# TOPOLOJİ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

# I. BÖLÜM

## - Metrik Uzaylar -

**1.1. Tanım :** $X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesini göstersin.

$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow d(x,y)$ fonksiyonu verilsin. Her $x,y,z \in X$ için $d$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

1- $d(x,y) \geq 0$

2- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

3- $d(x,y) = d(y,x)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Bu taktirde $d$ fonksiyonuna $X$ kümesi üzerinde bir metrik, $(X,d)$: metrik uzay denir.

$d(x,y)$, $x$ noktasının, $y$ noktasına olan uzaklığını verir.

**1. Örnek //** $x,y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$d(x,y) = |x-y|$ biçiminde tanımlanan mutlak değer fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ için,

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$

$d(x,y) = |x-y| \geq 0$

2- $d(x,y) = 0 \overset{?}{\iff} x = y$

$d(x,y) = |x-y| = 0 \iff x = y$

$\Rightarrow$ : $d(x,y) = |x-y| = 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

$\Leftarrow$ : $x-y=0 \Rightarrow d(x,y) = 0$ ?

$x=y \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow d(x,y)=0$

3- $d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq \underbrace{|x-y|} + \underbrace{|y-z|}$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $(\mathbb{R},d)$ metrik uzaydır.

2.Örnek// Boş olmayan $E$ kümesi üzerinde bir $d$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$$

$(E,d)$ bir metrik uzaydır.

$\forall x,y,z \in E$ için

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$ Tanımdan dolayı gerçeklenir.

2- $d(x,y) = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} x = y$

$\Rightarrow$: $d(x,y) = 0$ olsun. Tanımdan $x = y$ dir.

$\Leftarrow$: $x = y$ olsun. Tanımdan $d(x,y) = 0$ olur.

3- $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$x \neq y$, $d(\underline{x,y}) = 1 = d(\underline{y,x})$

$x = y$, $d(x,y) = 0 = d(y,x)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$x = y = z \Rightarrow d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 0$, $d(x,z) = 0$

$x \neq y \neq z$ $\qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$x = y \neq z$ $\qquad 0 \leq 0 + 0$

$x \neq y = z \Rightarrow d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 0$, $d(x,z) = 1$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$1 \leq 1 + 0$

$(E,d)$ bir metrik uzaydır.

## 1.1. Metrik Uzayların Çarpımı:

**1.1.Teorem:** $(X_1,d_1), (X_2,d_2), \ldots (X_i,y_i) \ldots, (X_n,y_n)$ metrik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ de bu kümelerin dik çarpımı olsun. Bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\}$$ biçiminde tanımlansın. Bu taktirde

$(X,d)$ bir metrik uzaydır.

İspat// $\forall x,y,z \in X$ için

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

$z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$

$\forall\, 1\leq i\leq n$ olmak üzere $d_i(x_i,y_i)\geq 0$

$\forall i$ için sağlandığından $d(x,y)\geq 0$ dır.

2- $d(x,y)=0 \iff x=y$

$\Rightarrow$ : $d(x,y)=0$ olsun. $d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}$

$d_i(x_i,y_i)=0$ $\quad d_1(x_1,y_1)=0 \iff x_1=y_1$

$d_i(x_i,y_i)=0 \iff x_i=y_i$

$d(x,y)=0 \iff x=y$

3- $d(x,y)\overset{?}{=}d(y,x)$

$d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}$

$d_1(x_1,y_1)=d_1(y_1,x_1)$

$\forall\, 1\leq i\leq n$ için de;

$d_n(x_n,y_n)=d_n(y_n,x_n)$ $\quad d(x,y)=d(y,x)$ olur.

4- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}=d_j(x_j,y_j)$

$d(y,z)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(y_i,z_i)\}=d_k(y_k,z_k)$

$d_i(x_i,z_i)\leq d_i(x_i,y_i)+d_i(y_i,z_i)$

$\leq d_j(x_j,y_j)+d_k(y_k,z_k)$

$= d(x,y)+d(y,z)$

$\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,z_i)\}=d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$(X,d)$ bir metrik uzaydır.

