REEL ANALİZ

Babamın Anısına ...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

1995 - 1996

- I. BÖLÜM -

1.1. Euclidean Uzayları

TANIM: X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer f aşağıdaki şartları sağlarsa (f, X) ikilisine iç çarpım uzayı diyeceğiz.

i - $\forall x, y \in X$ için, $(y \perp x) = (x \perp y)$ ise (değişme)

ii - $\forall x, y, z \in X$ için, $(x+y) \perp z = (x \perp y) + (y \perp z)$ $\perp$ işleminin $+$ üzerine sağ ve soldan dağılma öz.

$$x \perp (y+z) = (x \perp y) + (x \perp z)$$

iii - $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için

$$(\lambda x \perp y) = \lambda (x \perp y)$$

$$(x \perp \lambda y) = \lambda (x \perp y)$$

iv - $\forall x \in X$ için $(x \perp x) \geq 0$ (pozitif tanımlılık)

$$x \perp x = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \text{ dır.}$$

Bazen bu iç çarpım uzayına Prehilber Uzayı denir.

Eğer X, sonlu boyutlu ise bu iç çarpım uzayına Euclidean uzayı denir. Genellikle n-boyutlu Euclidea uzayı E^n ile gösterilir.

Örnek // $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (x \perp y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanan f, $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır.

i - $(x \perp y) = (y \perp x)$

$$x \perp y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,\quad (y \perp x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \text{ olup,}$$

$$x \perp y = y \perp x \text{ dir.} \;//$$

ii - $(x+y) \perp z = (x \perp z) + (y \perp z)$

$$(x+y) \perp z = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = (x \perp z) + (y \perp z) \;//$$

iii- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda x \perp y = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda (x \perp y)$$

iv- $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$(x \perp x) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

O halde, $(f, \mathbb{R}^n)$ ikilisi bir iç çarpım uzayıdır.

n-sonlu olduğu için bir Euclide uzayıdır.

1.2. Tam Diferansiyel

xy-düzleminin bir D bölgesinde tanımlı $z = f(x,y)$ fonksiyonunun kısmî türevleri $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ olsun. Bu türevleri verirken sırasıyla x'e Δx ve y'ye de Δy artma miktarlarını birbirinden bağımsız olarak veriyoruz. Yani değişkenlerden birine göre türev alırken, diğerini sabit kabul ediyoruz.

Şimdi ise x ve y'ye sırasıyla Δx ve Δy artma miktarlarını beraber verelim.

$(x,y) \in D$ noktası sabit bir nokta olsun.

$(x+\Delta x, y+\Delta y) \in D$ noktası da başka bir sabit nokta olsun.

(x,y) noktasından $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ noktasına gidildiğinde $z = f(x,y)$ değişimi Δz olsun.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$ olur. (değişme miktarı)

böylece x ve y sabit kabul edildiğinde; Δz, Δx ve Δy artmalarının fonksiyonu olur.

$\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ olursa $\Delta z = 0$ olur.

TANIM: iki değişkenli $z = f(x,y)$ fonksiyonu için, A ve B büyüklükleri birbirinden ve Δx ile Δy artımlarından bağımsız, ε_1 ve ε_2 de Δx ve Δy nin fonksiyonları olup,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0 \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0$$

olmak üzere, Δz artma miktarı için,

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad \text{dir.} \quad ----(1.2.3)$$

Böyle bir bağıntı varsa f'ye, $(x,y)\in D$ noktasında tam diferansiyellenebilir denir. Bu taktirde,

$A\Delta x + B\Delta y$ toplamına da $z=f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli denir. Ve

$$dz = df(x,y) = A\Delta x + B\Delta y \quad ---- (1.2.4)$$

ile gösterilir.

Örnek // $f(x,y) = x^2 + xy + xy^2$ fonksiyonunun tam diferansiyellenebilir olup olmadığını araştırınız.

