ANALİZ

Babamın Anısına, Aileme...

ve Cengiz Hocam'a ...

Erhan GÜLER

- I. BÖLÜM -

Seriler Hakkında Genel Bilgiler

Seriye geçmeden önce diziyi hatırlayalım.

1.1. DİZİLER

TANIM 1.1.1

E boş olmayan bir küme ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow E$$
$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

fonksiyonuna bir dizi denir. Bu dizi $(a_n), (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ simgelerden biriyle gösterilir.

Örnek 1.1.1. $(a_n) = (n^2)$ dizisinin ilk dört terimini yazınız. $n \in \mathbb{N}^+$

Çözüm // $(n^2) = (\underline{1, 4, 9, 16}, \ldots, n^2, \ldots)$

Tanım 1.1.1 'de $E = \mathbb{R}$ alınırsa, diziye gerçel sayı dizisi denir.

TANIM 1.1.2.

(a_n) ve (b_n) iki dizi ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu dizilerin toplamını, farkını, çarpımını **ve** $b \neq 0$ olmak üzere bölümünü sırasıyla

i- $(a_n) \mp (b_n) = (a_n \mp b_n)$

ii- $(a_n) . (b_n) = (a_n . b_n)$

iii- $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$

iv- $c.(a_n) = (c.a_n)$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.2. $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ $c = 5$

$$c(a_n) = 5.\left(\frac{1}{n}\right) = 5\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$
$$= \left(5.1, 5.\frac{1}{2}, \ldots, 5\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

TANIM 1.1.3.

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, i- $a_n < a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine monoton artan ya da artan dizi,

ii- $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisine " azalan " azalan ",

iii- $a_n \leq a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine azalmayan dizi

iv- $a_{n+1} \leq a_n$ ise (a_n) dizisine artmayan dizi denir.

Örnek 1.1.3. $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ artmayan dizi.

Örnek 1.1.4. $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisini araştırınız.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{azalandır.}$$

$A \subset \mathbb{R}$ olsun. $\forall x \in A$ için $|x| < M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa A kümesi sınırlıdır denir.

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir M gerçel sayısı varsa (a_n) dizisi üstten sınırlıdır denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $m \leq a_n$ olacak biçimde bir m gerçel sayısı varsa (a_n) dizisi alttan sınırlıdır denir.

M'ye dizinin bir üst sınırı, m'ye dizinin bir alt sınırı denir.

Dizi, hem alttan, hem üstten sınırlı ise sınırlı dizi denir.

$\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dizisi sınırlı bir dizi midir? $n \in \mathbb{N}^+$

$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$ dizinin tüm elemanları $]0, 1]$ aralığında olduğundan verilen dizi sınırlıdır.

TANIM 1.1.4.

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

1- $a_{n+1} - a_n = k$ ise diziye aritmetik dizi,

($k > 0$ ise artan, $k < 0$ ise azalan) k = ortak fark

2- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ ise diziye geometrik dizi,

($k > 1$ ise artan, $k < 1$ ise azalan) k = ortak çarpan

Aritmetik ve geometrik diziye en genel örnekler sırasıyla

$(a, a+k, a+2k, a+3k, \ldots, a+(n-nk), \ldots)$

$(a, ak, ak^2, ak^3, \ldots, ak^{n-1}, \ldots)$

$(1, 5, 9, 13, \ldots, 1+(n-1)4, \ldots)$

$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^{n-1}}, \ldots)$ $k = \frac{1}{3}$

TANIM 1.1.5.

(i) (a_n) üstten sınırlı bir dizi olsun. (a_n)'nin üst sınırlarının en küçüğüne, en küçük üst sınır denir ve EKÜS(a_n) ile gösterilir.

(ii) (a_n) alttan sınırlı bir dizi olsun. (a_n)'nin alt sınırlarının en büyüğüne, en büyük alt sınır denir ve EBAS(a_n) ile gösterilir.

EBAS = İnfumum EKÜS = supremum

Alıştırmalar

I- Aşağıdaki dizilerin eğer varsa EBAS ve EKÜS'lerini bulun.

a) (n) b) $(-n)$ c) $\left(\frac{1}{n}\right)$ d) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

II- a) (ak^{n-1}) dizisinin ilk n terim toplamının

$a.\frac{1-k^n}{1-k}$ olduğunu,

b) (n) dizisinin ilk n terim toplamının $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu,

c) $(2n-1)$ dizisinin ilk n terim toplamının n^2 olduğunu,

d) n^2 dizisinin ilk n terim toplamının $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğunu,

e) n^3 dizisinin ilk n terim toplamının $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler :

I- a) $(n) = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ $n \in \mathbb{N}$ EBAS $= 1$

b) $(-n) = (\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1)$ EKÜS $= -1$

c) $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ $[1, \frac{1}{2}]$ aralığındadır.

d) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\right)$

Bu dizinin elemanları $[-1, \frac{1}{2}]$ aralığındadır.