**1.1. Sonuç:** $X = \mathbb{R}^n$ olsun.

$d(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$, $(\mathbb{R}^n, d)$ bir metrik uzaydır.

## 1.2. Alt Metrik Uzay

**1.2. Tanım:** $(X,d)$ bir metrik uzay, $A \subset X$ olsun.

Her $x,y \in A$ için $d_A(x,y) = d(x,y)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon $A$ üzerinde bir metriktir. Dolayısıyla $(A, d_A)$ bir metrik uzaydır. Bu metrik uzaya $(X,d)$ nin bir alt metrik uzayı denir.

**Örnek//** $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Kabul edelim ki $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x,y \in A$ için $d_A(x,y) = d(x,y)$ ise $(A, d_A)$ bir metrik uzaydır.

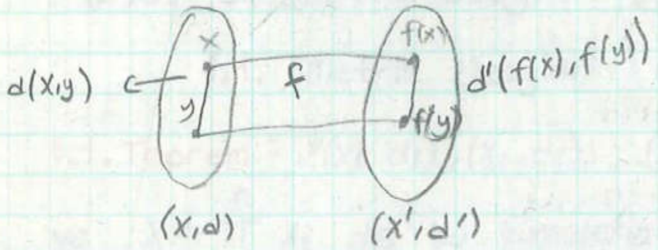
## 1.3. İzometriler:

$(X,d)$ ve $(X',d')$ bir metrik uzay,

$f: (X,d) \longrightarrow (X',d')$ olsun (ve bu fonksiyon 1:1 ve örten olsun.)

Her $x,y \in X$ için,

$d(x,y) = d'(f(x), f(y))$ sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna bir izometri, bu metrik uzaylara da izometrik uzaylar denir.




( $f$: izometri
$(X,d), (X',d')$ izometrik uzay )

## 1.4. Açık ve Kapalı Yuvarlar ve Küreler:

**1.4. Tanım:** $(X,d)$ bir metrik uzay $a \in X$ olsun. $r > 0$ olmak üzere.

$B(a,r) = \{x \mid x \in X \;\; d(a,x) < r\}$, $B(a,r)$ ye $a$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar denir.

$B[a,r] = \{x \mid x \in X \quad d(a,x) \leq r\}$, $B[a,r]$ ye kapalı yuvar denir.

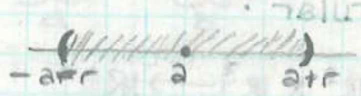
$S = (a,r) = \{x \mid x \in X \quad d(a,x) = r\}$ küre denir.

örnek // $\mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$

$|x-a| < r \iff -r < x-a < r$

$a-r < x < a+r$



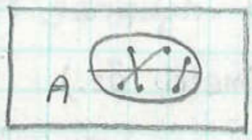
$B[a,r] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}$

## 1.5. Çaplar, İki Alt Küme Arasındaki Uzaklık.

**1.5.1. Tanım:** $(X,d)$, $A \subset X$

$$\delta(A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} d(x,y)$$

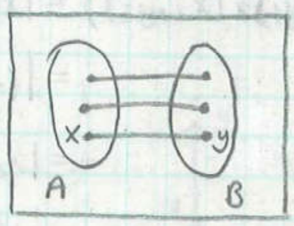


$(X,d)$

$\delta(A) < \infty$ ise $A$'ya sınırlıdır denir.

Sınırlı iki kümenin birleşimi yine sınırlıdır.

**1.5.2. Tanım:** $(X,d)$, $A \subset X$ ve $B \subset X$, $x$, $A$'yı ve $y$ de $B$'yi taramak üzere $d(x,y)$ nin meydana getirdiği kümenin en büyük alt sınırına, $A$'nın $B$'ye olan uzaklığı denir. Ve bu $d(A,B)$ ile gösterilir.



$$d(A,B) = \inf d(x,y) \qquad x \in A, y \in B$$

Örnek // $\mathbb{R}^2$, $x,y \in \mathbb{R}^2$ $\quad x = (x_1, x_2)$ $\quad y = (y_1, y_2)$

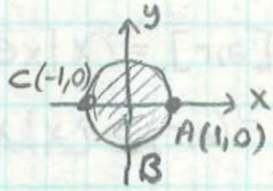
$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

$A(1,0)$ noktasını $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

$C(-1,0)$ noktasını alıyorum. Üçgen eşitsizliğini sağlamadığını göstermek istiyorum.

