istatistiksel yakınsaklık kavramını “hemen hemen yakınsaklık” olarak ifade etmiş, bu kavram ile kuvvetli toplanabilirlilik arasındaki ilişkiyi derinlemesine vermiştir (Zygmund, 1979). Freedman vd. lacunary dizi yardımıyla tanımlanan kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayları ile kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzayları arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir (Freedman vd., 1978). Connor çalışmasında istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilirlilik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlilik ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlilik arasındaki ilişkiden bahsetmiştir (Connor, 1988).

İstatistiksel yakınsaklığın tanımlanmasından sonra Fridy istatistiksel limit noktalarını tanımlamıştır (Fridy, 1993). Daha sonra Fridy ve Orhan, istatistiksel limit superior ve istatistiksel limit inferior tanımlarını vermişlerdir. (Fridy ve Orhan 1997).

Fridy ve Orhan, lacunary dizi yardımıyla lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlamıştır (Fridy ve Orhan, 1993). Bu çalışmasında, lacunary istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık ve diğer toplanabilme metotları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Mursaleen ve Alotaibi yaptıkları bir çalışmada lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının bir başka benzerini vermişlerdir (Mursaleen ve Alotaibi, 2011). Mursaleen (2000), λ-istatistiksel yakınsaklığı tanımlayarak bu alanda çok önemli çalışmalara öncülük etmiştir (Mursaleen, 2000).

İstatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklığın özel bir halidir. Kostyrko vd. ideal yakınsaklık kavramını tanımlamışlar ve birçok özelliğini vermişlerdir (Kostyrko vd., 2000). Fridy ve Orhan’ın 1997 yılında yaptıkları çalışmadaki tanımlardan yararlanarak Demirci, *I*-limit superior ve *I*-limit inferior tanımlarını vermiş ve bunun üzerine çalışmıştır (Demirci, 2001). İdeal yakınsaklık konusu ile ilgili son yıllarda önemli çalışmalar yapılmıştır (Šalát vd., 2004; Šalát vd., 2005; Das vd., 2011; Das ve Savaş, 2011).

“Amenable” terimi ilk olarak Day tarafından kullanıldı (Day, 1957). Day, çalışmalarında diskrit (ayrık) yarı grup ve gruplardan, yerel kompakt gruplara amenable kavramını oluşturmuştur. $L^{\infty}(G)$ üzerinde sol dönüşüm değişmez bir mean varsa bir G yerel kompakt grubuna amenable denir. Yine bu yıllarda Rosen, Silverren, Folner amenable diskrit ve yerel kompakt gruplarda önemli çalışmalar yapmışlardır (Rosen, 1956; Silverren, 1956; Folner, 1955; Namioka 1964; Ornstein ve Weiss, 1987).

Amenable yarı gruplarda toplanabilme teorisi üzerine yapılan çalışmalardan en önemlileri (Douglass, 1968; Mah, 1971; Mah, 1972; Douglass, 1973; Nuray ve Rhoades, 2013; Kişi ve Güler, 2018, Kişi ve Çakal, 2020a, Kişi ve Çakal, 2020b) olarak verilebilir. Nuray ve Rhoades, istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli p-toplanabilirlik, istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktaları kavramlarını amenable yarı gruplarda tanımlamıştır (Nuray ve Rhoades, 2011). Marouf asimptotik denk dizileri ve asimptotik regüler matrisleri tanımladı (Marouf, 1993). Patterson bu kavramı istatistiksel yakınsaklığa genelleştirdi (Patterson, 2003). Nuray ve Rhoades, ayrık sayılabilir amenable yarı gruplarda tanımlanan negatif olmayan fonksiyonların asimptotik, istatistiksel asimptotik, hemen hemen istatistiksel ve kuvvetli hemen hemen istatistiksel denkliği kavramlarını tanımlamıştırlar (Nuray ve Rhoades, 2013).

Tez çalışmamızdaki temel amacımız, sayı dizileri için verilmiş olan ideal yakınsak kavramını Folner dizileri için oluşturmaktır. "Folner dizilerinin I-asimptotik λ-istatistiksel denkliği" bölümünde, Folner dizileri için yeni yakınsaklık kavramları verildi ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler teoremlerle ifade ve ispat edildi. Daha sonra Folner dizilerinin I-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği ile birlikte yeni tanımlar verilmeye devam edildi.

2. TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathbb{Z}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin bir dizisi olsun. $\forall p \in \mathbb{Z}^n$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|F_j \cap (F_j + p)|}{|F_j|} = 1$$

ise $\mathcal{F}$ dizisine Folner dizisi denir (Nuray ve Rhoades, 2011).

Tanım 2.2. $(G,*)$ bir grup olsun. $\forall p, r, s \in G$ için

a) $p * r = p * s$ ise $r = s$
b) $p * s = r * s$ ise $p = r$

sağlanır.

Tanım 2.3. S boş olmayan bir küme ve $*$, S üzerinde bir ikili işlem olsun. $(S,*)$ yapısı S üzerinde $*$ işlemine göre birleşme özelliğine sahip ise yarı-grup denir.