II- İspatı tümevarımla yapalım.

a) $(ak^{n-1}) = (a, ak, ak^2, \ldots, ak^{n-1}, \ldots)$

$n=1$ için doğrudur

$n=m$ için doğru olduğunu varsayalım.

$$a+ak+ak^2+\dots+ak^{m-1} = a.\frac{1-k^m}{1-k}$$

$$\overbrace{a+ak+ak^2+\dots+ak^{m-1}}+ak^m = a.\frac{1-k^m}{1-k}+ak^m$$

$$= \frac{a-ak^m+ak^m-ak^{m+1}}{1-k}$$

$$= a.\frac{1-k^{m+1}}{1-k} \quad m+1\in D_{//}$$

b) $(n)=(1,2,3,\dots,n,\dots)$

$$1+2+3+\dots+n \overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}$$

$n=1$ için doğrudur.

$n=m$ için $\frac{m(m+1)}{2}$ doğru kabul edelim.

$$1+2+3+\dots+m+m+1 = \frac{m.(m+1)}{2}+m+1$$

$$= \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad m+1\in D_{//}$$

c) $(2n-1)=(1+3+5+\dots+2n-1+\dots)$

$$1+3+5+\dots+2n-1 \overset{?}{=} n^2$$

$n=1$ için $1=1$ doğrudur.

$n=m$ için, $1+3+5+\dots+2m-1=m^2$ olsun.

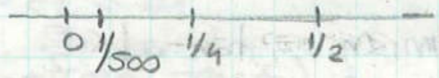
$$\underbrace{1+3+5+\dots+2m-1}_{m^2}+2m+1 = m^2+2m+1 = (m+1)^2$$

$m+1$ için verilen önerme doğru olduğundan tüm önerme doğrudur.

1.2. DİZİNİN LİMİTİ

Bir (a_n) dizisi ve $a\in\mathbb{R}$ verilmiş olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $m<n \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ olacak biçimde bir $\varepsilon>0$ sayısı varsa, (a_n) dizisinin limiti a'dır.

ya da, (a_n) dizisi $a\in\mathbb{R}$ sayısına yakınsar denir ve $\lim(a_n)=a$ ya da $n\to\infty$ iken $a_n\to a$ yazılır.

$\varepsilon = \frac{1}{500}$ olsun. 

$n \to \infty$ iken $500 < n$ için dizinin elemanları ile sıfır arasındaki fark $1/500$ den küçüktür. $m = 500$ dür.

Örnek 1.2.1. $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz.

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sıfıra çok yakın bir sayı ve $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ yazabiliriz.

$m = \frac{1}{\varepsilon}$ alınırsa, m den büyük n'ler için,

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ koşulu sağlanır.

$\varepsilon = \frac{3}{500}$ olsun. $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{500}{3}$ doğal sayı değildir. O halde ona yakın olan doğal sayıyı alırız.

Bir (a_n) dizisinin yakınsak alt dizilerinin limitleri sonlu sayıda ise bunların en küçüğüne dizinin alt limiti, en büyüğüne de dizinin üst limiti denir.

alt limit : $\underline{\lim}$, üst limit : $\overline{\lim}$

alt limit : limit inferior , üst limit : limit superior

$\underline{\lim}\,(a_n) = \lim\inf (a_n)$, $\overline{\lim}\,(a_n) = \lim\sup (a_n)$

TANIM 1.2.2.

Limiti var olan (a_n) dizisinin, bir ve yalnız bir limiti varsa bu diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye de ıraksak dizi denir.

(a_n) dizisinin yakınsak olması için alt ve üst limitleri eşit olmalıdır.

$$\underline{\lim}\,(a_n) = \overline{\lim}\,(a_n) \iff \text{yakınsak } (a_n)$$

Teorem 1.2.1. $a_n \to a$, $b_n \to b$, $r \in \mathbb{R}$ ise

i) $a_n \mp b_n \to a \mp b$

ii) $r a_n \to r a$

iii) $a_n . b_n \to a . b$

iv) $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ $\quad b \neq 0$

v) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ $\quad b \neq 0$

İspat// i) $a_n \to a$ demek, $m_1 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde $m_1 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var demektir.