$d(A,C)$ yani çap , $d(A,C)=2$

$d(A,B)=0$ (A noktasıyla, kürenin içindeki en yakın nokta.




B , kürenin içidir. $d(B,C)=0$

$$d(A,C) \leqslant d(A;B) + d(B,C)$$

Sorular :

**S.1-** $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

$x=(x_1,y_1) \quad y=(x_2,y_2)$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$$

$(\mathbb{R}^2,d)$ metrik olup olmadığını gösteriniz.

i- $d(x,y) \geqslant 0$

ii- $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri öz.)

iii- $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

iv- $d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$

1- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geqslant 0$ ?

$$|x_1-x_2| + |y_1-y_2| \geqslant 0$$

2- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

$$= |(-1)(x_2-x_1)|+|(-1)(y_2-y_1)|$$

$$= |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$$

$$= d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

3- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

$$|x_1-x_2| + |y_1-y_2| = 0$$

$$|x_1-x_2| = 0 \text{ ve } |y_1-y_2| = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x_1-x_2=0$ ve $y_1-y_2=0$

$\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$ ve $y_1=y_2$

$\Leftrightarrow$ $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$x = (x_1, y_1) \quad y = (x_2, y_2) \quad z = (x_3, y_3)$

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \overset{?}{\leq} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$$

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = |x_1 - x_3 + x_2 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_2 - y_2|$$

$$= |\underbrace{x_1 - x_2}_{a} + \underbrace{x_2 - x_3}_{b}| + |\underbrace{y_1 - y_2}_{a} + \underbrace{y_2 - y_3}_{b}|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ gibi düşünürsek,

$$\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$$

$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

Yuvarını çizersek, $B((0,0),1)$ ve $S((0,0),1)$ kümelerini çizersek.

$B((0,0),1) \Rightarrow (0,0)$ merkezli $r=1$ yarıçaplı çemberdir.

$$B(x,r) = \{ y \mid d(x,y) < r \}$$

$$B((0,0),1) = \{(x,y) \mid d(x,y) = (0,0) < 1\} = \{(x,y) \mid |x-0| + |y-0| < 1\}$$

$$= \{(x,y) \mid |x| + |y| < 1\}$$

$|x| + |y| < 1 \qquad |x| + |y| = 1$

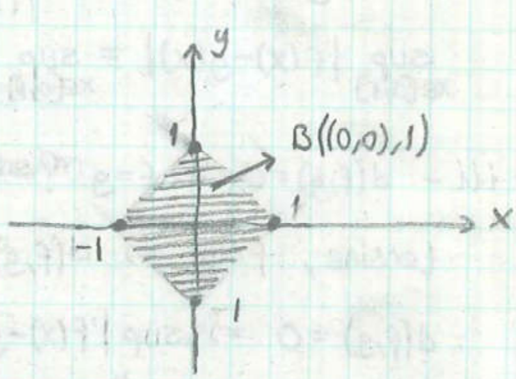
i- $x>0, y>0, \quad x+y=1 \quad y = 1-x \qquad \left. \begin{matrix} x=0, y=1 \\ y=0, x=1 \end{matrix} \right\}$

ii- $x>0, y<0,$

$x - y = 1 \Rightarrow y = x-1 \qquad \left. \begin{matrix} x=0, y=-1 \\ y=0, x=1 \end{matrix} \right\}$

iii- $x<0, y>0$

$-x+y=1 \Rightarrow y = x+1 \qquad \left. \begin{matrix} x=0, y=1 \\ y=0, x=-1 \end{matrix} \right\}$




iv- $x<0, y<0$

$-x-y=1 \Rightarrow y = -x-1 \qquad \left. \begin{matrix} x=0, y=-1 \\ y=0, x=-1 \end{matrix} \right\}$

8/S.2 – $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$x = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$$d(x,y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$$

$y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

fonksiyonu metrik midir?

i- $d(x,y) \geq 0$

ii- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$x = y = (-1,2)$

$d(x,y) = 0$ ? $\quad d(x,y) = d((-1,2),(-1,2))$

$= |-1| + |-1| + |2| + |2| = 1+1+2+2 = 6 \neq 0$

O halde, metrik özelliğini sağlamadığından, metrik değildir denir.