Çözüm // $z = f(x,y) = x^2 + xy + xy^2$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) + (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - (x^2+xy+xy^2)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y + (x+\Delta x)(y^2+2y\Delta y+\Delta y^2)$$
$$- x^2 - xy - xy^2$$

$$\Delta z = \underbrace{(2x+y+y^2)}_{A}\Delta x + \underbrace{(x+2xy)}_{B}\Delta y + \underbrace{[\Delta x + (1+2y)\Delta y]}_{\varepsilon_1}\Delta x + \underbrace{(x\Delta y + \Delta x\Delta y)}_{\varepsilon_2}\Delta y$$

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

$A = 2x + y + y^2$

$B = x + 2xy$

$\varepsilon_1 = \Delta x + (1+2y)\Delta y$

$\varepsilon_2 = x\Delta y + \Delta x\Delta y$ olur. Burada A ve B, Δx ve Δy ye bağlı değildir. ε_1 ve ε_2, Δx ile Δy nin fonksiyonlarıdır.

$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ iken $\varepsilon_1 \to 0$ ve $\varepsilon_2 \to 0$ olur.

O halde $z=f(x,y)$ fonksiyonu $(x,y)\in D$ noktasında diferansiyellenebilirdir. Ve $\forall (x,y)\in D$ için $dz = A\Delta x + B\Delta y$ ifadesi tam diferansiyeldir.

$dz=(2x+y+y^2)\,dx+(x+2xy)\,dy=0 \quad \frac{\partial M}{\partial y}=1+2y=\frac{\partial N}{\partial x}$ (tam dif. bilirdir.)

Teorem: Eğer $z=f(x,y)$ fonksiyonu bir $(x,y)\in D$ noktasında $dz=df(x,y)=A\Delta x+B\Delta y$ anlamında tam diferansiyele sahip ise $(x,y)\in D$ noktasında $\frac{\partial z}{\partial x}=A$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}=B$ dir.

İspat// Daha önce gördüğümüz,

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

ifadesinde $\Delta y=0$ alarak $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$ ifadesini oluşturalım.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+B\Delta y^{0}+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y^{0}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\varepsilon_1\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+\varepsilon_1$$

$\frac{\partial z}{\partial x}=A$ olur.

Benzer şekilde $\Delta x=0$ alarak $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}$ ifadesini oluşturalım.

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{B\Delta y+\varepsilon_2\Delta y}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}B+\varepsilon_2$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=B$ olur.

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyelinin varlığı için, kısmî türevlerinin varlığı gerekir. Fakat yeterli değildir. Bu nedenle kısmî türevler hem var olacak, hem de sürekli olacak. Şimdi bununla ilgili bir teorem verelim.

Teorem: $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde 1. mertebeden kısmî türevleri var ve bu kısmî türevler, D bölgesinde sürekli iseler: $z=f(x,y)$ fonksiyonu $\forall(x,y)\in D$ noktasında diferansiyellenebilirdir. Ve

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \text{ dir.}$$

İspat// $(x,y) \in D$ sabit bir nokta olsun. Eğer sadece x değişirse

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$ olur. Burada y sabit olup,

z sadece x'in bir fonksiyonudur. $f_x(x,y)$ kısmi türevi sürekli olduğundan yukarıdaki farka, bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, ortalama değer teoremini uygulayalım.

$x < x_1 < x+\Delta x$ için,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \Delta x\, f_x(x_1, y)$$ yazılabilir.

$f_x(x,y)$ sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$ için $\varepsilon_1 \to 0$ ve $x_1 \to x$ olur. Ve $\varepsilon_1 = f_x(x_1, y) - f_x(x,y)$ buradan,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \quad \text{----} \; (1.2.5)$$

yazılır. Şimdi $z = f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y birlikte değişsin. Bu durumda,

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y)] - f(x,y)$$ olup

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)] + [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] \quad \text{----} \; (1.2.6)$$

biçiminde yazıp, ikinci paranteze ortalama teoremini uygulayalım.

