ANALİTİK GEOMETRİ

Babamın Anısına, Aileme...

ve Cengiz Hocam'a...

Erhan GÜLER

– MATRİSLER –

Tanım 1.1.1. $m,n \in N$ $1 \leq i \leq m$ $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i,j) çiftlerinin kümesi

$A = N \times N$ olsun. Bir K cisminde değerler olan A'daki bir $f: A \to K$ fonksiyonu

$(i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$ biçiminde tanımlayalım. $a_{ij} \in R$ elemanlarını

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{--------} \; (1,1)$$

biçiminde düzenlenen K'dan seçilen bu cins mn tane elemanın (1,1) deki dikdörtgensel biçiminde A tablosuna K cismi üzerinde $m \times n$ tipinde matris denir.

$\forall (ij)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ çiftlerine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (ij) elemanı (bileşeni) denir.

(ij) çifti matrisin elemanlarının bir alt indisidir. Bu çift elemanın bulunduğu satır numarasını (alt indisin) i'n, birincisi elemanın içinde bulunduğu satırı, ikincisi de elemanın içinde bulunduğu sütunu (kolonu) gösterir. m satırlı, n sütunlu bir matrise $m \times n$ mertebedendir denir.

Örnek 1.1.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad \begin{matrix} (1,3) \\ (3,2) \\ (2,3) \end{matrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & \end{bmatrix}$$

(1,1) tablosunda eğer $m = n$ ise A matrisi karesel matristir. Ya da $m \times n$ mertebeden n-karesel matristir.

(1,1) tablosundaki A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.2 Bir kare matriste $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına onun köşegen (diagonal) elemanları, köşegen elemanlarının toplamına da matrisin izi denir. Yani

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ ise } \quad iz A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \quad \text{-----} \; (1,2)$$

Örnek 1.1.2 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}_{3x3}$ $iz B = ?$ $iz B=\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 1+5+9 \Rightarrow$

$iz B = 15$ //

Tanım 1.1.3 Mertebesi aynı olan $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ mxn matrislerinde eğer $\forall (i,j)$ çifti için $a_{ij}=b_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$ ise bu iki matrise eşittir denir ve $A=B$ yazılır.

Tüm elemanları sıfır olan matrise sıfır matris denir.

A mxn mertebeden sıfır matrisi ise kısaca, $A=0_{m\times n}$ yazılır.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

1.2 Matrislerin Toplamı ve Bir Matrisin Skalar ile Çarpımı :

Tanım 1.2.1 mertebesi mxn olan ve bileşenleri bir K cisminden seçilen bütün matrislerin kümesi K_n^m olsun.

(Matrislerde Toplama) $+ : K_n^m \times K_n^m \rightarrow K_n^m$.

$$([s_{ij}]_{m\times n},[t_{ij}]_{m\times n}) \rightarrow +([s_{ij}]_{m\times n},[t_{ij}]_{m\times n}) = [s_{ij}+t_{ij}]_{m\times n}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 1.2.1 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}_{2x3}$ $B=\begin{bmatrix}7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix}_{2x3}$ $A+B=\begin{bmatrix}8&10&12\\14&16&18\end{bmatrix}_{2x3}$

$c\in K$, $T\in K_n^m$ olsun. Matrisin bir skalar ile çarpımı

$$\odot : K\times K_n^m \longrightarrow K_n^m$$

$c, [t_{ij}]_{m\times n} \rightarrow c[t_{ij}]_{m\times n} = [ct_{ij}]_{m\times n}$ biçiminde tanımlanır.

Örnek 1.2.2 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow 5A=\begin{bmatrix}5&10&15\\20&25&30\end{bmatrix}_{2x3}$

$A-B=A+(-1)B$

Teorem // 1.2.1. Herhangi $A,B\in K_n^m$ matrisleri ve, herhangi $k_1,k_2\in K$ skaları için,

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$

2. $A+0 = 0+A = A$

3. $A+(-A) = 0$

4. $A+B = B+A$

5. $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$

6. $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$

7. $1.A = A$ ve $0.A = 0$

8. $(k_1.k_2)A = k_1(k_2A)$

9. $\underset{\text{sayı}}{0}.\underset{\text{matris} \in K_n^m}{0} = 0 \in K_n^m$ dır.

1.3 Matris Çarpımı :

Tanım iki matris genel olarak çarpılamaz.