9/ S-3- $C([0,1],\mathbb{R})$ ile $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesini gösterelim.

Bir d fonksiyonu, $f,g \in C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere,

$d(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$ şeklinde tanımlansın. C fonksiyonunun

$C([0,1],\mathbb{R})$ metrik midir?

$r>0$ $r\in\mathbb{R}$ ve $f_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere

$B(f_0,r)$, $B[f_0,r]$, $S(f_0,r)$ kümelerini çiziniz. (C sürekli)

(Artık, nokta yerine fonksiyonlarla işlem yapıyoruz.)

i- $\forall f,g \in C([0,1],\mathbb{R})$, $d(f,g) \geq 0$ ?

$\underbrace{\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|}_{\text{artık bir sayı oldu.}} \geq 0$ (Mutlak değerin özelliğinden)

ii- $d(f,g) = d(g,f)$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |(-1)(g(x)-f(x))| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)-f(x)| = d(g,f)$

iii- $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ ?

tersine, $f = g \Rightarrow d(f,g) = 0$

$d(f,g) = 0 \Rightarrow \sup |f(x)-g(x)| = 0$

$\Rightarrow |f(x)-g(x)| \leq \sup |f(x)-g(x)| = 0$

**Not//** Herhangi bir A kümesinin sup'u a ise,

($\sup A = a \Rightarrow$ her zaman.)

$\Rightarrow \forall x \in A$ için $x \leq a$ dır. veya $x \leq \sup A$ dır.

$\Rightarrow |f(x)-g(x)| = 0 \Rightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f=g \Rightarrow f(x)-g(x)=0 \Rightarrow |f(x)-g(x)|=0$

Her x için doğru olduğundan sup için de doğru olur.

$\sup |f(x)-g(x)| = 0$

iv – $\forall f,g,h \in C([0,1],\mathbb{R})$

$d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$ ?

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \leq \sup|f(x)-h(x)| + \sup|h(x)-g(x)|$ ?

$|f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x)+h(x)-h(x)|$

$= |\underbrace{f(x)-h(x)}_{a}+\underbrace{h(x)-g(x)}_{b}| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup|f(x)-g(x)| \leq \sup|f(x)-h(x)| + \sup|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \quad d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$

Not// $\left.\begin{array}{l} f(x)\leq g(x) \Rightarrow \sup f(x) \leq \sup g(x) \\ \sup(f(x)+g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x) \end{array}\right\}$ olur.

• $r>0,\ f_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$

$B(f_0,r)$, $B[f_0,r]$, $S(f_0,r)$ bulalım ve çizelim.

$B(f_0,r) = \{f \mid d(f,f_0)<r\}$

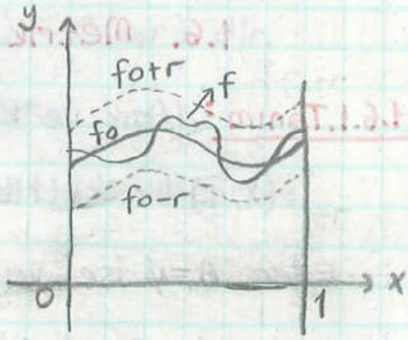
$= \{f \mid \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-f_0(x)|<r\}$

$\sup|f(x)-f_0(x)|<r$

$|f(x)-f_0(x)| \leq \sup|f(x)-f_0(x)|<r$

$\Rightarrow |f(x)-f_0(x)|<r \Rightarrow -r<f(x)-f_0(x)<r$

$\Rightarrow f_0(x)-r<f(x)<f_0(x)+r$



$\Rightarrow |f(x)-g(x)| = 0 \Rightarrow f(x)-g(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f = g \Rightarrow f(x)-g(x) = 0 \Rightarrow |f(x)-g(x)| = 0$

Her x için doğru olduğundan sup için de doğru olur.