$y < y_1 < y+\Delta y$ için,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) = \Delta y\, f_y(x+\Delta x, y_1) \quad \text{---} \; (1.2.7)$$

olur. f_y sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$ için $\varepsilon_2 \to 0$ ve $y_1 \to y$ olur. Ve $\varepsilon_2 = f_y(x+\Delta x, y_1) - f_y(x,y)$ alınarak

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y(x,y) + \varepsilon_2 \Delta y \quad \text{---} \; (1.2.8)$$

elde edilir.

(1.2.5), (1,2.8) ve (1.2.6)'dan,

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad \text{---} \; (1.2.9)$$

bulunur. Burada $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0$

dır.

Böylece $z=f(x,y)$ fonksiyonu için,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

burada, yakın bir yaklaşımla $dx = \Delta x$ ve $dy = \Delta y$ dir.

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$ olur. $(dz = f_x dx + f_y dy)$

($z=f(x,y)$ fonksiyonunun bir $(x,y)\in D$ noktasında tam diferansiyellenebilir olma durumudur.)

Genelleştirme: n-değişkenli, kısmî türevleri var ve sürekli ise

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \quad \text{veya}$$

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

olur.

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ ifadesinin tekrar diferansiyelini alalım.

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^2$$

notasyonel olarak gösterilir ve tümevarımla

$$d^nz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^n$$

olur ve n vasıtasıyla binom katsayıları bulunur.

Örnek // $u = ax + by + cz$

$v = a_1x + b_1y + c_1z$ olmak üzere $t = f(u, v)$ veriliyor.

d^2t yi bulunuz.

Çözüm // $dt = f_u\,du + f_v\,dv$

$du = a\,dx + b\,dy + c\,dz$

$dv = a_1dx + b_1dy + c_1dz$

$\Rightarrow dt = f_u(a\,dx + b\,dy + c\,dz) + f_v(a_1dx + b_1dy + c_1dz)$

$$d^2t = f_{uu}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2 + 2f_{uv}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)(a_1dx + b_1dy + c_1dz) + f_{vv}(a_1dx + b_1dy + c_1dz)^2$$

Alıştırmalar

1 - $f(u, v, x, y) = 2u^{1/2}v^4x^{1/2}y^{2/3}$ için

a) $f_u(1, -2, 4, 8) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = u^{-1/2}v^4x^{1/2}y^{2/3}$$

$$f_u(1, -2, 4, 8) = 1^{-1/2}.(-2)^4.(4)^{1/2}.(8)^{2/3} = 128$$

b) $f_v(1, -2, 4, 8) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 8u^{1/2}v^3x^{1/2}y^{2/3}$$

$$f_v(1, -2, 4, 8) = 8.1^{1/2}.(-2)^3(4)^{1/2}.(8)^{2/3} = -2^9 \;//$$

c) $f_x(1, -2, 4, 8) = ?$

d) $f_y(1, -2, 4, 8) = ?$

2 - $f(x, y, z) = (x+y)^z$ için,

$f_x = ?$ $f_y = ?$ $f_z = ?$ ve $(x+y)(f_x + f_y) = ?$

Çözüm // $\frac{\partial f}{\partial x} = z(x+y)^{z-1} = f_x$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z(x+y)^{z-1} = f_y$$

$\ln f(x, y, z) = z\ln(x+y)$ $\quad \frac{f_z}{f(x, y, z)} = 1.\ln(x+y)$

$$f_z = f(x,y,z)\ln(x+y) = (x+y)^z \ln(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x+y)^z \ln(x+y) \text{ //}$$

$$(x+y)(f_x+f_y) = (x+y)\left[z(x+y)^{z-1} + z(x+y)^{z-1}\right]$$

$$= (x+y)\left[2z(x+y)^{z-1}\right]$$

$$= 2z(x+y)^z$$

9/28-

3 - $f(x,y)$, $\mathbb{C}^2$ de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve

$x = 2r-s$ ve $y = r+2s$ ise

$$2.\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 25.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm // $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}.2 + \frac{\partial f}{\partial y}.1 \qquad = \frac{\partial f}{\partial x}.(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}.2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= -2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial y^2}$$

$$= -2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= +\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Longrightarrow = 8\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 9\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$-2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 8\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= 25\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

13.3.96 / Çarşamba

4- c = sabit, $z: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$z = f(y+cx) + g(y-cx)$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ old. gösterin.