Tanım 2.4. G boş olmayan bir küme ve $*$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ yapısı cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir grup denir.

a) $*$, G'de bir ikili işlemdir.
b) $\forall \mathrm{p}, \mathrm{r}, \mathrm{s} \in \mathrm{G}$ için $p * (r * s) = (p * r) * s$ birleşme özelliği vardır.
c) $\forall \mathrm{p} \in \mathrm{G}$ için $p * e = e * p = p$ olacak biçimde $\exists e \in G$ birim elemanı vardır
d) $\forall p \in G$ için $p * p^{-1} = p^{-1} * p = e$ olacak biçimde $\exists p^{-1} \in G$ ters elamanı vardır.

Tanım 2.5. Γ bir grup, $\forall \mathrm{s} \in \Gamma$ ve $f \in l^{\infty}(\Gamma)$ için $\mu(s.f) = \mu(s)$ kuralı altındaki μ'ya amenable denir (Nuray ve Rhoades, 2011).

Tanım 2.6. G, diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Bu durumda

a. $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$,
b. $\gamma_i \subset \gamma_{i+1}$ $(i = 1,2,\dots)$
c. $\lim_{i=\infty} \frac{|\gamma_i g \cap \gamma_i|}{|\gamma_i|} = 1, \lim_{i=\infty} \frac{|g\gamma_i \cap \gamma_i|}{|\gamma_i|} = 1, \forall g \in G$

koşulları sağlayan G'nin sonlu alt kümelerinin bir $\{\gamma_i\}$ dizisi vardır. Eğer G'nin sonlu alt kümelerinin bir $\{\gamma_i\}$ dizisi (a)-(c) koşullarını sağlarsa, bu diziye Folner dizisi denir (Namioka, 1964).

Tanım 2.7. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Tüm $m > k_0$ ve $g \in G \setminus S_m$ için $|f(g) - s| < \varepsilon$ olacak şekilde $\forall \varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ var ise $f \epsilon \omega(G)$ fonksiyonu s ye yakınsaktır denir (Nuray ve Rhoades, 2011).

Tanım 2.8. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g\in S_n} |f(g) - s| = 0$$

ise $f \epsilon \omega(G)$ fonksiyonu s ye kuvvetli toplanabilirdir denir (Nuray ve Rhoades, 2011).

Tanım 2.9. $S \subset G$ nin alt ve üst yoğunlukları sırasıyla

$$\overline{\delta}(S) = \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

ve

$$\underline{\delta}(S) = \lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : g \in S\}|$$

ile tanımlanır. Eğer $\overline{\delta}(S) = \underline{\delta}(S)$ ise

$$\delta(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : g \in S\}|,$$

S'nin Folner yoğunluğu olarak adlandırılır (Nuray ve Rhoades, 2011).

Tanım 2.10. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $f \epsilon \omega(G)$ fonksiyonu s ye istatistiksel yakınsaktır denir (Nuray ve Rhoades, 2011).

Örnek 2.1. $G = \mathbb{Z}^2$ olmak üzere $\{S_n^1\}$ ve $\{S_n^2\}$ Folner dizileri

$$\{S_n^1\} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq n, |j| \leq n\}$$

ve

$$\{S_n^2\} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq n, |j| \leq n^2\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i \leq j \leq n, \quad i = 0,1,2, \dots, n; \;\; n = 1,2,3, \dots\}$$

olmak üzere f aşağıdaki gibi alınsın.

$$f = \begin{cases} 1 \text{ için } (i,j) \in A \\ 0 \text{ için } (i,j) \notin A. \end{cases}$$

Bu durumda $\{S_n^2\}$ dizisi için $f(g)$ 0'a istatistiksel yakınsar fakat $\{S_n^1\}$ dizisi için $f(g)$ 0'a istatistiksel yakınsamaz. Gerçekten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n^2|} |\{g \in S_n^2 : |f(g) - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2n+1)(2n^2+1)} = 0$$

olur. Böylece $\{S_n^2\}$ dizisi için $st - lim f(g) = 0$ olur. $\{S_n^1\}$ dizisi için ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n^1|} |\{g \in S_n^1 : |f(g) - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2n^2+1)} \neq 0$$

elde edilir (Nuray ve Rhoades, 2011).

Tanım 2.11. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. $\forall m > k_0$ ve $g \in G \setminus S_m$ için

$$\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| < \varepsilon$$

sağlayacak şekilde $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ ise negatif olmayan $f, h\, \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonuna asimptotik denktir denir ve $f \sim h$ ile gösterilir (Nuray ve Rhoades, 2013).

Tanım 2.12. Herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{g\in S_n} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| = 0$$

sağlayanıyorsa iki negatif olmayan $f, h\, \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonuna kuvvetli asimptotik denktir denir ve $f \sim^{\omega} h$ ile gösterilir (Nuray ve Rhoades, 2013).

Tanım 2.13. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S_n|} \left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

şartını sağlayan iki negatif olmayan $f, h\, \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonuna istatistiksel denktir denir (Nuray ve Rhoades, 2013).

3. FOLNER DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde ayrık (diskret) sayılabilir amenable yarı gruplarda Folner dizilerinin ideal yakınsaklık kavramı verilecektir.

Tanım 3.1. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise $f \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonu s'ye I-yakınsaktır denir ve $f \ \rightarrow^{I(G)} \ s$ ile ifade edilir. I-yakınsak Folner dizilerinin kümesi $I(G)$ ile ifade edilir (Kişi ve Güler, 2018).