Çarpma işlemi aşağıdaki tanıma göre yapılır:

Tanım 1.3.1 ~~iki ma~~

$$(\cdot) : K_n^m \times K_p^n \longrightarrow K_p^m$$

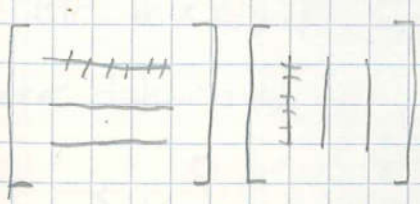
$$[s_{ij}]_{m\times n}, [t_{jk}]_{n\times p} \longrightarrow [s_{ij}]_{m\times n} \cdot [t_{jk}]_{n\times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk}\right]_{m\times p}$$

$$1 \leq i \leq m \quad , 1 \leq k \leq p$$

$$S.T = U \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2p} \\ \vdots & & & \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

$l \leq m$, $r = p$ $\quad (l,r) \quad u_{lr} \overset{\text{satır kolon}}{=} \sum_{j=1}^{n} s_{lj} t_{jr} = s_{l1} t_{r1} + \cdots + s_{ln} t_{nr}$

$$\begin{bmatrix} s_{11}t_{11} + s_{12}t_{12} + \cdots + s_{1n}t_{n1} & s_{11}t_{12} + s_{12}t_{22} + \cdots + s_{1n}t_{n2} \quad s_{n1}t_{1p} + s_{n2}t_{2p} + \cdots + s_{1n}t_{np} \\ \vdots & \\ s_{m1}t_{11} + s_{m2}t_{21} + \cdots + s_{mn}t_{n1} & s_{m1}t_{1p} + s_{m2}t_{2p} + \cdots + s_{mn}t_{np} \end{bmatrix}$$



11	12	13
21	22	23
31	32	33

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad A.B \text{ tanımsız.}$$

$$2 \neq 3$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Genellikle $AB \neq BA$ dır.

TEOREM 1.2.2

1- $(AB)C = A(BC)$

2- $A(B+C) = AB+AC$

3- $(B+C)A = BC+CA$

4- $k.(AB) = (kA)B = A(kB)$ dir.

İspat// $AB = S = [s_{ij}]_{n\times p}$

$BC = T = [t_{jr}]_{n\times q}$

$s_{ik} = \sum_{d=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad t_{jr} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kr}$

Lineer Cebir 26//

Uyarı : Genellikle

1- $AB \neq BA$

2- $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ya da $B = 0$ elemanını gerektirmez.

3- $AB = AC \Rightarrow B = C$ olmasını gerektirmez.

1-4. Kısımlara Ayırarak Çarpma :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

A.B tanımlı

$$A = \begin{bmatrix} m_1 \times p_1 & m_1 \times p_2 & m_1 \times p_3 \\ m_2 p_1 & m_2 p_2 & m_2 p_3 \\ m_3 \times p_1 & m_3 p_2 & m_3 \times p_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} p_1 \times q_1 & p_1 \times q_2 \\ p_2 \times q_1 & p_2 \times q_2 \\ p_3 \times q_1 & p_3 \times q_2 \end{bmatrix}$$

Örnek 1:4.1 :

2 1 0   1

3 2 0

1 0 1

K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane doğrusal denklem sistemi genel olarak,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $1 \leq i \leq m$ biçiminde gösterilir. Burada,

x_j'ler, $1 \leq j \leq n$ bilinmeyenleri a_{ij}'ler, $1 \leq i \leq m$, $m.n$ tane katsayıları gösterirler. b_i'ler de bilinen sayıları gösterirler.

(1,5) sistemini açık olarak yazarsak

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_{mn} = b_m \end{array}\right\} (1,6)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

(1,6) denklem sistemine n bilinmeyenli m tane homojen olmayan doğrusal denklem sistemi denir. Eğer bütün b_i'ler $1 \leq i \leq m$ sıfır ise o zaman (1,6) denklem sistemine n bilinmeyenli m tane homojen doğrusal denklem sistemi denir.

1.5. Birim Matris ve Bazı Matris Tipleri =

Tanım 1.5.1 Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ mertebeli n karesel matrise birim matris denir.

I_n ile gösterilir. Yani,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ dir.}$$

Bir $m \times n$ mertebeden birim matrisin elemanları bazen δ_{ij} (kronecker deltası) ile gösterilir. Yani $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olarak tanımlanır.} \quad (1,7)$$

Herhangi $A \in K_n^m$ matrisi için

$$I_m A = A I_n \quad \text{------}(1,8) \quad \text{dir.}$$

- $I_m A$ çarpım matrisinin $(\underset{\text{satır}}{k},\underset{\text{kolon}}{i})$ bileşenini yazınız. $\underline{I_m A = A}$

Çözüm// Çarpım matrisin (k,i) elemanı a_{ki} ise

$$a_{ki} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} a_{ji} = \delta_{k1} a_{1i} + \delta_{k2} a_{2i} + \cdots + \delta_{km} a_{mi}$$

$k=m$ için $\quad \delta_{km}=1$

$k \neq m$ için $\quad \delta_{km}=0$

Benzer yolla $\underline{AI_n = A}$ olduğunu gösteriniz.