5- $f(x,y,z,u) = z.u.\text{Arctan}\dfrac{x}{y} + 5u$ ise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = ?$$

6- $\begin{array}{l} x = u\cos\theta \\ y = u\sin\theta \end{array}$ ise $\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{1}{u^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

olduğunu gösterin.

7- $w = \ln(e^r + e^s + e^t + e^u) \Rightarrow \dfrac{\partial^4 w}{\partial r \partial s \partial t \partial u} = ?$

8- $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$w(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$ ise $w_x + w_y + w_z = ?$

9- $u = f(x,y)$ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ise

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$ olduğunu gösterin.

JACOBIEN MATRISI

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-değişkenli bir fonksiyonun tam diferansiyeli; $dy = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ idi.

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

artma miktarı dy'ye çok yakındır. Bu artma miktarları, $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$ iken $\varepsilon_1 \to 0, \ldots, \varepsilon_n \to 0$ olmak koşulu ile,

$$\Delta y = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \ldots + f_{x_n} dx_n + \varepsilon_1 dx_1 + \ldots + \varepsilon_n dx_n$$

olacağı ve $(\Delta x_i = dx_i)$ yazılabilir.

Şimdi n tane değişkenli, m tane fonksiyon alalım.

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{---- } (1.4.1)$$
$$\vdots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

alalım. Bu fonksiyonlar $D \in E^n$ bölgesinde, kısmî türevlere sahip, sürekli fonksiyonlar olsun. Bunların tam diferansiyelleri

$$dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \qquad \text{---} (1.4.2)$$
$$\vdots$$
$$dy_m = \frac{\partial f_m}{\partial x_1} + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n$$

denklem sistemidir.

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \qquad \text{---} (1.4.3)$$

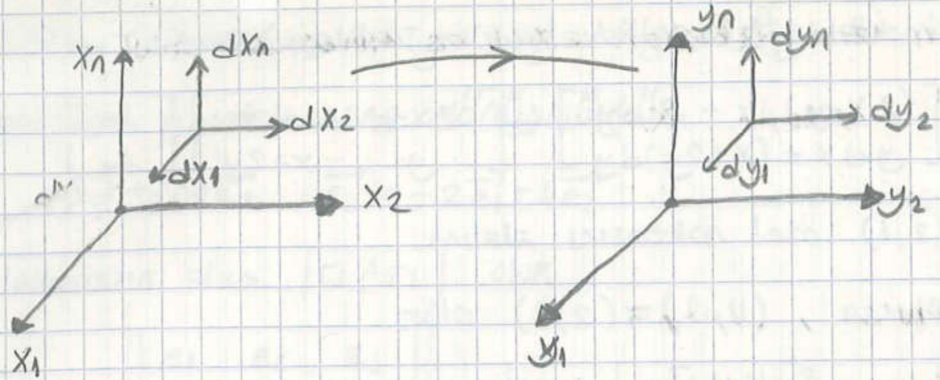
biçiminde yazılır. Bunun sonucu olarak,

$[dy_1, dy_2, \dots, dy_n]$ vektörü, $[dx_1, dx_2, \dots, dx_n]$ vektörü vasıtasıyla bulunur.

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisine <u>Jacobien Matrisi</u> denir.

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset E^n$ noktasına bir ve yalnız bir $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^m$ karşı gelir. Dolayısıyla E^n den E^m ye bir doğrusal olmayan dönüşüm sağlanabilir.