$\sup |f(x)-g(x)| = 0$

iv- $\forall f,g,h \in C([0,1],\mathbb{R})$

$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$ ?

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \leq \sup |f(x)-h(x)| + \sup |h(x)-g(x)|$ ?

$|f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x)+h(x)-h(x)|$

$= |\underbrace{f(x)-h(x)}_{a} + \underbrace{h(x)-g(x)}_{b}| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$

$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup|f(x)-g(x)| \leq \sup|f(x)-h(x)| + \sup|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$

Not// $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \Rightarrow \sup f(x) \leq \sup g(x) \\ \sup(f(x)+g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x) \end{array}\right\}$ olur.

- $r>0$, $f_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$

$B(f_0,r)$, $B[f_0,r]$, $S(f_0,r)$ bulalım ve çizelim.

$B(f_0,r) = \{f \mid d(f,f_0) < r\}$

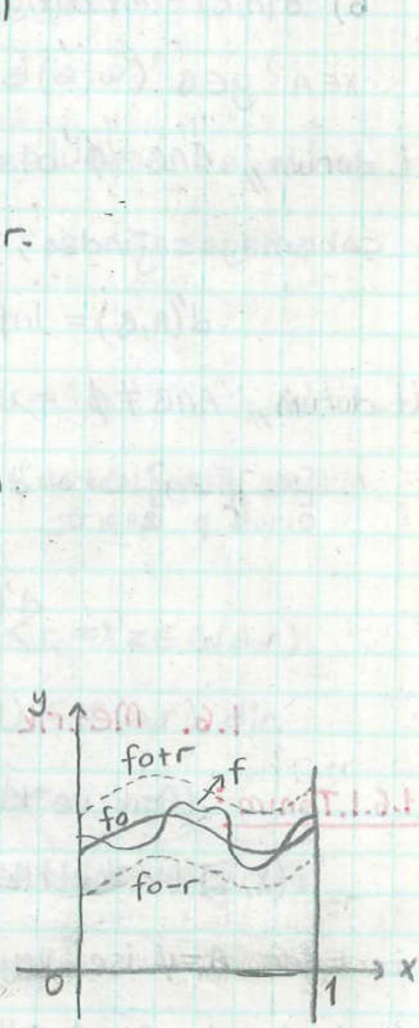
$= \{f \mid \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-f_0(x)| < r\}$

$\sup|f(x)-f_0(x)| < r$

$|f(x)-f_0(x)| \leq \sup|f(x)-f_0(x)| < r$

$\Rightarrow |f(x)-f_0(x)| < r \Rightarrow -r < f(x)-f_0(x) < r$

$\Rightarrow f_0(x)-r < f(x) < f_0(x)+r$



11/ S.4 - a) Bir $X$ kümesi ve onun üzerinde bir $d$ basit metriği veriliyor.

Eğer $P \in X$ ve $A, B \subset X$ ise $d(P,A)$ ve $d(A,B)$ yi bulunuz.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde $d'$ mutlak değer metriğini koyalım.

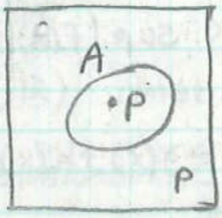
$A=[0,1]$ $B=[1,2]$ olduğuna göre $d'(A,B)$ yi bulunuz.

Eğer $d$, $\mathbb{R}$ üzerinde basit metrikse $d(A,B)$ yi bulunuz.