TANIM 1.5.2.

Bir n karesel A matrisinin elemanları $j<i$ için $a_{ij}=0$ ise bu matrise <u>yukarı üçgen matris</u>; $i<j$ için $a_{ij}=0$ ise bu matrise <u>aşağı üçgen matris</u> denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

yukarı üçgen matris $\qquad$ Aşağı üçgen matris

Aynı zamanda hem yukarı hem de aşağı üçgen olan matrise <u>köşegen (diagonal)</u> matris denir.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

Eğer D köşegen matrisinde $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k$ ise D'ye <u>skaler matris</u> denir. D matrisinde elemanlar için $a_{ij}=a_{ij}\delta_{ij}$ dir.

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A^{k+1}=A$ kare matrisine <u>periyodik matris</u> denir. $A^{k+1}=A$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı k ise A'ya k periyotlu matris denir. Eğer $k=1$ ise $A^2=A$ olur, o zaman A'ya

Idempotent matris denir. $P \in N^+$ olmak üzere $A^P = 0$ ise A matrisine nilpotent matris denir. $A^P = 0$ özelliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı p ise A'ya p indeksli nilpotent matris denir. $A^2 = I$ birim matris ise A matrisine involutory matris denir.
Her birim matris bir involutory matrisdir.

TANIM 1.5.3. $A, B \in K_n^n$ n karesel matrisleri $AB = BA = I_n$ özelliğini sağlıyorsa B'ye A nın çarpmaya göre tersi (inversi) denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. $AB = BA = I_n$ ----- (1,9) sağlanıyorsa B matrisinin çarpmaya göre tersi A matrisidir ve $A = B^{-1}$ dir.
(Her karesel matrisin tersi olmayabilir)

TEOREM. 1.5.1 : Bir A n karesel matrisin tersi varsa bir ve yalnız bir tanedir.

İspat// Kabul edelim ki A matrisinin B_1 ve B_2 gibi iki tane tersi olsun.

$$B_2 = B_2 I_n = B_2 (A B_1) = (B_2 A) B_1 = I_n B_1 = B_1$$

$$B_2 = B_1 = A^{-1} // \qquad A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

TEOREM. 1.5.2 : A ve B birer n karesel matrisler ve tersleri mevcut ve sırasıyla A^{-1}, B^{-1} ise,
(A B) matrisininde tersi mevcuttur ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

İspat// $(A.B)(A.B)^{-1} = I_n = (AB)^{-1}(AB)$ olmalı.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_{I_n})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{I_n})B = B^{-1} I_n B = B^{-1}B = I_n$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun $A.B = ?$

$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \Big[1$

TANIM 1.5.4

Bir $A \in K_n^m$ matrisinin devriği (transpozu) $A^d = A^t$ ile gösterilir.

A^t nin (j,i) bileşeni (elemanı), A nın (i,j) bileşeni olup, $n \times m$ matrisidir.

Yani $A^t = [a_{ij}]^t_{m\times n} = [a_{ij}^t]_{m\times n} = [a_{ji}]_{m\times n}$ dir.

Demek ki devrik işlemi,

$$K_n^m \longrightarrow K_m^n \quad \text{biçiminde gösterilir.}$$

Örnek 1.5.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

Matrisler üzerinde devrik işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

TEOREM 1.5.3 :

1- $(A+B)^t = A^t + B^t, \quad A,B \in K_n^m$

2- $(A^t)^t = A$

3- $(k.A)^t = k.A^t, \quad k \in K$

4- $(AB)^t = B^t . A^t, \quad A \in K_n^m, \; B \in K_p^n$ dir.

İspat// (4) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ $\quad A.B = S = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]_{m\times p}$

$$S_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$AB = [S_{ik}]^t_{m\times p} = [S_{ik}^t]_{m\times p} = [S_{ki}]_{p\times m}$$

$$(A.B)^t = [S_{ki}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}\right]_{m\times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^t b_{ji}^t\right]$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{ij}\right]_{p\times m} = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^t a_{jk}^t\right]_{p\times m} = B^t . A^t$$

TANIM 1.5.5

Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $A = A^t$ ise A matrisine simetrik matris, $A^t = -A$ ise A matrisine ters simetrik (anti simetrik) matris denir.