$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$Y = f(X)$ biçiminde, (1.4.1) 'i basitleştirebiliriz.

$$dY = \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} \quad f_X = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad dX = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{dY = f_X \, dX}$ biçiminde, (1.4.3) ü gösterebiliriz.

Burada $Y = f(X)$ doğrusal dönüşüm değildir. Bununla beraber, Jacobien matrisi doğrusal bir dönüşümdür.

Eğer $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ yerine $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ yazılırsa, $dY = Y_X \, dX$ elde edilir.

Örnek // $y_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

$y_2 = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

$y_3 = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ veriliyor.

$$dY = \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2 - 2x_3\,dx_3 \\ 2x_1\,dx_1 - 2x_2\,dx_2 + 2x_3\,dx_3 \\ -2x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2 + 2x_3\,dx_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 \\ -2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

eğer noktanız $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1)$ ise $(y_1, y_2, y_3) = (4, 4, -2)$ olur.

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \qquad dY = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{y = f(x)} dX$$

dönüşümü, doğrusal bir dönüşümdür.

Örnek // $u = x^2 - xy$, $v = xy + y^2$ olsun.

Burada bağımsız değişken x ve y, bağımlılar u ve v dir.

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x-y)dx - x\,dy \\ y\,dx + (x+2y)dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y & -x \\ y & x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$(x,y) = (2,1)$ özel noktasını alalım.

$(x,y) = (2,1)$ olursa , $(u,v) = (2,1)$ olur.

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Şimdi bu doğrusal dönüşümü biraz açalım.

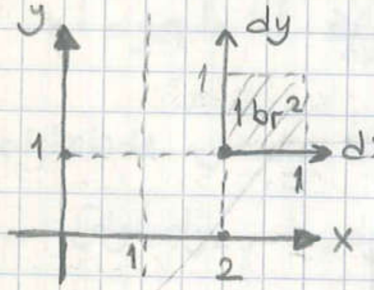
$dy = 0$ için , $\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3dx \\ dx \end{bmatrix}$

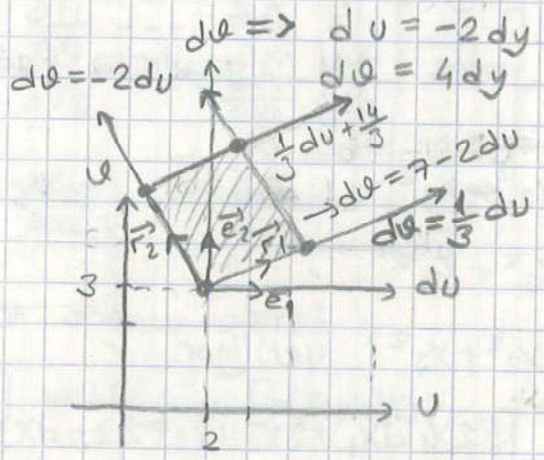
$$\Rightarrow \begin{matrix} du = 3dx \\ dv = dx \end{matrix}$$

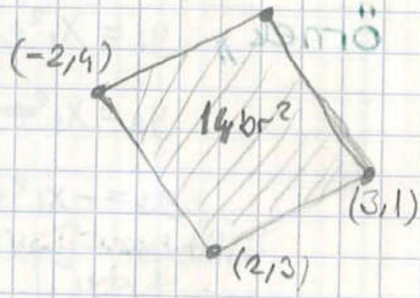
$$\Rightarrow du = 3dv \quad \vee \quad dv = \frac{1}{3} du$$

$dx = 0$ için , $\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2dy \\ 4dy \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} du = -2dy \\ dv = 4dy \end{matrix} \Rightarrow dv = -2du$$







