KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ I

Babamın Anısına ...

Ve Aileme ...

Erhan GÜLER

Kaynaklar

Basic Complex Analysis (J.E. Marsden)

Schaums (Complex Analysis)

Chirchell - Karmaşık Analiz (Ali Dönmez)

Karmaşık (Kompleks) Sayılar

3.10.96
Perşembe

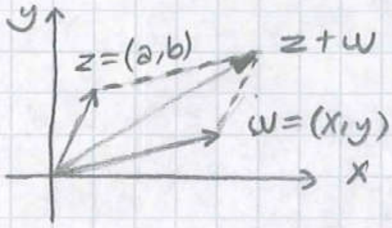
1. TANIM: $\mathbb{C}$ ile gösterilen karmaşık sayılar sistemi, aşağıdaki toplama, skalerle çarpma ve karmaşık çarpma işleni ile birlikte $\mathbb{R}^2$ düzlemdir.

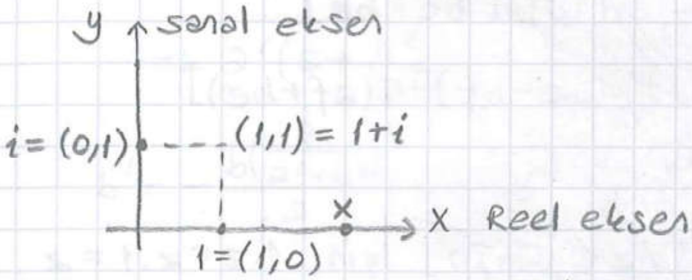
i - Toplama : $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\, y_1+y_2)$

ii - Skalerle Çarpma : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x,y)=(\alpha x, \alpha y)$

iii - Karmaşık Çarpma : $(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\, x_1y_2+y_1x_2)$

$z+w=(a+x,\, b+y)$





$x=(x,0)$, $1=(1,0)$

Her reel sayı, bir karmaşık sayı gibi düşünülebilir.

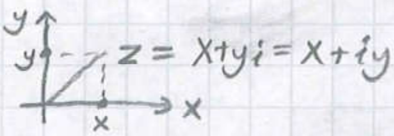
$z=(x,y)\in\mathbb{C}$ $\qquad z=(x,y)=(x,0)+(0,y)$

$$=x+y(0,1)=\underline{x+yi}$$

$iy \overset{?}{=} yi \qquad iy=(0,1)(y,0)=(0y-1.0,\ 0.0+1.y)=(0,y)$

$$yi=(y,0)(0,1)=(y.0-0.1,\ y.1+0.0)=(0,y)$$

$\Rightarrow \underline{z=x+yi=x+iy}$



$z=x+iy$

$x=\operatorname{Re} z \qquad y=\operatorname{Im} z$

x : Reel kısım, iy : sanal kısım

$z=\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z$

$i.i=i^2=(0,1)(0,1)=(0.0-1.1,\ 0.1+1.0)=(-1,0)=-1$

$\Rightarrow i^2=-1$ //

$z=a+ib$, $w=c+id$

$$\underline{z.w}=(a+ib)(c+id)=\underline{(ac-bd)+i(ad+bc)}$$

Örnek // $(2+3i)(1-4i)=(2+12)+i(-8+3)=14-5i$ //

1.Teorem: $\forall z, w, s \in \mathbb{C}$ için

i- $(zw)s = z(ws)$

ii- $zw = wz$

iii- $z(w+s) = zw + zs$

İspat// iii- $z = a+ib$, $w = c+id$, $s = e+if$

$$z(w+s) = (a+ib)[(c+id)+(e+if)]$$

$$= (a+ib)[(c+e)+i(d+f)]$$

$$= [a(c+e) - b(d+f)] + i[a(d+f)+b(c+e)]$$

$$= ac+ae-bd-bf + i[ad+af+bc+be]$$

$$= [(ac-bd)+i(ad+bc)] + [(ae-bf)+i(af+be)]$$

$$= zw + zs. \text{ //}$$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$ için, $1.x = x.1 = x$, $\forall z \in \mathbb{C}-\{0\}$ için $1.z = z.1 = z$