Şimdi, Folner dizilerinde *I*-limit supremum ve *I*-limit infimum tanımlanacak ve özellikleri verilecektir.

$f\epsilon\omega(G)$ için B_f ve A_f kümeleri

$$B_f = \{b \in \mathbb{R} : \{g \in S_n : f(g) > b\} \notin I$$

ve

$$A_f = \{a \in \mathbb{R} : \{g \in S_n : f(g) < a\} \notin I$$

şeklinde tanımlansın (Kişi ve Güler, 2018).

Tanım 3.2. $f\epsilon\omega(G)$ fonksiyonu için *I*-limit supremum;

$$I - limsupf = \begin{cases} supB_f, & B_f \neq \emptyset \\ -\infty, & B_f = \emptyset \end{cases}$$

ve *I*-limit infimum;

$$I - liminff = \begin{cases} infA_f, & A_f \neq \emptyset \\ +\infty, & A_f = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Folner dizileri için $I - liminff \leq I - limsupf$ özelliği her zaman sağlanır (Kişi ve Güler, 2018).

Tanım 3.3. G'nin $\{S_n\}$ Folner dizisi için

$$\{g \in S_n : |f(g)| < M\} \in I$$

sağlayacak şekilde $M > 0$ varsa $f \epsilon \omega(G)$ fonksiyonuna I-sınırlıdır denir (Kişi ve Güler, 2018).

Folner dizileri için I-sınırlılık $I - limsupf$ ve $I - liminff$ nin sonlu olduğunu gösterir.

Teorem 3.1. Eğer $I - limsupf = \mu$ sonlu ise $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{g \epsilon S_n : f(g) > \mu - \varepsilon\} \notin I \text{ ve } \{g \epsilon S_n : f(g) > \mu + \varepsilon\} \in I \tag{3.1}$$

sağlanır. Aynı zamanda (3.1) sağlanırsa $I - limsupf = \mu$ olur (Kişi ve Güler, 2018).

İspat. $I - limsupf = \mu$ olsun. Bu durumda μ sayısı $b \in \mathbb{R}$ için

$$\{g \in S_n : f(g) > b\} \notin I$$

şartını sağlayan en büyük elemandır. $\mu + \varepsilon > \mu$ olduğundan bu şartı sağlamaz. Yani

$$\{g \in S_n : f(g) > \mu + \varepsilon\} \in I$$

olmak zorundadır. Diğer taraftan $\mu - \varepsilon < \mu$ olduğundan

$$\{g \in S_n : f(g) > b'\} \notin I$$

olacak şekilde bir $b' \in (\mu - \varepsilon, \mu)$ elamanı bulunabilir.

$$\{g \in S_n : f(g) > \mu - \varepsilon\} \supseteq \{g \in S_n : f(g) > b'\}$$

olduğundan,

$$\{g \in S_n: f(g) > \mu - \varepsilon\} \notin I$$

sağlanır.

Teorem 3.2. Eğer $I - liminff = \lambda$ sonlu ise $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\{g\epsilon S_n: f(g) < \lambda + \varepsilon\} \notin I \text{ ve } \{g\epsilon S_n: f(g) < \lambda - \varepsilon\} \in I \tag{3.2}$$

sağlanır. Aynı zamanda (3.2) sağlanırsa $I - liminff = \lambda$ gerçekleşir (Kişi ve Güler, 2018).

İspat. $I - liminff = \lambda$ alınsın. Böylece λ sayısı $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{g \in S_n: f(g) < a\} \notin I$$

şartını sağlayan en küçük elamandır. $\lambda - \varepsilon < \lambda$ olduğundan bu şartı sağlamaz. Yani

$$\{g \in S_n: f(g) < \lambda - \varepsilon\} \in I$$

olmak zorundadır. Diğer taraftan $\lambda + \varepsilon > \lambda$ olduğundan

$$\{g \in S_n: f(g) < a'\} \notin I$$

olacak şekilde bir $a' \in (\lambda, \lambda + \varepsilon)$ elamanı bulunabilir.

$$\{g \in S_n: f(g) < \lambda + \varepsilon\} \supseteq \{g \in S_n: f(g) > a'\}$$

olduğundan

$$\{g \in S_n: f(g) < \lambda + \varepsilon\} \notin I$$

olur.

Uyarı 3.1. Bu iki teorem gereğince $I - limsupf$ ve $I - liminff$ noktalarının Folner dizilerinin I-yığılma noktalarının en büyüğü ve en küçüğü olduğu söylenebilir.

Teorem 3.3. G'nin $\{S_n\}$ Folner dizisi için

$$I - liminff \leq I - limsupf$$

geçerlidir (Kişi ve Güler, 2018).