$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3dx - 2 \\ dx + 4 \end{bmatrix}$ ($dy = 1$ için)

$$\begin{matrix} du = 3dx - 2 \\ dv = dx + 4 \end{matrix}$$

$$dv = \frac{du + 2}{3} + 4$$

($dx = 1$ için)

$$\Rightarrow dv = \frac{1}{3} du + \frac{14}{3} \quad //$$

$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2dy \\ 1 + 4y \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} du = 3 - 2dy \\ dv = 1 + 4dy \end{matrix} \Rightarrow dv = 7 - 2du \quad //$$

Şekilde görüldüğü gibi (dx, dy) koordinat sistemindeki $0 \leq dx \leq dy$ ve $0 \leq dy \leq 1$ karesel bölge, $(du, d\vartheta)$ koordinat sistemindeki paralelkenara dönüşmüştür.

$$\vec{r_1} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} \qquad \vec{r_2} = -2\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$$

Paralelkenarın alanı $|r_1 \wedge r_2|$ olur.

$$r_1 \wedge r_2 = \left\| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{matrix} \right\| = |14 e_3| = 14 \text{ br}^2$$

norm

Böylece (dy, dx) koordinat sisteminde seçilen her bölge, alan bakımından $(du, d\vartheta)$ koordinat sisteminde 14 katına dönüşür.

Burada (x, y) koordinat sisteminden (u, ϑ) koordinat sistemine olan dönüşümler doğrusal değildir.

$$x = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} u = 1 - y \\ \vartheta = y + y^2 \end{array} \qquad \vartheta = (1-u) + (1-u)^2$$

$$\Rightarrow \vartheta = 2 - 3u + u^2 \quad \text{paraboldür.}$$

$$y = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} u = x^2 - x \\ \vartheta = x + 1 \end{array} \qquad u = (\vartheta - 1)^2 - (\vartheta - 1)$$

$$\Rightarrow u = \vartheta^2 - 3\vartheta + 2 \quad \text{paraboldür.}$$

15.3.96 / Cuma

Örnek // $x = \cos u \cos \vartheta$
$y = \cos u \sin \vartheta$
$z = \sin u$ dönüşümünün Jakobien matrisini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin u \cos \vartheta & -\cos u \sin \vartheta \\ -\sin u \sin \vartheta & \cos u \cos \vartheta \\ \cos u & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, \vartheta)}$$

Örnek // $W = F(x, y, z)$ fonksiyonunun Jakobien matrisi,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right] \text{ dir.}$$

Bu satır vektörüne F nin Gradient vektörü denir.

ve gradf ya da ∇F (Nabla F) sembolleriyle gösterilir.

Benzer şekilde, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu için,

$$[F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, ..., F_{x_n}] = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i=1,2,...,n)$$
$$= \nabla F \quad //$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad F(x) = 2x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^3\vec{k}$$

$\nabla . F = 2 + 4y + 9z^2$ olur.

Şimdi tekrar $Y=f(X)$ dönüşümüne dönelim ve $m=n$ olsun.

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \quad ---- (1.4.7)$$
$$\vdots$$
$$y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

denklem sisteminde $Y_X = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$ jacobien matrisi kareseldir.

$$y = \det\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad --- (1.4.8)$$

bu determinanta, (1.4.7) denklem sisteminin fonksiyonel determinantı denir. $Y=f(X)$ fonksiyonlarına karşılık gelen $dY = Y_X\, dX$ doğrusal dönüşümü için, j; Y_X matrisinin determinantıdır. Bu determinantın mutlak değeri, n-boyutlu uzaylardaki doğrusal dönüşümün hacimleri oranını verir. Bunu, sembolik olarak;

$$\Delta V_y = |\det Y_X|\, \Delta V_x \quad --- (1.4.9)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Bundan önceki örnekte, $n=2$ boyutlu için,

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad \text{idi.}$$

Burada $\dot{J} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $|\det \dot{J}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 14 \text{ br}^2$ olur.

örnekte görüldüğü gibi $\dot{J}$ fonksiyonel determinantı, (dy, dx) koordinat sistemindeki karenin alanı, (du, dv) koordinat sistemindeki paralelkenarın alanının oranını verir.