$z = a+ib$

$z.1 = (a+ib)(1+0i) = (a.1-b.0)+i(a.0+b.1) = a+ib = z$

$1.z = (1+0i)(a+ib) = (1.a-0.b)+i(1.b+0.a) = a+ib = z$

$\Rightarrow z.1 = 1.z = z$ //

Her $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ için $zz' = z'z = 1$ o.ş. bir tek $z' \in \mathbb{C}-\{0\}$ vardır.

$z \neq 0$, $z = a+ib$, ya $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ dır.

Veyahutta, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ dır.

Kabul edelim ki, z nin bir başka ters elemanı z'' var olsun. (Tekliğin ispatı).

$zz'' = z''z = 1$

$z' = z'.1 = z'(zz'') = \underbrace{(z'z)}_{1}z'' = 1.z'' = z''$

$\Rightarrow z' = z''$

O halde ters eleman tektir.

$a^2+b^2 \neq 0 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0)$

$z=a+ib$, $z'=a'+ib'$ varsa $zz'=1$ koşulu sağlanmalıdır.

$$zz'=(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')=1+0i=1$$

$$\{\ a+ib=c+id \Leftrightarrow a=c \text{ ve } b=d\ \}$$

$aa'-bb'=1$ $\quad$ (a' ve b' bilinmeyenler.)

$ab'+ba'=0$

$$ab'+ba'=0 \Rightarrow ab'=-ba' \Rightarrow b'=-\frac{ba'}{a} \quad (a\neq 0 \text{ idi})$$

$$aa'-bb'=aa'-b\left(-\frac{ba'}{a}\right)=aa'+\frac{a'b^2}{a}=1$$

$$\Rightarrow a'\left(a+\frac{b^2}{a}\right)=1 \Rightarrow a'\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)=1 \Rightarrow a'=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$b'=-\frac{b\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)}{a}=-\frac{b}{a^2+b^2}=b'$$

$$\boxed{z'=a'+ib'=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}} \quad (z\text{'nin tersi}).$$

Örnek // $z=3+2i$ 'nin tersini bulunuz.

$$a=3,\ b=2 \quad z'=\frac{3}{3^2+2^2}-i\frac{2}{3^2+2^2}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i \quad \text{veya,}$$

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{(a-ib)}{(a^2-b(-b)+i(a(-b)+ba)}$$

$$=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{9+4}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i \ //$$

2. Teorem: Karmaşık sayılar kümesi olan $\mathbb{C}$ bir cisimdir.

İspat // $\forall z,w,s \in \mathbb{C}$ için,

i- $z+w=w+z$

ii- $z+(w+s)=(z+w)+s$

iii- $z+0=0+z=z$

iv- $z+(-z)=(-z)+z$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=a+ib \\ -z=-a-ib \end{array} \right.$$

Çarpma Kuralları:

i- $zw = wz$

ii- $(zw)s = z(ws)$

iii- $1.z = z.1 = z$

iv- $z.z' = z'z = 1 \quad (z \neq 0$ için$)$

v- $z(w+s) = zw + zs$.

4.10.96 / CUMA

i ve 0'ı karşılaştıralım.

$i = (0,1)$. Kabul edelim ki $i > 0$ olsun.

$\Rightarrow i.i > 0.i \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$ # Çelişki.

$\{ 0.i = (0,0)(0,1) = (0-0, 0+0) = (0,0) = 0 \}$

O halde $i > 0$ diyemeyiz. $i \neq 0$ dır.

Kabul edelim ki $i < 0$ olsun.

$-1.i < -1.0 \Rightarrow -i > 0$

$\Rightarrow (-i)(-i) > 0.(-i)$

$\Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$ # Çelişki.

O halde $i < 0$ diyemeyiz.

$\Rightarrow i$ ile 0 karşılaştırılamaz.