$b_n \to b$ olması demek, $m_2 < n \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde

$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

$\max(m_1, m_2) = m$ olsun.

$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Demek ki,

$m < n \Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$

$n \to \infty$ iken $a_n + b_n \to a + b$

İspat ii) $a_n \to a \Rightarrow r a_n \to r a$ dır. ?

$a_n \to a$ olması demek,

$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|r|}$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ sayısı var demektir.

$|r a_n - r a| < \varepsilon$?

$m < n \Rightarrow |r a_n - r a| = |r(a_n - a)| = |r||a_n - a| < \cancel{|r|} \frac{\varepsilon}{\cancel{|r|}}$

$\Rightarrow |r a_n - r a| < \varepsilon$

$n \to \infty$ iken $r a_n \to r a$

Teorem 1.2.2. Azalmayan (artmayan) bir (a_n) dizisi üstten (alttan) sınırlı ise limiti vardır ve

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \text{EKÜS}(a_n)$, $\left(\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \text{EBAS}(a_n)\right)$ dir.

İspat// $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ dizisi üstten sınırlı olduğundan a_n dizisinin EKÜS'ü vardır. $\text{EKÜS}(a_n) = a$ olsun.

Bu durumda, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ dır. Neden?

$\varepsilon > 0$ olmak üzere $a - \varepsilon < a$ dır. Eğer, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a - \varepsilon$ olsaydı, $\text{EKÜS}(a_n) = a - \varepsilon$ olurdu.

Eğer $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a + \varepsilon$ olsaydı, $\text{EKÜS}(a_n) = a + \varepsilon$ olurdu.

$\Rightarrow m < n \Rightarrow a_n - a < \varepsilon$

$\leq \dots a_n \leq \dots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$

Teorem 1.2.3. (Karşılaştırma Test):

$a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \leq b_{n+1}$ ve $a_n \leq b_n$ olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri verilsin. (b_n) yakınsak ise (a_n) de yakınsaktır.

İspat // (b_n) dizisi yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow (a_n)$ dizisi sınırlıdır. (yakınsak)

$\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$a_{n+1} \leq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$ ve $a_n \leq b_n$ olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri verilmiş olsun. Eğer (a_n) yakınsak ise (b_n) de yakınsaktır. (Azalan bir dizi alttan sınırlı ise yakınsaktır.)

(İkisi de artan (azalan) dizi varsa; küçüğü yakınsak ise büyüğü de yakınsaktır.)

TANIM 1.2.3

(a_n) bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$\mathbb{N}_\varepsilon < m,n \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\mathbb{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, a_n dizisine CAUCHY DİZİSİ denir.

- $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{500}$ $\quad m = 510$ $\quad n = 520$

  $a_m = \frac{1}{510}$ $\quad a_n = \frac{1}{520}$ $\quad \left|\frac{1}{510} - \frac{1}{520}\right| < \frac{1}{500}$

- $\varepsilon = \frac{3}{500}$ $\quad \mathbb{N}_\varepsilon = ?$

  $\mathbb{N}_\varepsilon = 167$ $\quad m = 167$ $\quad n = 500$ $\quad a_m - a_n < \varepsilon$ olmalıdır.

  $|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{167} - \frac{1}{500}\right| < \frac{3}{500}$

SORU // Yakınsak her dizi cauchy dizisidir. Kanıtlayınız.

Çözüm // (a_n) yakınsak olsun.

$m_1 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir m_1 doğal sayısı var.

$m_2 < n \Rightarrow |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir m_2 doğal sayısı var.

$\max(m_1, m_2) = \mathbb{N}_\varepsilon$ olsun.

$|a_m-a_n| = |a_m - a - a_n + a| = |(a_m-a)+(a_n-a)| \leq \underbrace{|a_m-a|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{|a_n-a|}_{\varepsilon/2}$

$\Rightarrow \mathbb{N}_\varepsilon < m,n \Rightarrow |a_m-a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{N}_\varepsilon < m,n \Rightarrow |a_m-a_n| < \varepsilon \Rightarrow$ yakınsak her dizi cauchy dizisidir.