örnekte, $|\dot{J}| = \left| \dfrac{\text{Paralelkenarın alanı}}{\text{karenin alanı}} \right| = \left| \dfrac{14}{1} \right| = 14$

Eğer $n=1$ ise, $\dot{J}$ fonksiyonel determinantı, $\dfrac{dy}{dx}$ olduğundan bunun mutlak değeri, Δy ve Δx uzunlukları oranıdır. madem ki,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ den, } \left| \frac{dy}{dx} \right| \sim \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \text{ olur.}$$

Alıştırmalar

1- Aşağıdaki dönüşümlerin Jakobyen matrislerini bulunuz.

a) $y_1 - 2x_1 - 3x_2$, $y_2 = x_1 + 2x_2$

b) $y_1 = x_1^2 - x_2^2$, $y_2 = 2x_1 x_2$

c) $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$

d) $w = x^2 y z$

e) $w = x^2 + y^2 + z^2$

f) $y_1 = x_1 x_2 x_3$, $y_2 = x_2^2 x_3$

g) $u = x\cos y$, $v = x\sin y$, $w = z^2$

Çözüm // g)

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos y & -x\sin y & 0 \\ \sin y & x\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

2- $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1 x_2$ ile tanımlanan $Y = f(X)$ fonksiyonuna $(2,1)$ noktasından yaklaşan, $dY = f_X dX$ doğrusal dönüşümünü bulunuz. Bundan yararlanarak $f(2.04, 1.01) = ?$

Çözüm //

$$dy_1 = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2$$
$$dy_2 = x_2 dx_1 + x_1 dx_2$$

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$$

(2,1) noktasında; $\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$ olur.

$f(2.04, 1.01)$ değerini bulalım.

$f(2+\Delta x_1, 1+\Delta x_2)$ isteniyor demektir.

$\Delta x_1 = dx_1$ ve $\Delta x_2 = dx_2$ alalım.

$dx_1 = 0{,}04$ $dx_2 = 0{,}01$ yerine yazalım.

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}01 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} dy_1 = 0{,}18 \\ dy_2 = 0{,}06 \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$y_1 = 4+1 = 5$ $y_2 = 1.2 = 2$

$y_1 = 5$ ve $y_2 = 2$ olduğundan,

$$f(2+\Delta x_1, 1+\Delta x_2) = (y_1 + dy_1, y_2 + dy_2)$$
$$= (5 + 0.18, 2 + 0.06)$$
$$= (5.18, 2.06) \text{ olur.}$$

3 - Aşağıdaki dönüşümlerin fonksiyonel determinantlarını bulun.

a) $u = x^3 - 3xy^2$
$v = 3x^2y - y^3$

b) $u = xe^y \cos z$
$v = xe^y \sin z$
$w = xe^y$

Çözüm // b)

$$y = \left| \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ e^y \sin z & xe^y \sin z & xe^y \cos z \\ e^y & xe^y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e^{3y} \begin{vmatrix} \cos z & x\cos z & -x\sin z \\ \sin z & x\sin z & x\cos z \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4 - $y_1 = x_1x_2 - x_3^2$

$y_2 = x_1x_2 - x_1x_3$ ile tanımlanan $Y = f(X)$ fonksiyonuna, (2,1,1) noktasında yaklaşan $dY = f_X\, dX$ doğrusal dönüşümünü bulunuz ve $f(2.01, 1.02, 0.99)$ değerini bulun.