Karmaşık sayılar kümesinde büyüklük ve küçüklükten söz edilemez.

Karmaşık Sayıların Özellikleri:

$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad z = a+ib$

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\theta$

$z = a + ib$

$= r\cos\theta + i.r\sin\theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ yazılışına, verilen z karmaşık sayısının kutupsal koordinatlardaki gösterimi denir.

Bu r sayısına z karmaşık sayısının modülü (uzunluğu veya mutlak değeri) denir. $r = |z|$ (z'nin modülü)

θ'ya da karmaşık sayının argümenti (veya genliği) denir.

$\theta = \arg z$

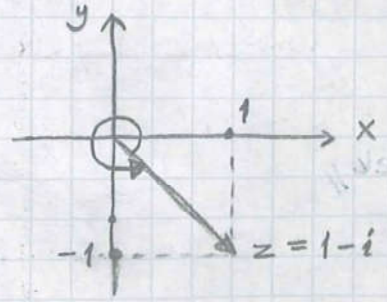
Burada, θ argümentinin hangi bölgede olduğuna dikkat etmek gerekir. ~~(Eğer θ açısının hangi bölgede olduğuna dikkat etmek gerekir.)~~ Eğer θ açısının $[0, 2\pi)$ aralığında olma koşulunu koyarsak, bu halde θ açısı, bu aralığın dışındaki değerleri almayacak demektir. Buna karşılık θ açısına 2π sayısının tam katları eklenirse, yine aynı karmaşık sayı bulunur. İhtiyaç duyduğumuz hallerde, θ açısının aralığı değiştirilebilir. Örneğin; $(-\pi, \pi]$ aralığı alınabilir.

$\{\ \|z\| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\mathbb{C}$ de, $\|z\| = |a| + |b|$ normdur.

r'ye norm diyemeyiz. $\}$

Örnek // $z = 1 - i$ karmaşık sayısını kutupsal koordinatlarda ifade ediniz.



$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$ veya $315°$ $\quad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad [0, 2\pi)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$(-\pi, \pi]$ argümentin bu aralığa düşen değerine, yani $-\pi < \arg z \leq \pi$ koşulunu sağlayan değere, $\arg z$'nin esas değeri denir ve $\operatorname{Arg} z$ ile gösterilir.

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi \qquad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

3. Teorem: Her $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için;

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2| \quad \text{ve} \quad \arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

eşitlikleri vardır.

İspat// Kabul edelim ki, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ olsunlar.

$$z_1 . z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)].[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

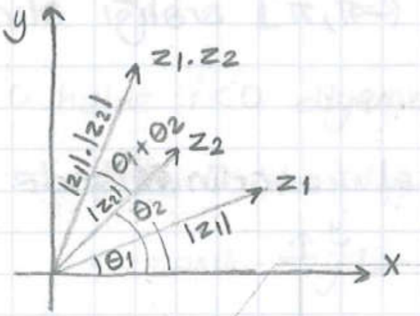
$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 \qquad |z_1| = r_1, \ |z_2| = r_2$$

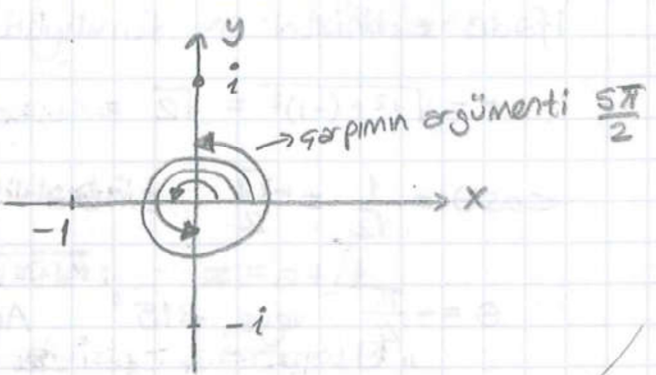
$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Genelleştirme: $\arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2n\pi$