Örnek 1.5.3 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ dir ve $A = A^t$ olduğundan

A simetrik bir matristir.

Örnek 1.5.4 : $B=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-3\\2&3&0\end{bmatrix} \Rightarrow -B=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-3\\2&3&0\end{bmatrix}$

$B^t = B$ olduğundan ters simetriktir.

TANIM 1.5.6

Bir A n-karesel matrisinde,

$A.A^t = A^t.A = I_n$ ise A matrisine ortogonal (dik) matris denir.

Örnek 1.5.5 :

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-2}{\sqrt6}&0\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow A^t.A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}=I_3$$

TEOREM 1.5.4 : A herhangi kare matris ise

1- $A.A^t$, $A^t.A$, $(A+A^t)$ matrisleri simetrik matris,

2- $(A-A^t)$ matrisi ters simetrik matristir.

İspat// $(A.A^t)^t = (A^t).(A^t)^t = A^t.A$

$(A^tA)^t = (A^t)^t.A^t = A.A^t$

$(A+A^t)^t = A^t+(A^t)^t = A^t+A$

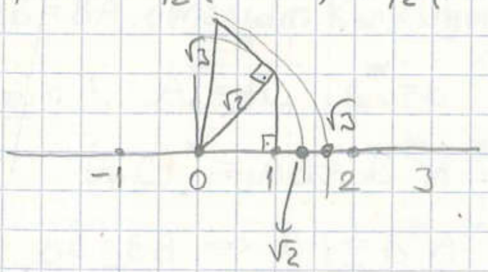
İspat// $(A-A^t)^t = A^t+(-1.A^t)^t = A^t - A = -A(A-A^t)$ Anti(ters)simetrik.

3- A simetrik ise kA da simetrik matristir, $k \in K$

A ters simetrik ise kA da ters simetrik matristir. $k \in K$

Uyarı : Her karesel A matrisi $\frac{1}{2}(A+A^t)$ simetrik matrisi ile $\frac{1}{2}(A-A^t)$ ters simetrik matrislerin toplamı olarak yazılabilir.

Çünkü $\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t) = A$ dır.



$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$

$i^2=-1 \quad i=\sqrt{-1}$

$z = a+ib$, $a,b \in R$

reel / gerçel: $Ge\, z$ $(Re(z))$

sanal / imajinel: $Sa\, z$ $(Im(z))$

1- $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi \Rightarrow (\overline{\overline{z}})=z$ dir.

2- $\left.\begin{array}{l} z_1=a_1+ib_1 \\ z_2=a_2+ib_2 \end{array}\right\} z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$

3- $z_1.z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2)$

4- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

5- $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

6- $z=a+ib \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$

7- $z=a+ib \Rightarrow z.\overline{z}=|z|^2$

TANIM 1.5.7

Elemanları karmaşık sayı olan matris A olsun. A'daki elemanları yerine eşlenikleri konularak elde edilen matrise, A nın eşleniği denir ve, $\overline{A}$ ile gösterilir. Yani,

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$ ise A nın eşleniği $[\overline{a_{ij}}]_{m\times n}$ dir.

$$\overline{A}=[\overline{a_{ij}}]_{m\times n}$$

Örnek 1.5.6 $A=\begin{bmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 & a_4+ib_4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow \overline{A}=\begin{bmatrix} a_1-ib & a_2-ib_2 \\ a_3-ib_3 & a_4-ib_4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ olur.

TEOREM 1.5.5 :

$\overline{A}$, $\overline{B}$ matrisi, A,B matrislerinin eşlenikleri ve k herhangi bir skaler $a_{ij}, k\in C$ ise

1- $(\overline{\overline{A}})=A$

2- $(\overline{k.A})=\overline{k}.\overline{A}$

3- $(\overline{A+B})=\overline{A}+\overline{B}$

4- $(\overline{AB})=\overline{A}.\overline{B}$ ve $(\overline{A})^t=(\overline{A^t})$

İspat // (4) $A=[a_{ij}] \Rightarrow \overline{A}=[\overline{a_{ij}}]$ $\qquad$ $A=[a_{ij}] \Rightarrow A^t=[a_{ji}]$

$(\overline{A})^t=[\overline{a_{ji}}]$ $\qquad$ $(\overline{A^t})=[\overline{a_{ji}}]$

$$(\overline{A})^t=(\overline{A^t})=A^*$$

//

$$(\overline{A})^t = (\overline{A^t}) = A^*$$

Örnek 1.5.7 $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$ verilmiş olsun. $(\overline{A})^t = (\overline{A^t})$ olduğunu gösterin?