İspat. $I - limsupf = -\infty$ olsun. Bu durumda $B_f = \emptyset$ yazılır. Bu ise

$$\{g \in S_n : f(g) > b\} \notin I$$

olacak şekilde bir b sayısı olmaması anlamına gelir. O zaman $\forall b \in \mathbb{R}$ için

$$\{g \in S_n : f(g) \leq b\} \notin I$$

olur. $b < a$ için

$$\{g \in S_n : f(g) < a\} \supseteq \{g \in S_n : f(g) \leq b\}$$

olduğundan ifadenin sağ tarafı ideale ait değildir. Yani $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$\{g \in S_n : f(g) < a\} \notin I$$

elde edilir. Böylece $A_f = \mathbb{R}$ ve dolayısıyla $I - liminff = -\infty$ elde edilir.
$I - limsupf = +\infty$ olsun. Bu durumda ispat açıktır.
$\lambda = I - liminff$ ve $\mu = I - limsupf$ olarak olsun. Tanımdan

$$\{g \in S_n : f(g) > \mu + \frac{\varepsilon}{2}\} \in I$$

ve dolayısıyla

$$\{g \in S_n : f(g) \leq \mu + \frac{\varepsilon}{2}\} \notin I$$

yazılabilir.

$$\{g \in S_n : f(g) \leq \mu + \frac{\varepsilon}{2}\} \supseteq \{g \in S_n : f(g) < \mu + \varepsilon\}$$

olur. İfadenin sol tarafı ideale ait olmadığından sağ tarafı da ideale ait değildir. Bu durumda $\mu + \varepsilon \in A_f$ olur. $\lambda = inf A_f$ olduğundan $\lambda \leq \mu + \varepsilon$ olur. ε sayısı keyfi olduğundan $\lambda \leq \mu$ elde edilir.

Teorem 3.4. I-sınırlı $\{S_n\}$ Folner dizisi I-yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $I - limsupf = I - liminff$ sağlanır (Kişi ve Güler, 2018).

İspat. G'nin her hangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için $\lambda = I - liminff$ ve $\mu = I - limsupf$ olsun. İlk olarak, $I - limf = s$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Böylece,

$$\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\} \in I$$

ve dolayısıyla

$$\{g \in S_n : f(g) \geq s + \frac{\varepsilon}{2}\} \in I \text{ ve } \{g \in S_n : f(g) \leq s - \frac{\varepsilon}{2}\} \in I$$

yazılır.

$$\{g \in S_n : f(g) \geq s + \frac{\varepsilon}{2}\} \supseteq \{g \in S_n : f(g) > s + \varepsilon\}$$

ve

$$\{g \in S_n : f(g) \leq s - \frac{\varepsilon}{2}\} \supseteq \{g \in S_n : f(g) < s - \varepsilon\}$$

olduğundan $\{g \in S_n: f(g) > s + \varepsilon\} \in I$ ve $\{g \in S_n: f(g) < s - \varepsilon\} \in I$ elde edilir. $I - limsupf$ tanımına göre $\mu \leq s + \varepsilon$ ve dolayısıyla $\mu \leq s$; $I - limf$ tanımına göre $\lambda \geq s - \varepsilon$ ve dolayısıyla $s \leq \lambda$ olur. Sonuç olarak

$$\mu \leq s \leq \lambda \Rightarrow \mu \leq \lambda$$

elde edilir. Aynı zamanda $\lambda \leq \mu$ sağlanır. Bu durumda $\lambda = \mu$ olur.
Şimdi farz edelim ki $I - limsupf = I - liminff = s$ olsun. Buna göre

$$\{g \in S_n: f(g) > s + \tfrac{\varepsilon}{2}\} \in I \text{ ve } \{g \in S_n: f(g) < s - \tfrac{\varepsilon}{2}\} \in I$$

yazılabilir.

$$\{g \in S_n: f(g) > s + \frac{\varepsilon}{2}\} \supseteq \{g \in S_n: f(g) \geq s + \varepsilon\}$$

ve

$$\{g \in S_n: f(g) < s - \frac{\varepsilon}{2}\} \supseteq \{g \in S_n: f(g) \leq s - \varepsilon\}$$

olduğundan her iki ifadenin sağ tarafı idealin elemanıdır.

$$\{g \in S_n: |f(g) - s| \geq \varepsilon\} = \{g \in S_n: f(g) \geq s + \varepsilon\} \cup \{g \in S_n: f(g) \leq s - \varepsilon\}$$

yazılır.

$$\{g \in S_n: f(g) \geq s + \varepsilon\} \cup \{g \in S_n: f(g) \leq s - \varepsilon\} \in I$$

olacağından $\{g \in S_n: |f(g) - s| \geq \varepsilon\} \in I$ bulunur. Dolayısıyla $I - limf = s$ elde edilir.

4. FOLNER DİZİLERİNİN *I*-ASİMPTOTİK λ-İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ

Bu bölümde ayrık sayılabilir amenable yarı gruplarda Folner dizilerinin λ-istatistiksel yakınsaklığı tanımlanacak, bu diziler için verilmiş olan *I*-yakınsaklık kullanılarak yeni yakınsaklık kavramlarından bahsedilecektir. Bununla birlikte, Folner dizileri için *I*-asimptotik λ-istatistiksel denklik tanımı verilip, bu kavram ve oluşturulacak yeni kavramlarla olan ilişkiler teoremlerle ifade edilip ispat edilecektir.

Tanım 4.1. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve *G*'nin herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $f \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonu s'ye λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $f \to^{S_\lambda(G)} s$ ile ifade edilir. λ-istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi $S_\lambda(G)$ ile gösterilir.

Eğer $\lambda_n = n$ alınırsa Folner dizileri için istatistiksel yakınsaklık ile λ-istatistiksel yakınsaklık örtüşmektedir.