Cevap // $(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2) = (1.07, 4.04)$ //

5- $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ ve

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{array}\right\} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = ?\,,\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = ?\,,\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = ?$$

Çözüm //

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$f_r = 2x.\cos\theta\sin\varphi + 2y\sin\theta\sin\varphi - 2z\cos\varphi$$

$$= 2r\cos^2\theta\sin^2\varphi + 2r\sin^2\theta\sin^2\varphi - 2r\cos^2\varphi$$

$$= 2r\sin^2\varphi - 2r\cos^2\varphi$$

$$f_r = -2r\cos 2\varphi \quad //$$

$$f_\theta = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} \text{ olur. } //$$

$$f_\varphi = f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi + f_z \cdot z_\varphi \text{ olur. } //$$

6- $\mu(s,t) = (x,y)$ olduğuna göre $x = e^s$ ve $y = e^t$ dönüşümüyle

$x^2\frac{\partial u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$ denklemini sadeleştirin.

7-
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \\ y_2 = x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \\ y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2 \\ \vdots \\ y_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \end{array}\right\}$$

olduğuna göre, $(1,0,0,\ldots,0)$ için $f(1,0.1,0.1,\ldots,0.1) = ?$

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 & 2x_3 & \ldots & 2x_n \\ 2x_1 & 0 & 2x_3 & \ldots & 2x_n \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 & \ldots & 2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. \\ 0.1 \\ 0.1 \\ \vdots \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(1,0,0,\ldots,0)$ için $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $\ldots$, $y_n = 1$

$$f(1,0.1,0.1,\ldots,0.1) = (0,1,1,\ldots,1)$$

Problemler:

1- $u = z\sin\frac{y}{x}$ $\quad x = 3r^2+2s$, $y = 4r-2s^3$, $z = 2r^2-3s^2$ ise $u_r = ?$ $\quad u_s = ?$

2- $u^2 - v = 3x+y$ ve $u - 2v^2 = x-2y$ ise $u_x, v_x, u_y, v_y = ?$

3- $z^3 - xz - y = 0$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3z^3+x}{(3z^2-x)^3}$ olduğunu gösterin.

4- $u = \frac{x+y}{1-xy}$, $v = \arctan x + \arctan y$ ise $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = ?$

5- $\left.\begin{array}{l} x = u-v+w \\ y = u^2-v^2+w^2 \\ z = u^3+v^3 \end{array}\right. \Rightarrow J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = ?$

6- $u = x^2y + y^2z + z^2x$ ise $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x+y+z)^2$ dir ?

7- $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r}$ olduğunu gösterin.

8- $\left.\begin{array}{l} x = u+v \\ y = u-v \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -2$ dir ?

9-

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)} = r$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)} \cdot \frac{\partial(r,v)}{\partial(x,y)} = 1$, $\frac{\partial(r,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r}$?

(Bak ANALİZ IV.)

23.3.96 / Cuma

Çok katlı integraller

Önce, bir değişkenli fonksiyonlarla ilgili integral özelliklerini hatırlayalım.

$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir f fonksiyonu alalım. Bu aralığı,
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad \text{---} \quad (2.1.1)$$
olacak şekilde alt aralıklara ayıralım. Aralıkların uzunluğu;
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad i. \text{ aralığın uzunluğudur.}$$
Bu aralıklarda $x_{i-1} < x_i^* < x_i$ olacak şekilde x_i^* alalım. x_i^*'a karşılık gelen fonksiyon değeri $f(x_i^*)$ olsun.

h; Δx_i lerin en büyüğü olsun.
$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$$
toplamının bir limiti varsa, bu limit değerine, f nin $[a,b]$ kapalı aralığındaki belirli integrali denir ve
$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{---} \quad (2.1.2)$$
biçiminde gösterilir.

Bir $c \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $h < \delta$ koşulunu sağlayan tüm aralıklar için,
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i - c \right| < \varepsilon \quad \text{---} \quad (2.1.3)$$
olacak şekilde $\delta > 0$ var ise (2.1.2) belirli integrali vardır. Bu integrale Riemann integrali denir.

Tanım 2.1.2. Bir f fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığındaki ortalama değeri $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ dir. Bu değer $f(x^*)$ olacak şekilde
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(x^*)$$
olur. $f(x^*)$'a ortalama ordinat (fonksiyonun averaj değeri) denir.