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 3 & 5-2i \\ 2-i & 5+2i & 7 \end{bmatrix}$ $(\overline{B})^t \overset{?}{=} (\overline{B^t})$ olduğunu gösteriniz?

$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix}$ $\overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 2-i \\ 1-i & 3 & 5+2i \\ 2+i & 5-2i & 7 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 2- \\ 1-i & 3 & 5+2i \\ 2+i & 5-2i & 7 \end{bmatrix}$

$(\overline{A})^t = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} = (\overline{A^t}) = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix}$ $(\overline{B})^t = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 3 & 5-2i \\ 2-i & 5+2i & 7 \end{bmatrix} = (\overline{B^t}) = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 3 & 5-2i \\ 2-i & 5+2i & 7 \end{bmatrix}$

TANIM 1.5.8

Bir $A \in \mathbb{C}_n^r$ matrisi için,

$(\overline{A^t}) = A$ ise A matrisine Hermityen matris,

$(\overline{A^t}) = -A$ ise " ters Hermityen matris denir.

TEOREM 1.5.6: $A, B \in \mathbb{C}_n^r$ matrisleri için

1- $(A+B)^* = A^* + B^*$

2- $(A.B)^* = A^*.B^*$

3- $(k.A)^* = \overline{k}.A^*$

4- $(A^*)^* = A$ dır.

İspat (4) $\left(\overline{(\overline{A^t})}\right)^t = (A^t)^t = A$

Soru $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri hermityen matrisler olsunlar.

$A.B$ matrisinin hermityen matris olması için gerekli ve yeter koşul, $AB = BA$ olmasıdır. Kanıtlayınız?

Çözüm: $A^* = A$, $B^* = B$ $\Rightarrow$:

$$(A.B)^* = AB = B^*A^* = BA = AB$$

$$AB = BA \Rightarrow BA = B^*A^* = (AB)^*$$

TANIM 1.5.9:

$A_1, A_2 \ldots A_s$ matrisleri sırasıyla $m_1, m_2 \ldots m_s$ kare matrisleri olsunlar. $A = \text{diagonal}(A_1, A_2, \ldots, A_s) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}_{(m_1+m_2+\cdots m_s)\times(m_1+m_2+\cdots)}$

köşegen matrisine $A_1, A_2, ---- A_s$ matrislerinin direkt toplamı denir.

Örnek 1.5.8 $A_1 = [2]$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{3x2}$ ise A_1, A_2, A_3 direkt toplamı nedir?

Çözüm :

$$A = diag(A_1 + A_2 + A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{6\times 6}$$ olur.

Eğer $A = diag(A_1, A_2 ----- A_s)$, $B = diag(B_1, B_2 ---- B_s)$ ise,

$A.B = diag(A_1B_1, A_2B_2, ----- A_sB_s)$ dir. Burada A_i ve B_j matrisleri mertebeleri aynı olan karesel matrislerdir.

Alıştırmalar :

1- $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ matrisleri her a, b, c, d için çarpmaya göre değişmeli olduğunu gösteriniz ?

2- ⓐ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin idempotent ⓑ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin kaç indeksli nilpotent matris olduğunu gösteriniz ?

3- Eğer $AB = A$ ve $BA = B$ ise A ve B matrisleri idempotent matrislermidir?

4- Eğer A 2 indeksli nilpotent ise $\boxed{A(I \mp A)^n = A}$ olduğunu gösteriniz ?

5- $AB = I$ ve $CA = I$ ise $B = C$ yazılabilir mi? $A^{-1} = ?$ $B^{-1} = ?$

6- A matrisi involutory matrisidir $\Leftrightarrow (I - A)(I + A) = 0$

7- $(ABC)^t = C^t B^t A^t$ dir. Gösteriniz.

8- $A^t = A$, $B^t = B$ dir. $(AB)^t = AB \Leftrightarrow AB = BA$

9- $A^t = A \Rightarrow (P^t A P)^t = P^t A P$ dir. Gösteriniz.

10- $\left(A^t = -A \Rightarrow (P^t A P)^t \overset{?}{=} -(P^t A P)\right)$

10- $A, B \in K_n^n$ dir. $AB = BA \Leftrightarrow \forall k$ için $(A - kI)(B - kI) = (B - kI)(A - kI)$

11- iki üst (alt) üçgen matrislerin çarpımının üst (alt) üçgen matris olduğunu gösteriniz.