Tanım 4.2. *G*'nin herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g\in S_n} |f(g) - s| = 0$$

ise $f \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonu s'ye kuvvetli (V,λ) toplanabilirdir denir ve $f \to^{(V,\lambda)(G)} s$ ile gösterilir. Tüm kuvvetli (V,λ) toplanabilir Folner dizilerinin kümesi $(V,\lambda)(G)$ ile gösterilir.

Eğer $\lambda_n = n$ alınırsa Folner dizileri için kuvvetli (V,λ) toplanabilirlilik $[C,1]$ toplanabilirliliğe dönüşür.

Teorem 4.1. Eğer $f \ \rightarrow^{(V,\lambda)(G)} \ s$ ise $f \ \rightarrow^{S_\lambda(G)} \ s$ sağlanır.

İspat. $f \ \rightarrow^{(V,\lambda)(G)} \ s$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Böylece

$$\sum_{g\in S_n} |f(g) - s| \geq \sum_{g\in S_n \& |f(g)-s|\geq\varepsilon} |f(g) - s| \geq \varepsilon. |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}|$$

sağlanır. Buradan,

$$\frac{1}{\varepsilon.\lambda_n} \sum_{g\in S_n} |f(g) - s| \geq \frac{1}{\lambda_n} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. $f \ \rightarrow^{(V,\lambda)(G)} \ s$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g\in S_n} |f(g) - s| = 0$$

yazılır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Böylece $f \ \rightarrow^{S_\lambda(G)} \ s$ sağlanır.

Teorem 4.2. Eğer $f \epsilon m(G)$ sınırlı fonksiyon ve $f \ \rightarrow^{S_\lambda(G)} \ s$ ise bu durumda $f \ \rightarrow^{(V,\lambda)(G)} \ s$ sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \epsilon m(G)$ sınırlı fonksiyon ve $f \ \rightarrow^{S_\lambda(G)} \ s$ olsun. Bu durumda $\|f\|_\infty + s = M$ olacak biçimde $M > 0$ vardır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{g\in S_n} |f(g) - s| \leq \sum_{g\in S_n \& |f(g)-s|\geq\varepsilon} |f(g) - s| + \sum_{g\in S_n \& |f(g)-s|<\varepsilon} |f(g) - s|$$
$$\leq \frac{M}{\lambda_n} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon,$$

yani

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}|f(g)-s| \le \frac{M}{\lambda_n}|\{g\in S_n: |f(g)-s|\ge \varepsilon\}|+\varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlikte limite geçilirse,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}|f(g)-s|\right) \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{M}{\lambda_n}|\{g\in S_n: |f(g)-s|\ge \varepsilon\}|+\varepsilon\right)$$

bulunur. $f \ \to^{S_\lambda(G)} \ s$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M}{\lambda_n}|\{g\in S_n: |f(g)-s|\ge \varepsilon\}|+\varepsilon\right)=\varepsilon$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}|f(g)-s|\right)\le\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}|f(g)-s|\right)=0$$

yazılır. Böylece $f \ \to^{(V,\lambda)(G)} \ s$ sağlanır.

Tanım 4.3. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi ve $I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall\delta>0$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}|\{g\epsilon S_n: |f(g)-s|\ge\varepsilon\}|\ge\delta\right\}\in I$$

ise $f\epsilon\omega(G)$ fonksiyonu s'ye *I*-istatistiksel yakınsaktır denir. Tüm *I*-istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi $S_I(G)$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.4. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için

$$\left\{g\in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right|\ge\varepsilon\right\}\in I$$

koşulunu sağlayan iki negatif olmayan $f,h\,\epsilon\,\omega(G)$ fonksiyonuna asimptotik *I*-denktir denir ve $f\sim^{I(G)} h$ ile gösterilir.

Tanım 4.5. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olsun. $\forall\varepsilon,\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\left|\left\{ g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \geq \ \delta \right\} \in I$$

ise iki negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına *I*-asimptotik istatistiksel denktir denir ve $f \sim^{S_I(G)} h$ ile gösterilir.

G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için, $I = I_{fin}$ ise *I*-asimptotik istatistiksel denklik ve asimptotik istatistiksel denklik çakışır.

Tanım 4.6. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise iki negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına kuvvetli $\lambda_I(G)$-asimptotik denktir denir ve $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ ile gösterilir.

Tanım 4.7. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olsun. $\forall\varepsilon,\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{ g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \geq \ \delta \right\} \in I$$

ise iki negatif olmayan $f, h \in \omega(G)$ fonksiyonlarına I-asimptotik λ-istatistiksel denktir denir ve $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ ile gösterilir.

Tanım 4.8. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N}: \left|\frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n} f(g) - s\right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonuna s ye I-toplanabilir denir. $f \overset{C_I}{\rightarrow} s$ ile ifade edilir.

Tanım 4.9. G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonuna s ye I-kuvvetli toplanabilir denir. $f \overset{[C]_I}{\longrightarrow} s$ ile gösterilir.

Teorem 4.3. Eğer $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ ise $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ sağlanır.

İspat. $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{g \in S_n} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \sum_{g \in S_n \& \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon. \left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

sağlanır. Böylece,

$$\frac{1}{\varepsilon.\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

yazılır. Buradan bazı $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon.\delta\right\}$$

elde edilir. $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ olduğundan

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon.\delta\right\} \in I$$

olur. Kapsama ilişkisinden dolayısıyla

$$\left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \ \delta \right\} \in I$$

bulunur. Böylece $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ elde edilir.