Çözüm// a) $d(P,A) = \inf\limits_{x \in A} d(P,x)$ (S.5 ve Tanım 1.5.2 den dolayı)

Not// $d$ basit metrik ise,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$




i - $P \in A$ ii - $P \notin A$

i) Eğer $P$ noktası $A$'nın içindeyse, $P$ ile $A$ noktaları çakışacağından

$$d(P,A) = \inf d(P,x) = 0$$

ii) $d(P,A) = \inf\limits_{x \in A} d(P,x) = 1$

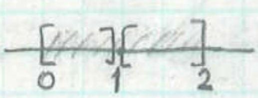
b) $d(A,B) = \inf d(x,y)$

$x \in A$ $y \in B$


i. durum// $A \cap B = \emptyset$ olacağından, $A$ ve $B$ nin noktaları hiçbir zaman çakışmayacağından,

$$d'(A,B) = \inf d(x,y) = 1$$

ii. durum// $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = \inf d(x,y) = 0$ $x \in A$ $y \in B$




$d(A,B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = 1 \quad A \cap B = \emptyset$

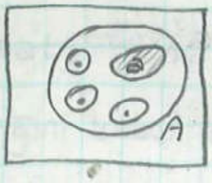
$$d'(A,B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} |x-y| = 0$$

## 1.6. Metrik Uzayın Topolojisi

**1.6.1. Tanım:** (Açık ve Kapalı Kümeler)

$(X,d)$ bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

Eğer $A=\emptyset$ ise veya her $a \in A$ için $B(a,r) \subset A$ olacak şekilde bir $B(a,r)$ $(r \neq 0)$ açık yuvarı varsa) Bu $A$ kümesine $X$'in bir açık alt kümesi denir.

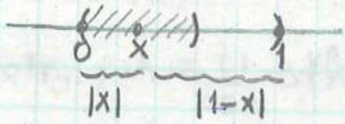


$(X,d)$

Örnek// $\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ $(0,1)$ açık aralığı açık kümedir. ?

$$B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\} \quad (X,d)$$
$$=\{x\in X \mid |a-x|<r\}$$
$$\Rightarrow a-r<x<a+r$$

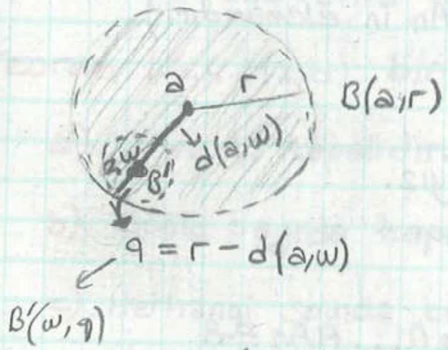
$p=\min(|1-x|,|x|)$



0 halde $(0,1)$ açık aralığı bir açık kümedir.

Teorem 1.6.1. $(X,d)$ bir metrik uzay ve $r>0$ olsun. Bu zaman her $a\in X$ için $B(a,r)$ açık yuvarı, bir açık kümedir.

İspat// $B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}$



$q=r-d(a,w)$

$B'(w,q)$

$\forall w\in B(a,r)$ alalım.

$\Rightarrow d(w,z)<q=r-d(a,w)$

$B(w,q)\subset B(a,r)$ olurmu bakalım.

$q=r-d(a,w)$

$\forall z\in B(w,q)$ olsun.

$z\in B(a,r)$ olduğunu göstereceğiz.

$d(a,z)\leqslant d(a,w)+d(w,z)$ — w merkezli açık yuvarın yarıçapı q dur.

$< d(a,w)+q$

$\leqslant \cancel{d(a,w)}+r-\cancel{d(a,w)} \Rightarrow d(a,z)<r \Rightarrow z\in B(a,r)$

$\Rightarrow B(w,q)\subset B(a,r)$ dir.

Not:

Uyarı // 0 halde her açık yuvar bir açık küme olur.

★ Teorem 1.6.2. $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler vardır.

a) $X$, $\emptyset$ açıktırlar.

b) Sonlu sayıda açık kümelerin arakesiti yine açıktır.

c) Herhangi sayıda açık kümelerin birleşimi yine açıktır.

İspat a// $\phi$, X açıktır ?

$\forall a \in X$ her $r>0$ için

$B(a,r) \subset X$ Her $x \in X$ ve $r>0$ reel sayısı için $B(x,r) \subset X$ olduğundan

X açıktır. $\phi$ ise kabulümüzden dolayı bir açık kümedir.

b// $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n tane açık küme olsun.