12- $A = diag(a_{11}, a_{22}, ----- a_{nn})$, $B \in K_n^m$ veriliyor. BA çarpımı için bir kural çıkarınız. AB çarpımı için de, bir kural çıkarınız. $B \in K_m^n$

13 - $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri idempotenttir. Gösteriniz?

14 - A idempotent ise $I-A$ da idempotenttir. Gösteriniz.

15 - $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & -2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ kaç indeksli periyodik matristir.

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisi nilpotenttir, gösteriniz.

16 - diag (1,2,3) ile çarpmaya göre değişmeli olan tüm matrisleri bulunuz?

17 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin çarpmaya göre tersini bulunuz.

18 - $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ matrisleri involutory dir gösteriniz.

19 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A, \bar{A}, iB$ matrisleri hermityen

B ve $\bar{B}$ 〃 ters 〃 olduğunu gösteriniz.

20 - $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2 \,\ldots\, A_s)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2 \,\ldots\, B_s)$ ve

A_i, B_i, $i = 1,2,3,\ldots s$ aynı boyutlu matrisler ise

a - $A+B = \mathrm{diag}(A_1+B_1, A_2+B_2, \ldots\ldots A_s+B_s)$

b - $A.B = \mathrm{diag}(A_1B_1, \ldots\ldots A_sB_s)$

c $\mathrm{iz}\,AB = \mathrm{iz}\,A_1B_1 + \mathrm{iz}\,A_2B_2 + \ldots + \mathrm{iz}\,A_sB_s$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler:

1 - $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & bc+ad \\ ad+bc & bd+ac \end{bmatrix}$

2 - a) $A.A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$A \cdot A = A^2 \Rightarrow$ idempotenttir.

(6) $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix} \Rightarrow A.A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}=A^2$

$A^2.A=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=A^3$ 3 indeksli nilpotent matristir.

$A^p=0 \quad p=3$ //

3- $AB=A$ ve $BA=B$,

$A^2 \stackrel{?}{=} A \qquad A^2=\underbrace{A.A}_{AB}=A(B.A)=\underbrace{AB}_{A}=A \Rightarrow$ idempotenttir.

$B^2 \stackrel{?}{=} B \qquad B^2=\underbrace{B.B}_{BA}=B(A.B)=BA=B \Rightarrow$ idempotenttir.

4- $A^2=0$ ise $A(I\mp A)^n=A$

$(x+y)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{n-\nu}y^\nu \qquad \nu\leqslant n$

$\binom{n}{\nu}=\frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$

$=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\dots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$

$(I+A)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}I^{n-\nu}A^\nu$

$=\binom{n}{0}I^n+\binom{n}{1}I^{n-1}A+\binom{n}{2}I^{n-2}\underbrace{A^2}_{0}$

$+\binom{n}{3}I^{n-3}\underbrace{A^3}_{0}+\dots+\binom{n}{n-1}I\underbrace{A^{n-1}}_{0}+\binom{n}{n}\underbrace{A^n}_{0}$

$A^2=0$
$A^3=A^2.A=0$
$A^4=A^3.A=0$

$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=1 \qquad \binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$

$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1$

$A.(I+A)^n=A(I+nA)=A+n\underbrace{A^2}_{0}=A+0=A$

$A(I+A)^n=A$ //

5- $AB=I$ ve $CA=I \Rightarrow B=C$ yazılabilir mi ?

$C(AB)=C.I \qquad B(\underbrace{CA}_{I})=B.I$

$(\underbrace{C.A}_{I})B=C.I \qquad (\underbrace{AB}_{I})C=B.I$

$IB=IC \qquad IC=BI$

$B=C \iff C=B$

$B=C \Rightarrow C=A^{-1}$

$\Rightarrow A=C^{-1}$

$\Rightarrow B=A^{-1}$

6- $(I-A)(I+A)=0$ olmalıdır.

$\Rightarrow$: A involutory ise $A^2=I$ dir.

$\Rightarrow I-A^2=0 \Rightarrow (I-A)(I+A)=0$ dır.

$\Leftarrow$: $(I-A)(I+A)=0 \Rightarrow I-A^2=0 \Rightarrow A^2=I$ dır.

7- $(ABC)^t \overset{?}{=} C^t B^t A^t$ midir?

$(ABC)^t = [(AB)C]^t = C^t (AB)^t = C^t B^t A^t$ //

8- $A^t=A$ $B^t=B$ simetrik matrislerdir.