Teorem 4.4. Eğer $f, g \epsilon\, m(G)$ sınırlı fonksiyonlar ve $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ ise bu durumda $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ sağlanır.

İspat. $f, g \epsilon\, m(G)$ sınırlı fonksiyonlar ve $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ olsun. $f, g \epsilon\, m(G)$ olduğundan

$$\left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \leq M$$

sağlayan $M > 0$ vardır. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n \& \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n \& \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| < \varepsilon} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right|$$

$$\leq M \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. Şimdi

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\}$$

ve

$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \geq \ \frac{\varepsilon}{2M} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $n \notin A_2$ ise

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

olur. Aynı zamanda

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \leq M\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece $n \notin A_1$ elde edilir. Bu durumda

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \in I$$

yazılır. Sonuç olarak $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ elde edilir.

Teorem 4.5. Eğer $liminf \frac{\lambda_n}{|S_n|} > 0$ ve $f \sim^{S_I(G)} h$ ise $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ sağlanır.

İspat. $liminf \frac{\lambda_n}{|S_n|} > 0$ alınsın. Böylece $\delta > 0$ sayısı için $\frac{\lambda_n}{|S_n|} \geq \delta$ sağlanır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{|S_n|}\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} &\geq \frac{\lambda_n}{|S_n|}\frac{1}{\lambda_n}\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} \\ &\geq \delta.\frac{1}{\lambda_n}\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda bazı $\eta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \eta\right\}$$

$$\subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} \geq \eta\delta\right\} \in I$$

bulunur. Sonuç olarak $liminf\, \frac{\lambda_n}{|S_n|} > 0$ ve $f \sim^{S_I(G)} h$ iken $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ sağlanır.

Tanım 4.10. $0 < p < \infty$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq \varepsilon\right\} \in I$$

sağlanıyorsa $f \in \omega(G)$ fonksiyonuna s ye *I*- kuvvetli *p*-toplanabilir denir. $f \xrightarrow{[C]_I^p} s$ ile gösterilir. Tüm *I*-kuvvetli *p*-toplanabilir fonksiyonların kümesi $C_I^p[G]$ ile ifade edilir.

Teorem 4.6. $f \in \omega(G)$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $f \xrightarrow{[C]_I^p} s$ ise $f \xrightarrow{S_I} s$ sağlanır.

İspat. $f \in \omega(G)$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p = \sum_{\substack{g \in S_n \\ |f(g)-s| \geq \varepsilon}} |f(g) - s|^p + \sum_{\substack{g \in S_n \\ |f(g)-s| < \varepsilon}} |f(g) - s|^p$$

$$\geq |\{g \in S_n: |f(g) - s| \geq \varepsilon\}|\varepsilon^p$$

ve böylece

$$\frac{1}{\varepsilon^p |S_n|}\sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq \frac{1}{|S_n|}|\{g \in S_n: |f(g) - s| \geq \varepsilon\}|$$

yazılır. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \subset \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq \delta\varepsilon^p\right\}$$

olur. G'nin herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için f, *I*-güçlü *p*-toplanabilir ise

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq \delta\varepsilon^p\right\} \in I$$

olduğundan kapsama ilişkisinden

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in I$$

olur ve böylece $f \overset{S_I}{\rightarrow} s$ elde edilir.

Teorem 4.7. $f \in m(G)$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $f \overset{S_I}{\rightarrow} s$ ise. $f \overset{[C]_I^p}{\longrightarrow} s$ sağlanır.

İspat. $f \overset{S_I}{\rightarrow} s$ olsun. $f \in m(G)$ olduğundan $\|f\|_\infty + s = M$ sağlayacak şekilde $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ alınsın. Bu durumda

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\substack{g \in S_n \\ |f(g)-s| \geq \frac{\varepsilon}{2}}} |f(g) - s|^p + \frac{1}{|S_n|} \sum_{\substack{g \in S_n \\ |f(g)-s| < \frac{\varepsilon}{2}}} |f(g) - s|^p$$

$$\leq \frac{M^p}{|S_n|} \left|\left\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

yazılır. Böylece

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \left|\left\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M^p}\right\}$$

$f \xrightarrow{S_I} s$ olduğundan

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \left|\left\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M^p}\right\} \in I$$

sağlanır. Kapsama ilişkisinden

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s|^p \geq \varepsilon \right\} \in I$$

olur ve böylece $f \xrightarrow{[C]_I^p} s$ elde edilir.

Tanım 4.11. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{g \in S_n: \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise iki negatif olmayan $f, h \epsilon\, \omega(G)$ fonksiyonlarına kuvvetli Cesàro I-asimptotik denktir denir. $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ ile gösterilir.

Teorem 4.8. Eğer $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ ise $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ sağlanır.

İspat. $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ olsun.

$$\frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right| \le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right|$$

yazılabildiğinden herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{g \in S_n: \frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right| \ge \varepsilon\right\} \subseteq \left\{g \in S_n: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right| \ge \varepsilon\right\}$$

elde edilir. $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ olduğundan

$$\left\{g \in S_n: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right| \ge \varepsilon\right\} \in I$$

olur. Kapsama ilişkisinden

$$\left\{g \in S_n: \frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right| \ge \varepsilon\right\} \in I$$

bulunur. Sonuç olarak $f \sim^{V_{\lambda_I}(G)} h$ iken $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ sağlanır.