Alıştırmalar

1- Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-4}{2n+5}\right)^3$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2+2n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+3+\cdots+2n-1}$

2- $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$

3- $a_n \to \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (2a_n^2 - 3a_n + 1) = ?$

4- $a_n \to 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^3 - 3a_n^2 - 2}{4a_n^2 + 4a_n + 1} = ?$

5- $(a_n) = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}, \ldots, a_n, \ldots\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

6- $a_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

7- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ dır. Kanıtlayınız.

8- Aşağıdaki dizilerin monoton artan ya da monoton azalan olup olmadıklarını araştırınız.

a- $(a_n) = \frac{1}{n!}$ b- $(a_n) = \log\left(\frac{3}{4}\right)^n$ c- d- $(a_n) = \frac{1}{n(n+1)}$

9- Aşağıdaki dizilerin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

a) $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n \cdot n}{a_{n+1}}\right)$ b) $(a_n) = (-1)^n$ c) $(a_n) = \frac{1}{3^n - n}$

Çözümler :

11.10.94
SALI

3- $a_n \to \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} + 1 = \frac{1-3+2}{2} = 0$ //

4- $a_n \to 2 \Rightarrow \frac{8-12-2}{16+8+1} = -\frac{6}{25}$ //

5- $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}, \dots, a_n = ?$

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

$n > 1 \Rightarrow a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}\ ,\ n \in \mathbb{N}^+$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oldvgunu varsayalım.

$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$ dır.

$$a = \sqrt{1+a} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

$$\cancel{\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \ //$$

6- $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \ //$$

7- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ dır. ?

$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı var.

$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ idi.

$m < n \Rightarrow ||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow m < n \Rightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon$ olacak şekilde m sayısı vardır.

Böylece ispat tamanlanmış olur.

8- a) $a_{n+1} - a_n = ?$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

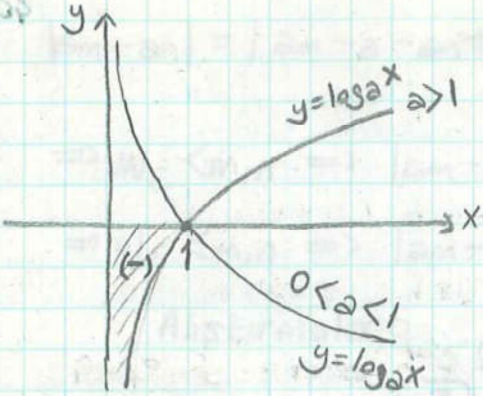
$-$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{o halde artandır.}$$

b) $$a_{n+1} - a_n = \log\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \log\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= (n+1)\log\left(\frac{3}{4}\right) - n\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\frac{3}{4} < 0$$

o halde azalan bir dizidir.



$a>1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ $\qquad \log 1 = 0$

$0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

$0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to \infty} \log_a x = -\infty$

SORU // Genel terimi $a_n = (-1)^n$ olan dizinin yakınsak veya ıraksak olduğunu araştırınız.

$n=2k$ ise (bu dizinin iki alt dizisi vardır.)

$(a_n) = (a_{2k}) = (1,1,1,\dots)$

$n=2k-1$ ise $(a_n) = (a_{2k-1}) = (-1,-1,-1,\dots)$ (bir tane alt dizisi vardır.)

$\underline{\lim}(a_n) = -1$, $\overline{\lim}(a_n) = 1 \Rightarrow \underline{\lim}(a_n) \neq \overline{\lim}(a_n)$ olduğundan yakınsak değildir.

SORU // $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n n}{10n+1}\right)$

$n=2k$ ise $(a_n) = (a_{2k}) = \left(\frac{2k}{20k+1}\right)$

$n=2k-1$ ise $(a_n) = (a_{2k-1}) = \left(\frac{-2k+1}{20k-9}\right)$

$\overline{\lim}(a_n) = \frac{1}{10}$ $\quad \underline{\lim}(a_n) = -\frac{1}{10}$ $\quad$ yakınsak değildir.

SORU // $(a_n) = \left(\frac{1}{3^n - n}\right)$ yakınsak mıdır?

$(b_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ olsun. $(a_n) \geqslant (b_n)$

$b_{n+1} \leqslant b_n$, $a_{n+1} \leqslant a_n$

$3^{n+1} - (n+1) > 3^n - n \quad , n>1$

$\Rightarrow 3^n 3 - 3^n > 0$

$\Rightarrow 3^n(3-1) > 1 \Rightarrow 3^{n+1} > 3^n + 1$

$\Rightarrow 3^{n+1} - 1 > 3^n \Rightarrow 3^{n+1} - n - 1 > 3^n - n$

(a_n) ve (b_n) azalandır. limiti vardır ve yakınsaktır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$b_{n+1} \leqslant b_n$, $a_{n+1} \leqslant a_n$, $b_n \leqslant a_n$

1.3. SERİLER

$\forall (a_k)$ dizisine, terimleri ;

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad ---- (1,3,1)$$

eşitliği ile tanımlanan bir (S_n) dizisi karşılık getirilebilir.