$A^t=A$, $B^t=B$ $\Leftrightarrow$ $AB=BA$

$\Rightarrow$: AB simetrik olsun. $(AB)^t = AB$

$B^tA^t = AB$

$\Leftarrow$: $AB = BA \Rightarrow$

$= B^tA^t$

$= (AB)^t$

9- a) $A^t=A \Rightarrow (P^tAP)^t = P^tAP$ dir.

$(P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tAP$ //

b) $(A^t)=-A \Rightarrow (P^tAP)^t = -(P^tAP)$

$(P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = -(P^tAP)$

10- $AB=BA \Leftrightarrow \forall k$ için $(A-kI)(B-kI)=(B-kI)(A-kI)$ dır.

$\Rightarrow$: $AB=BA$ olsun.

$= AB-IkA-IkB+k^2I$

$= BA-IkA-IkB+k^2I$

$= A(B-Ik)-Ik(B-Ik)$

$= (B-Ik)(A-Ik)$

$\Leftarrow$: $AB-kAI-kBI+k^2I$

$= BA-kBI-kAI+k^2I$

$= -Ik(B-kI)+A(B-kI)$

$= (A-Ik)(B-Ik)$

2. BÖLÜM

Permütasyonlar ve Determinantlar :

2.1. Permütasyonlar

TANIM 2.1.1 :

M keyfi bir küme olsun. M nin bir permütasyon diye bir,

$$\alpha : M \xrightarrow[\text{üzerine}]{1:1} M$$

dönüşümüne denir.

M nin elemanları n tane ise bu elemanları $1, 2, 3, \ldots, n$ rakamlarıyla okuyalım. M nin bir permütasyonu α ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots & n \\ J_1 & J_2 & J_3, & \ldots & J_n \end{pmatrix}$$

ile gösterilir. Burada $J_k = \alpha(k)$ dır.

Örnek 2.1.1 $M = \{a, b\}$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{2!}}$

Örnek 2.1.2 $M = \{a, b, c\}$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$

$\alpha_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $\alpha_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ $3!$ //

$\alpha_2(c) = b$ $\alpha_4(c) = c$ $\alpha_6(a) = c$

TEOREM 2.1.1 : Bir M kümesinin birbirinden farklı n tane elemanı varsa M nin bütün permütasyonu sayısı $n!$ dir.

İspat// Ödev.

Eğer M deki elemanlar farklı değilse teorem 2.1.1 yanlış olur.

M kümesi n elemanlı olsun, fakat $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gibi k tane eleman birbirinden farklı olsun. Yani m_1 tane eleman a_1'e, m_2 tane eleman a_2'ye .....ve m_k tane eleman a_k'ya eşit olsun. Burada $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ dir. Bu durumda M nin bütün permütasyonları sayısı

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$ dir.

TANIM 2.1.2

Verilen bir permütasyonda bir rakam, kendinden daha küçük rakamdan önce geliyorsa, bu permütasyonda bir inversiyon vardır denir. Verilen bir permütasyonda inversiyonların sayısı ya tek olur ya çift olur.

İnversiyonun sayısı çift ise çift permütasyon, tekse tek permütasyon denir.

Örnek 2.1.3 $M=\{1,2,3\}$ $a_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ $a_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ $a_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

1 inversiyonlu ve tektir.

$a_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ $a_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $a_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

a_4: 3 inversiyon tek

a_5: 2 inversiyonludur. Çift permütasyon

a_6: 1 inversiyon Tek permütasyon

2.2 Kare Matrisin Determinantı.

$n \times n$ tipinde n karesel

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{-------} \quad (2,1)$$

matrisini ve $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdots\cdots a_{nj_n}$ ------ $(2,2)$

çarpımını düşünelim. (2,2) çarpımındaki her eleman öyle seçilmiştir ki; (2,1) deki matrisin her satırından bir ve yalnız bir eleman ve her sütundan bir ve yalnız bir eleman alınmıştır.

(2,2) deki çarpanların birinci alt indisler dizisi, $1,2,3,\cdots n$ doğal sayı dizisinden; (2,2) deki çarpanların ikinci alt indisler dizisi ise $1,2,3,\cdots n$ doğal sayılarının $n!$ permütasyonundan biri olacak şekilde düzenlenmişlerdir.