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$\forall z \in A$ alalım. $z \in A_1, z \in A_2, \ldots, z \in A_n$

$z \in A_1$ olduğundan öyle bir $\exists r_1 > 0$ sayısı vardır ki, $B(z,r_1) \subset A_1$

$z \in A_2$ olduğundan öyle bir $\exists r_2 > 0$ sayısı vardır ki, $B(z,r_2) \subset A_2$

$\vdots$

$z \in A_n$ olduğundan öyle bir $\exists r_n > 0$ sayısı vardır ki, $B(z,r_n) \subset A_n$

($B(z,r_n)$ : merkezi z, yarıçapı $r_n$ olan bir yuvar $A_n$ in elemanıdır.)

$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ olsun.

Elde edilen bu yuvarların en küçüğünü bulmalıyız.

$$\left.\begin{array}{l} B(z,r) \subset B(z,r_1) \subset A_1 \\ B(z,r) \subset B(z,r_2) \subset A_2 \\ \vdots \\ B(z,r) \subset B(z,r_n) \subset A_n \end{array}\right\} \Rightarrow B(z,r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = A$$

O halde bu arakesit (A) açıktır.

c// $(A_i)_{i \in I}$ X'deki açıkların bir ailesi olsun.

$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ A'da açıktır. ?

$\Rightarrow \exists i_0 \in I$ vardır ki, $x \in A_{i_0}$

$A_{i_0}$ açık olduğundan $\exists r>0 : B(x,r) \subset A_{i_0} \subset A$ olur.

O. halde A kümesi açıktır.

**Teorem 1.6.3.** (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın açık olması için gerekli ve yeterli koşul, X'deki bazı açık yuvarların birleşimi olarak yazılabilmesidir.

İspat// $\Leftarrow$: A'nın bir takım açık yuvarların birleşimi olarak yazılabildiğini kabul edelim. Her açık yuvar açık ve A herhangi sayıda açıkların birleşimi olacağından 1.6.1 ve 1.6.2. teoremlerinden dolayı A kümesi de açık olur.

$\Rightarrow$: A açık olsun. $\forall x \in A$ için $\exists r_x > 0$, $B(x, r_x) \subset A$

$\bigcup_{x\in A} B(x, r_x) \subset A$ ---- (1)

$\bigcup_{x\in A} B(x, r_x) \supset A$ ---- (2)

(1) ve (2) den dolayı, $A = \bigcup_{x\in A} B(x, r_x)$ olur.

Tanım 1.6.2 : $(X,d)$ bir metrik uzay ve $F \subset X$ olsun.

Eğer F kümesinin X'deki tümleyeni açıksa F'ye kapalıdır denir.

Örnek// $R - [a,b] = \underbrace{(-\infty, a) \cup (b, +\infty)}_{açık}$

$F = [a,b]$

Bu nedenle $[a,b]$ kapalı aralığı kapalı bir kümedir.

Teorem 1.6.4. $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Bu taktirde

a) X ve $\emptyset$ kapalıdır.

b) Sonlu sayıda kapalı kümelerin birleşimi kapalıdır.

c) Herhangi sayıda kapalı kümelerin arakesiti yine kapalıdır.

İspat// a- $\emptyset$ açık $\Rightarrow X - \emptyset = X$ kapalıdır.

Teorem 1.6.2 den dolayı, X açık $\Rightarrow X - X = \emptyset$ kapalıdır.

b- $F_1, F_2, ..., F_n$ n tane kapalı küme olsun.

$F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ de kapalıdır. ?

$X - F = X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} [X - F_i]$ (De Morgan Formülü kullanarak)

$\Rightarrow X - F$ açıktır $\Rightarrow F$ kapalıdır.

c- $(F_i)_{i\in I}$, X'in herhangi bir sayıda kapalılar ailesi olsun.

$F = \bigcap_{i\in I} F_i$ 'nin kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$X - F = X - \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X - F_i)$ açık ise

tümleyeni olan F kümesi kapalıdır.