(S_n) dizisine (a_k)'nın kısmî (parçalı) toplamlar dizisi diyeceğiz.

Burada,

$S_1 = a_1$, $S_2 = S_1 + a_2$, $S_3 = S_2 + a_3$, ..., $S_n = S_{n-1} + a_n$, --- (1,3,2) dir.

Örnek 1.3.1. $(a_n) = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ dizisi için kısmî toplamlar dizisinin ilk dört terimini bulunuz.

Çözüm // $(a_n) = \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} \qquad S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4} \qquad S_4 = S_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

---- $S_n = \frac{n}{n+1}$ // dir. Veya,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad //$$

TANIM 1.3.1

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad ---- (1.3.3)$$

toplamına sonsuz seri denir.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olmak üzere (S_n) dizisine (1.3.3) serisinin n. basamakta, kısmî (parçalı) toplamlar dizisi, a_n'e de (1.3.3) serisinin genel terimi denir.

TANIM 1.3.2

Eğer (1.3.3) (S_n) dizisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine yakınsak seri denir. Bu taktirde,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\dots+a_n+\dots = S \text{ yazılır.}$$

(S_n) dizisinin limiti olan sonlu ve belirli bu S sayısına, serinin toplamı ya da değeri denir.

Eğer (S_n) ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek 1.3.2.

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ yakınsak olup olmadığını araştırınız.

$$(a_n)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \qquad S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots = 2$$ yakınsaktır. Limiti sonlu ve belirli sayıdır.

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow S_n = 1-\frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots = 1$$

Örnek 1.3.3. Harmonik seri denen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Çözüm// $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$

$$1+\frac{1}{2} > 2^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 2^1 \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

(yukarıdan sınırlı artan bir dizi yakınsaktır.)

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 2^2 \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16} > 2^3 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-2}+2}+\dots+\frac{1}{2^m} > 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$$

+ ______________________________

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^m} > m-\frac{1}{2} \Rightarrow S_{2^{m+1}} > m-\frac{1}{2}$$ olduğundan

seri ıraksaktır.

(Bir serinin karakterini bulmak demek, yakınsak veya ıraksak olduğunu göstermek demektir.)

Teorem 1.3.1. Bir serinin yakınsak olması için, serinin genel teriminin $n \to \infty$ için sıfıra yaklaşması gerekir fakat yetmez.

ispat// $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi yakınsak olsun.

Bu taktirde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. Gösterelim.

(Seri yakınsak ise kısmî toplamlar dizisinin limiti vardır.)

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dir.

$$S_n = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}^{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \qquad a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$ gereklik //

yetmezlik // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinde genel teriminin limiti sıfırdır.

Ama yakınsak değildir.

(Bir seri verildiğinde genel terim, sıfıra yaklaşıyorsa yakınsak veya ıraksaktır; sıfıra yaklaşmıyorsa ıraksaktır.)

Örnek 1.3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-7}{8n-1}$ ıraksak mıdır?

Genel terimin limiti ~~0~~ değildir. $\frac{5}{8}$ olduğu için ıraksaktır.

sıfır değildir.

Teorem 1.3.2. Bir seride baş taraftan sonlu sayıda terim atılırsa (kaldırılırsa) serinin karakteri değişmez.

ispat// $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n + \dots \quad \dots (1.3.4)$

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{k+p} = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots \quad \dots (1.3.5)$$

(1.3.4) serisi yakınsak olsun. Bu taktirde (1.3.5) serisi de yakınsaktır. (i)

Gösterelim.

(1.3.4) serisinin p. basamaktan kısmi toplamlar dizisi (S_p) olsun.

$S_p = S_k + S_{k+p}$ $\qquad k+p=n$

$\lim\limits_{p\to\infty} S_p = \lim\limits_{p\to\infty} (S_k + S_{k+p})$ $\quad - \quad S_{k+p} = S_p - S_k$

$\lim\limits_{p\to\infty} S_{k+p} = \lim\limits_{p\to\infty} (\overset{\text{sonlu bir sayı}}{S_p - S_k}) = S - S_k =$ sonlu bir sayı

O halde (1.3.5) de ıraksaktır.