Teorem 4.9. Eğer $f, g \in m(G)$ sınırlı fonksiyonlar ve $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ ise bu durumda $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ sağlanır.

İspat. $f, g \in m(G)$ sınırlı fonksiyonlar ve $f \sim^{S_{\lambda_I}(G)} h$ olsun. $f, g \in m(G)$ olduğundan

$$\left|\frac{f(g)}{h(g)}-1\right| \le M$$

$M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ alınsın ve

$$L_n = \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n \setminus L_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \\ &\leq M \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2M} \right\} \in I$$

yazılır. Sonuç olarak $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ elde edilir.

Teorem 4.10. Eğer $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ ise bu durumda $f \sim^{S_I(G)} h$ sağlanır.

İspat. $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n \& \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon . \left| \left\{ k \leq |S_n| : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\varepsilon . |S_n|} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \frac{1}{|S_n|} \left| \left\{ g \in S_n : \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. Böylece verilen $\delta > 0$ sayısı için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon.\delta\right\}$$

$$\in I$$

bulunur. Sonuç olarak $f \ \sim^{S_I(G)} h$ elde edilir.

Teorem 4.11. Eğer $f, h \epsilon\, m(G)$ sınırlı fonksiyonlar olsun. Eğer $f \sim^{S_I(G)} h$ ise $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ sağlanır.

İspat. $f \ \sim^{S_I(G)} h$ ve $f, h \epsilon\, m(G)$ sınırlı fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \leq M$ sağlayan $M > 0$ vardır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|S_n|}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| &= \frac{1}{|S_n|}\sum_{g \in S_n \& \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| + \frac{1}{|S_n|}\sum_{g \in S_n \& \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| < \varepsilon}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \\
&\leq M\frac{1}{|S_n|}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon\frac{1}{|S_n|}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| < \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{M}{|S_n|}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece bazı $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|S_n|}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\delta}{M}\right\}$$

$$\in I$$

yazılır. Buradan $f \sim^{[C_1(I)](G)} h$ elde edilir.

5. FOLNER DİZİLERİNİN *I*-ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ

Bu bölümde ayrık (diskret) sayılabilir amenable yarı gruplarda Folner dizilerinin *I*-asimptotik lacunary istatistiksel denklik tanımları verilecek ve *I*-asimptotik istatistiksel denklikle arasındaki kapsama ilişkilerine değinilecektir.

Tanım 5.1. θ bir lacunary dizisi ve G, sağ ve sol kısaltma kurallarını sağlamak üzere bir diskret sayılabilir amenable yarı grup olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve G'nin herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Tüm lacunary istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi $S_\theta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 5.2. $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. $\forall \varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} |\{g \in S_n : |f(g) - s| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in I$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye *I*-lacunary istatistiksel yakınsak denir. Tüm *I*-lacunary istatistiksel yakınsak Folner dizilerinin kümesi $S_I^\theta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 5.3. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{g \in S_n} |f(g) - s| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise $f \in \omega(G)$ fonksiyonu s'ye güçlü *I*-lacunary yakınsaktır ya da $N_I^\theta(G)$-yakınsaktır denir. Tüm güçlü *I*-lacunary yakınsak dizileri $N_I^\theta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 5.4. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olsun. $\forall\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \left| \left\{ g \in S_n: \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

sağlanırsa iki negatif olmayan $f, h \epsilon \omega(G)$ fonksiyonlarına *I*-asimptotik lacunary istatistiksel denktir denir. $f \sim^{S_I^\theta(G)} h$ biçiminde gösterilir.

G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi için, $I = I_{fin}$ ise *I*-asimptotik lacunary istatistiksel denklik ve asimptotik lacunary istatistiksel denklik çakışır.

Tanım 5.5. G'de herhangi bir $\{S_n\}$ Folner dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

ise iki negatif olmayan $f, h \epsilon \omega(G)$ fonksiyonlarına güçlü *I*-asimptotik lacunary denktir denir. $f \sim^{N_I^\theta(G)} h$ ile gösterilir.

Teorem 5.1. $f, h \epsilon G$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda

(a) Eğer $f \sim^{N_I^\theta(G)} h$ ise $f \sim^{S_I^\theta(G)} h$ sağlanır.

(b) Eğer $f, h \epsilon m(G)$ ve $f \sim^{S_I^\theta(G)} h$ ise $f \sim^{N_I^\theta(G)} h$ sağlanır.

İspat. (a) $\varepsilon > 0$ ve $f \sim^{N_I^\theta(G)} h$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon . \left| \left\{ g \in S_n: \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{\varepsilon . h_r} \sum_{g \in S_n} \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ g \in S_n: \left| \frac{f(g)}{h(g)} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

yazılır. Bununla birlikte bazı $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon.\delta\right\} \in I$$

elde edilir. Sonuç olarak $f \sim^{S_I^{\theta}(G)} h$ bulunur.