(2,2) deki çarpanların ikinci alt indislerin verilen bir $j_1, j_2, \cdots j_n$ permütasyonu, permütasyonun çift ya da tek oluşuna göre sırasıyla;

$\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} = +1$ $\quad \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} = -1$ olarak tanımlanır. Ve (2,2) deki çarpım

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad \text{---------} \quad (2,3)$$

olur. A matrisinin determinantı;

$|A|$ ile gösterilir. (Bazen de $\underline{\det A}$ ile gösterilir.)

Ve A matrisinin elemanlarından oluşan (2,3) biçimindeki tüm değişik işaretli çarpanların toplamıdır. Bu çarpanlara $|A|$'nın terimleri denir.

Böylece $|A| = \sum^{n!} \varepsilon_{J_1 J_2 \dots J_n} a_{1J_1} a_{2J_2} \dots a_{nJ_n}$ ---- (2,4)

olur. Burada toplam $n \times n$ tipinde n karesel matrisin $1, 2, 3 \dots n$ pozitif tamsayılarının $n!$ tane permütasyonu üzerinden alınmaktadır.

$n \times n$ tipinde bir kare matrisin determinantı, $n \times n$ tipinde bir determinanttır.

Örnek 2.2.1 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow |A| = \sum_{n=1}^{2!} \varepsilon_{J_1 J_2} a_{1J_1} a_{2J_2}$

$$= \underset{+}{\varepsilon_{12}} a_{11} a_{22} + \underset{-}{\varepsilon_{21}} a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow$

$$|A| = \varepsilon_{J_1 J_2 J_3} a_{1J_1} a_{2J_2} a_{3J_3} = \overset{+}{\varepsilon_{123}} a_{11} a_{22} a_{33} - \overset{-}{\varepsilon_{132}} a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$+ \varepsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \underset{+}{\varepsilon_{312}} a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$+ \underset{-}{\varepsilon_{321}} a_{13} a_{22} a_{31} + \underset{+}{\varepsilon_{231}} a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2.3 Determinantların Özellikleri :

1- Bir A kare matrisinin bir satırındaki (sütunundaki) her elemanı sıfır ise $|A| = 0$ dır. Çünkü $\sum^{n!} \varepsilon_{J_1, J_2 \dots J_n} \underline{a_{1J_1} a_{2J_2} \dots a_{nJ_n}}$

2- A bir karesel matris ise $|A^t| = |A|$ dır.

3- Eğer $|A|$ determinantının bir satırındaki (sütunundaki) her eleman k skaleri ile çarpılırsa determinant **k** ile çarpılmış olur.

Örneğin $\begin{vmatrix} a_{11} & k.a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ dır.

4- Eğer B matrisi, A matrisinin herhangi iki bitişik satırın (sütunun) yer değiştirilmesiyle elde edilmiş ise $|B| = -|A|$ dır.

5- Eğer B matrisi A matrisinin herhangi iki satırın (sütunun) yerdeğiştirmesi ile elde edilmiş ise, $|B| = -|A|$ dır.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (-1)^{\boxed{j-(i+1)+j-1}}$$

$3 \leftrightarrows 8$ yer değiştirirse $8-(3+1)=4$ (arada 4 satır veya sütun vardır.)

$$|A| = (-1)^{2j-2i-1}|A|$$
$$=(-1)^{2k-1}|A| = -|A|$$

6- Eğer B matrisi, A matrisinin i. satırının (sütununun) arka arkaya P tane satırın (sütunun) yer değiştirmesiyle bulunmuş ise,

$$|B| = (-1)^P |A| \quad \text{dır.}$$

7- A matrisinin iki satırı (sütunu) aynı ise $|A|=0$ dır.

$$|A| = -|A|$$
$$2|A|=0 \quad \text{ve} \quad |A|=0 \quad \text{olur.}$$

8- Eğer A matrisinin i. satırındaki her eleman P terimin toplamı ise $|A|$, P determinantın toplamı olarak ifade edilebilir. Bu p determinantın i. satırındaki elemanlar sırasıyla toplamın birinci, ikinci, ----, p'inci terimleridirler. Diğer satırlar (sütunlar) A nın elemanlarının aynısıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix} \overbrace{b_{11}+c_{11}+d_{11}+\cdots+k_{11}}^{P\ tane} & \overbrace{b_{12}+c_{12}+d_{12}+\cdots+k_{12}}^{P\ tane} & \cdots & b_{1n}+c_{1n}+d_{1n}+\cdots+k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

9- Eğer B matrisi A matrisinin i. satır (sütun) elemanlarına, başka bir satırın (sütunun) karşı gelen elemanlarının bir k skaleri ile çarpımını ekleyerek bulunmuş ise $|B|=|A|$ dır. Örneğin,