TANIM 1.3.3.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde baştan k tane terimin kaldırılmasıyla elde edilen

$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots \qquad \ldots$ (1.3.6)

serisine, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin k. basamaktan (mertebeden) kalanı denir.

Teorem 1.3.3. Yakınsak bir seride k. mertebeden kalan, $k\to\infty$ (k sonsuz) için sıfırdır.

ispat// $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots + a_n + \ldots$ serisi yakınsak olsun.

Bu; toplamın S olması demektir.

$S = S_k + r_k \Rightarrow r_k = S - S_k$

$\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \lim\limits_{k\to\infty} (S - S_k) = S - S = 0$ dır. //

Teorem 1.3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$ için,

(Her iki serinin toplamı olduğu için yakınsaktır.)

i- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n) = s \mp t$

ii- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c.s$ $, c\in\mathbb{R}$ (c, sonlu ve belirli bir sayı)

ispat// (i) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = s_n + t_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t$ //

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} c.a_k = c.s_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c a_k = \lim\limits_{n\to\infty} c.s_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} s_n = c.s$ //

1.4. Pozitif Terimli Seriler

Bütün terimleri pozitif olan serilere pozitif terimli seri denir. Bütün terimleri pozitif olan seriler de pozitif terimli serilere katılır. ($+ + - + \ldots \underline{+ + + -}$; Sonlu sayıda $+ - + - - - \ldots$ terim atılırsa serinin karakteristiği değişmez ve yine pozitif terimli seridir.)

Pozitif terimli seride ; $S_{n+1} > S_n$ dir. ......(1.4.1)

Teorem 1.4.1. Pozitif terimli iki seri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \ldots\ldots\ldots (1.4.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \ldots\ldots\ldots (1.4.3)$$

olsun.

1- Eğer belli bir terimden itibaren daima $a_n < b_n$ ve (1.4.3) serisi yakınsak ise (1.4.2) serisi de yakınsaktır.

2- Eğer belli bir terimden itibaren daima $b_n < a_n$ ve (1.4.3) serisi ıraksak ise (1.4.2) serisi de ıraksaktır.

İspat 1// $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli serinin n. basamaktan parçalı toplamlar dizisi (t_n) olsun.

Bu dizi artan dizi ve yukarıdan sınırlıdır. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serinin n. basamaktan parçalı toplamlar dizisi (s_n) olsun. Bu dizi de artan dizidir. Belli bir terimden itibaren daima $a_n < b_n$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} S_n < \lim_{n\to\infty} t_n$ dir. Yani kısmî toplamlar dizisi artan dizidir ve yukarıdan sınırlı olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli seri yakınsaktır.

İspat 2// $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli serisi ıraksak olduğundan bunun n. basamaktan parçalı (t_n) dizisi artandır ve yukarıdan sınırlı değildir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serinin (S_n) parçalı toplamlar dizisi artandır ve belli bir terimden itibaren daima $b_n < a_n$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} t_n < \lim_{n\to\infty} S_n$ dir. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek 1.4.1 Genel terimleri $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{n^n}$ olan serilerin karakterini bulunuz.

Çözüm// $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1 \quad a_n \text{ yakınsaktır.}$$

$n>2$ için $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ dir. $n \in \mathbb{N}^+$. b_n de yakınsaktır.

($a_n > b_n$ olduğu için ; a_n yakınsak olduğundan b_n de yakınsaktır.)

Örnek 1.4.2. Genel terimi $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ olan serinin karakterini bulunuz.

Çözüm// $n>1$ için $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğu için bundan büyük olan a_n serisi de ıraksaktır.

Teorem 1.4.2. (CAUCHY (KÖK) KURALI)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli seride herhangi terimden itibaren daima $\sqrt[n]{a_n} < k < 1$ ($k \in \mathbb{R}^+$) ise seri yakınsak, eğer $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ise seri ıraksaktır.

İspat// $\sqrt[n]{a_n} < k \Rightarrow a_n < k^n$ olur.

Genel terimi; $\sum_{k=1}^{\infty} k^n = k + k^2 + k^3 + \dots + k^n + \dots$ k olan geometrik seridir.

$S_n = k \frac{1-k^n}{1-k}$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{k}{1-k}$ sonlu ve belirli bir sayı olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty} k^n$ serisi yakınsaktır. Eğer $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ise seri ıraksaktır.