(b) $f, h \in m(G)$ ve $f \sim^{S_I^{\theta}(G)} h$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \leq M$$

sağlayan $M > 0$ vardır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| &= \frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| + \frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n \setminus L_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \\ &\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

olur. Şimdi aşağıdaki gibi

$$A_1 = \left\{r \epsilon \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$A_2 = \left\{r \epsilon \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{g \in S_n: \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer, $r \notin A_2$ ise

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

olur. Aynı zamanda

$$\frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece $r \notin A_1$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{g \in S_n}\left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{g \in S_n : \left|\frac{f(g)}{h(g)} - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \in I$$

yazılır. Sonuç olarak $f \sim^{N_I^\theta(G)} h$ elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Folner dizilerinin ideal yakınsaklığı kavramı tanıtılmış ve bu kavramın birçok özelliği ele alınmıştır.

İleri çalışmalarda amenable yarı gruplarda kaba yakınsaklık çalışılabilir. Bununla birlikte farklı yakınsaklık türleri kullanılarak yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Connor, J. S. (1988). The statistical and strong p- Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, 8: 46-63.

Das, P., Ghosal, S. Kr. ve Savaş E. (2011). On generalized of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters,* 36: 1509-1514.

Das, P. ve Savaş E. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Applied Mathematics Letters*, 24: 826-830.

Day, M. (1957). Amenable semigroups. *Illinois Journal of Mathematics*, 1: 509-544.

Demirci, K. (2001). *I*-limit superior and limit inferior. *Mathematical Communications*, 6: 165-172.

Douglass, S. A. (1968). On a concept of summability in amenable semigroups. *Mathematica Scandinavica*, 23: 96–102.

Douglass, S. A. (1973). Summing sequences for amenable semigroups. *Michigan Math Journal*, 20: 169–179.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Collaquium Mathematicum,* 2: 241-244.

Freedman, A. R., Sember, J. J. ve Raphael, M. (1978). Some Cesàro type summability spaces. *Proceedins of the London Mathematical Society,* 37: 508-520.

Freedman, A. R. ve Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95: 10-11.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313.

Fridy, J. A. (1993). Statistical limit points. *Proceedins of the American Mathematical Society*, 118: 1187-1192.

Fridy, J. A. ve Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics,* 160(1): 43-51

Fridy, J. A. ve Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedins of the American Mathematical Society*, 125: 3625-3631.

Folner, E. (1955). On Groups with Full Banach Mean Values. *Mathematica Scandinavica,* 3: 243-254.

Kişi, Ö. ve Çakal, B. (2018). On I_σ-convergence of folner sequence on amenable semigroups. *New Trends in Mathematical Sciences*, 6(3): 1-14.

Kişi, Ö. ve Çakal, B. (2019). On *I*-Asymptotically lacunary statistical equivalence of functions on amenable semigroups. *International Journal of Analysis and Applications*, 17(1): 14-25.

Kişi, Ö. ve Güler, E. (2018). A generalized statistical convergence via ideals defined by Folner sequences on amenable groups. *4th International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2018),* 104-110.

Kostyrko, P., Salat, T. ve Wilezynski, W. (2000). *I*-Convergence. *Real Analysis Exchange,* 26(2): 669-686.

Mah, P. F. (1971). Summability in amenable semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society,* 156: 391-403.

Mah, P. F. (1972). Matrix summability in amenable semigroups. *Proceedins of the American Mathematical Society*, 36: 414-420.

Marouf, M. S. (1993). Asymtotic equivalence and summability. *International Journal of Mathematics Sciences,* 16(4): 755-762.

Mursaleen, M. (2000). λ-Statistical Convergence. *Mathematica Slovaca*, 50(1): 111-115.

Mursaleen, M. ve Alotaibi, A. (2011). Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. *Annali dell' Università di Ferrara*, 57: 373-381.

Namioka, I. (1964). Folner’s conditions for amaneble semigroups. *Mathematica Scandinavica,* 15: 18-28.

Nuray, F. ve Rhoades, B. E. (2011). Some kinds of convergence defined by Folner sequences. *Analysis,* 31: 381-390.

Nuray, F. ve Rhoades, B. E. (2013). Asymptotically and statistically equivalent functions defined on amenable semigroups. *Thai Journal of Mathematics*, 11(2): 303-311.

Ornstein, D. S. ve Weiss, B. (1987). Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. *Journal d’Analyse Mathematique,* 48: 1-141.

Patterson, R. F. ve Savaş, E. (2006). On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, 4: 267-272.

Rosen, W. G. (1956). On invariant means over compact semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(6): 1076-1082.

Ryan, R. A. (1956). Introduction to tensor products of Banach spaces. *Monographs in Mathematics,* Springer Verlag, London, New York.

Šalát, T. (1980). On statistical convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca,* 30: 139-150.

Šalát, T., Tripathy, B. C. ve Ziman, M. (2004). On some properties of *I*-convergence. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 28: 279-286.

Šalát, T., Tripathy, B. C. ve Ziman, M. (2005). *I*-convergence field. *Tatra Mountains Mathematical Publications,* 28: 279-286.

Silverren, R. J. (1956). Means on semigroups and the Hahn-Banach extension property. *Transactions of the American Mathematical Society,* 83: 222-237.

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Collaquium Mathematicum,* 2: 73-74.

Zygmund, A. (1979). Trigonometric series. *Cambridge University Press*, Second Edition.

ÖZGEÇMİŞ