$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$



Örnek// $z_1 = -1 \quad z_2 = -i \quad [0, 2\pi)$



$\arg z_1 = \pi \ , \ \arg z_2 = \frac{3\pi}{2}$

$z_1 . z_2 = (-1)(-i) = i$

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

$|z_2| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \ , \ 5\pi/2 - 2\pi = \frac{\pi}{2}$

$\arg(z_1 . z_2) = \frac{\pi}{2} \qquad |z_1| . |z_2| = |z_1 . z_2| = 1.1 = 1$ //

4. Teorem : (De Moivre Formülü) :

Eğer $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ve n pozitif bir tamsayı ise bu taktirde $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ dir.

İspat // $z^2=z.z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\,r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r.r(\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta))$$
$$=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

$$z^3=z^2.z=r^2.r(\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta))$$
$$=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) \qquad (\text{tümevarımla})$$

$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ olur. (Dö Mavayr)

Bu formülle bir karmaşık sayının tersi bulunabilir.

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ olsun. $z=a+ib$

$$z'=z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2} \qquad r=\sqrt{a^2+b^2},\ r^2=a^2+b^2$$
$$=\frac{r\cos\theta}{r^2}-i\frac{r\sin\theta}{r^2}$$
$$=\frac{\cos\theta}{r}-i\frac{\sin\theta}{r}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

tersi

$$|z'|=\frac{1}{r}=\frac{1}{|z|} \qquad \arg z'=-\theta=-\arg z$$

Bir karmaşık sayının tersinin argümenti, aynı karmaşık sayının argümentinin ters işaretlisine eşittir.

- Bölümü nasıl ifade edeceğiz, buna bakalım.

$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C},\quad z_2\neq 0\quad \frac{z_1}{z_2}=?$

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}.\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$$

$(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$

$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1).(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)} \quad +i(-\sin\theta_2)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1(-\sin\theta_2)]+i[\cos\theta_1(-\sin\theta_2)+\sin\theta_1\cos\theta_2]}{(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)+i(\cos\theta_2(-\sin\theta_2)+\sin\theta_2\cos\theta_2)}$$

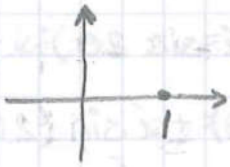
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$$

$z_1 = 1 \quad |z_1| = 1$

$Arg\, z_1 = 0$



$$|z'| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$Arg\, z' = Arg\,\frac{1}{z} = \underbrace{Arg\, 1}_{0} - Arg\, z = -Arg\, z \quad //$$

Karmaşık Sayıların Kökleri

5. Teorem: $w \neq 0$ ve $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ şeklinde verilen bir karmaşık sayı olsun. Bu halde w sayısının n. kökleri $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere ;

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

şeklindedir.

İspat // $\sqrt[n]{w} = z \ , \ z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$\Rightarrow w = z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

$$\Rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

$$r = \rho^n \ , \quad n\psi = \theta + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \ , \quad \psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right] \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$k = n$ için $z_n = z_0$ ve $k = n+1$ için $z_{n+1} = z_1$ olur.

Bu nedenle n tane kök vardır.

Örnek // $z^3 = 1$ denklemini çözünüz.

$w = 1 = 1.(\cos 0 + i\sin 0)$

$$r = 1 \ , \theta = 0 \qquad z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \qquad k=0,1,2$$

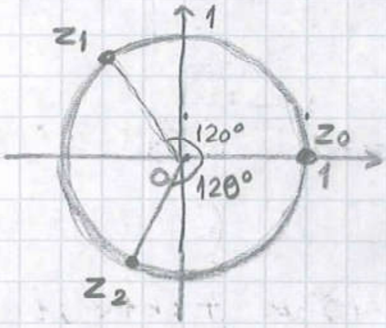
$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

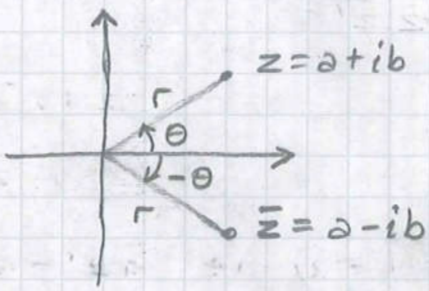
$$|z_0| = |1| = 1 \qquad |z_1| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}} = 1$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$



$z^n = 1$ tipindeki bir karmaşık sayının kökleri bir çember üzerinde eşit aralıklarla dizilmişlerdir.