Bu teorem aşağıdaki kuralı verir.

CAUCHY KURALI

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

1- $L<1$ ise seri yakınsak,

2- $L>1$ ise seri ıraksak,

3- $L=1$ ise şüpheli durum verdir. (Ancak L limiti 1'e büyük değerlerle yaklaşıyorsa, serinin ıraksaklığına hüküm verilebilir.)

Teorem 1.4.3. (D'ALEMBERT = BÖLÜM KURALI)

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde belli bir terimden itibaren daima $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$ ise verilen seri yakınsak; eğer, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ise verilen seri ıraksaktır. ($k \in \mathbb{R}^+$)

İspat// $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k \Rightarrow a_{n+1} < a_n k$ olur.

$$n=1 \Rightarrow \quad a_2 < a_1 k$$
$$a_3 < a_2 k$$
$$a_4 < a_3 k$$
$$\vdots$$
$$\times \quad a_n < a_{n-1} k$$
$$\overline{a_n < a_1 k^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 k^{n-1}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ise seri ıraksaktır. $a_{n+1} \geq a_n$

D'ALEMBERT KURALI

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.

1- $L<1$ ise seri yakınsaktır.

2- $L>1$ ise seri ıraksaktır.

3- $L=1$ ise şüpheli durum var. (Limiti olan L, eğer 1'e, 1'den büyük değerlerle yaklaşıyorsa ıraksaklığına hüküm verilebilir.)

Örnek 1.4.3. Genel terimleri $a_n = \alpha^{\frac{n^2}{2n+1}}$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dan serilerin karakterini bulunuz.

Çözüm a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^{\frac{n^2}{2n+1}}} = \alpha^{1/2} = \sqrt{\alpha}$

i. $\alpha < 1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır.

ii. $\alpha > 1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

iii. $\alpha = 1 \Rightarrow$ seri yine ıraksaktır.

Çözüm b) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\alpha^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\alpha^n} = \alpha$

$\alpha < 1$ ise seri yakınsaktır. (negatif değil)

$\alpha > 1$ ise seri ıraksaktır.

$\alpha = 1$ ise $b_n = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ Genel terim, limit ≤ 1 olmadığı için seri yine ıraksaktır.

$\alpha < 1 \Rightarrow$ yakınsak, $\alpha \geq 1$ ise ıraksaktır.

Teorem 1.4.4. (RAABE KURALI)

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{1}{n}} = L$ olsun

1- $L > 1$ ise seri yakınsak,

2- $L \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

Teorem 1.4.5. (İNTEGRAL TESTİ)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli ve monoton azalan seri, $f(x)$ ise $1 \leq x$ için monoton azalan bir pozitif fonksiyon ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = a_n$ olsun. Bu taktirde,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul, $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$ integrel değerlerinin sınırlı bir dizi oluşturmasıdır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad I_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$

serisi ıraksaktır.

Teorem 1.4.6. (Gauss Yakınsaklık Testi)

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{w_n}{n^p}$, $p > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|w_n|$ sonlu bir sayıdır. $|w_n| < A$

1- $a > 1$ ise seri yakınsaktır.

2- $a \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

Örnek 1.4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serisinin karakterini bulunuz.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/n^3}{1/(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3}{n^3}$

$= \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} = 1+\frac{3}{n}+\frac{3n+1}{n^3}$ $\quad a=3>1$ yakınsaktır.

Teorem 1.4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ serisi (hiper harmonik serisi), $\alpha>1$ ise yakınsak, $\alpha \leq 1$ ise ıraksaktır.

İspat,, $\alpha=1$ için verilen seri harmonik seri olacağı için ıraksaktır.

$\alpha<1$ ise $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^{\alpha}}$ olacağından seri yine ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$$

$$1=1 \longrightarrow \frac{1}{2^{0(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} < 2^1 \frac{1}{2^{\alpha}} = \frac{1}{2^{1(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} < 2^2 \frac{1}{2^{2\alpha}} = \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{8^{\alpha}} + \frac{1}{9^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{15^{\alpha}} < 2^3 \frac{1}{2^{3\alpha}} = \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{m\alpha}} + \frac{1}{(2^m+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(2^m+2)^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^{\alpha}} < 2^m \frac{1}{2^{m\alpha}} = \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$$

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^{\alpha}} < \frac{1}{2^{0(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{1(\alpha-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafı, ortak çarpanı $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ olan geometrik serinin (m+1). inci kısmi toplamı,

$$S_{m+1} = 1\,\frac{\left(1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} \qquad \alpha-1>0, \ \alpha>1 \text{ ise}$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{m+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$ sağ taraf yakınsak olduğundan bundan küçük olan sol taraf da yakınsaktır.

($\frac{1}{n^{\alpha}}$ da yakınsaktır.)

Örnek 1.4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ serisinin karakterini bulunuz.

$4n^2-2n > n^2$? $\qquad \frac{1}{2n(2n-1)} \overset{?}{<} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan verilen

$1 \leq n$ için $3n^2-2n>0$ $\qquad$ bu seri yakınsaktır.

$4n^2-2n>n^2$

Alıştırmalar

1- Aşağıda genel terimleri verilen serilerin karakterlerini bulunuz.

a) $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ b) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ c) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

d) $a_n = 2.3^{n-1}$ e) $a_n = \frac{1}{n^3}$ f) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

g) $a_n = \frac{1}{k+n^2}$, $k>0$ h) $a_n = \frac{1}{3n}$ i) $a_n = \frac{2^n}{n^3+1}$ j) $a_n = \frac{10^n}{n!}$

k) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$ l) $a_n = \frac{k^n}{n^n}$, $k>0$, m) $a_n = n^k.p^n$, $p>0$, k keyfi

n) $a_n = \frac{p^n}{n!}$, $p>0$ o) $a_n = \frac{3n+5}{n+1}$ p) $a_n = \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$

r) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ s) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ t) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ u) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

2- Aşağıdaki genel terimleri verilen serilerin karakterlerini ve yakınsak olanların toplamlarını bulunuz.

a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ b) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ c) $a_n = \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$ $p>0$

d) $a_n = \frac{1}{(n+3)^2-2^2}$ e) $a_n = \frac{1}{(n+1)^2-\frac{1}{4}}$

Çözümler

1- a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}} = \frac{1}{3} < 1$ yakınsak //

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2/3)^{n+1}}{(2/3)^n} = \frac{2}{3} < 1$ yakınsak //

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4/5)^{n+1}}{(4/5)^n} = \frac{4}{5} < 1$ yakınsak //

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2.3^n}{2.3^{n-1}} = 3$ ıraksak.

g) yak. h) ıraksak.

k) $\frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak // $(\alpha>1)$

t) $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ıraksak.

u) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n.n^2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak. $\alpha>1$ ol. için.

1.5. Herhangi Terimli Seriler

TANIM 1.5.1

Sonsuz sayıda pozitif ve sonsuz sayıda negatif terim kapsayan serilere herhangi terimli seri denir. Böyle bir serinin incelenmesinde üç durum karşımıza çıkar.

1. durum, Salt (Mutlak) yakınsaklık.
2. durum, Yarı yakınsaklık.
3. durum, Iraksaklık.

1. DURUM: Eğer bir serinin terimlerinin salt değerleriyle oluşturulan seri yakınsak ise böyle seriye salt yakınsak seri denir.

Teorem 1.5.1 Bir seri salt yakınsak ise herhangi terimli seri de yakınsaktır.

İspat//

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{----} (1.5.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad \text{----} (1.5.2)$$

(1.5.3)...(1.5.1) deki, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dir. (n. basamakta kısmi toplam)

(1.5.4)...(1.5.2) deki, $q_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ dir. (" " " ")

$S_n = P_n - q_n$ (kısmî toplamdır.)

n. basamakta kısmî toplam $\Rightarrow q_n = P_n + q_n$ dir.

$\lim_{n \to \infty} q_n = q$ olsun. Her terim pozitif olduğundan (q_n) artan bir dizidir. O halde (1.5.2), q den küçüktür.

$P_n + q_n \leq q$ yazılabilir. $\overset{\forall n \in \mathbb{N} \text{ için}}{\Rightarrow}$ $P_n < q$ ve $q_n < q$ yazılabilir.

O halde, P_n ve q_n dizileri yukarıdan sınırlıdır. (Pozitif ve artan diziler) P_n ve q_n yakınsak dizilerdir.

$\lim_{n \to \infty} P_n = P$, $\lim_{n \to \infty} q_n = q$, ($P$ ve q sonlu sayılardır.)

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (P_n - q_n) = P - q$ olur. (Bu da yakınsak bir seridir.)

2. DURUM: Yarı Yakınsaklık: Eğer bir seri, salt yakınsak olmadığı halde yakınsak ise, böyle serilere yarı yakınsak seri denir.