<u>TANIM</u>: Bir $z = a+ib$ karmaşık sayısı verilsin. Bu karmaşık sayının <u>eşleniği</u> (konjügesi); $\bar{z}$ ile gösterilir ve $\bar{z} = a-ib$ şeklinde tanımlanır.



$\bar{z} = a-ib$ yi kutupsal formda yazalım. $a = r\cos\theta \quad b = r\sin\theta$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\bar{z} = a-ib = r\cos\theta - r i\sin\theta = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

i- $|\bar{z}| = r = |z|$ (Karmaşık sayının modülü, eşleniğin modülüne eşittir.)

ii- $\arg\bar{z} = -\theta = -\arg z$ (Karmaşık sayının argümenti, eşleniğinin argümenti ile ters işaretlidir.)

Eşlenik, OX eksenine göre alınan simetri demektir.

6. Teorem: Her $z, z' \in \mathbb{C}$ (z': herhangi sayı)

i- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

ii- $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$

iii- $z' \neq 0$ olmak üzere,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

iv- $z.\overline{z} = |z|^2$ ve $z \neq 0$ ise $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ olur.

v- $z = \overline{z} \iff z$ 'nin reel olmasıdır.

vi- $Re z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$. $Im z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

vii- $\overline{\overline{z}} = z$ dir.

İspat// $z = a+ib$ $z' = a'+ib'$ olsun.

i- $z+z' = (a+ib)+(a'+ib') = (a+a') + (b+b')i$

$\overline{z+z'} = (a+a') - (b+b')i$

$= (a-ib) + (a'-ib') = \overline{z} + \overline{z'}$

ii- $zz' = (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+ba')$

$\overline{zz'} = (aa'-bb') - i(ab'+ba')$ ----- (1)

$\overline{z}.\overline{z'} = \underset{(a+i(-b)).(a'+i(-b'))}{(a-ib)(a'-ib')} = (aa' - (-b)(-b')) + i(a(-b') + (-b)a')$

$= (aa'-bb') + i(-ab'-ba')$

$= (aa'-bb') - i(ab'-ba')$ ----- (2)

$\Rightarrow (1) = (2)$ ve $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

iii- $\overline{z}!\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(\frac{z'z}{z'}\right)} = \overline{z} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

iv- $z.\overline{z} = \underset{(a+i(-b))}{(a+ib)(a-ib)} = (aa - b(-b)) + i(\underbrace{a(-b)+ba}_{0})$

$\Rightarrow z.\overline{z} = a^2+b^2$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |z|^2 = a^2+b^2$

$z = \dfrac{|z|^2}{\overline{z}} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

v- $\Rightarrow$: $\cancel{a}+ib = \cancel{a}-ib \Rightarrow ib = -ib \Rightarrow 2ib = 0$ $i \neq 0$ $2 \neq 0$

$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = a + i.0 \Rightarrow z = a$ z reeldir.

$\Leftarrow$: Açıktır.

$z = -\overline{z} \iff z$'nin sanal olmasıdır.

$\Rightarrow a+ib = -(a-ib) \Rightarrow a+ib = -a+ib$

$\Rightarrow 2a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow z = 0 + i.b \Rightarrow z = b$, z sanaldır.

$\Leftarrow$: z sanal $\Rightarrow z = ib \Rightarrow \overline{z} = -ib$

$\Rightarrow -\overline{z} = ib = z$ olur.

vi- $(a+ib)+(a-ib) = 2a + \cancel{ib} - \cancel{ib} = 2a$

$$a = \frac{z+\overline{z}}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$$

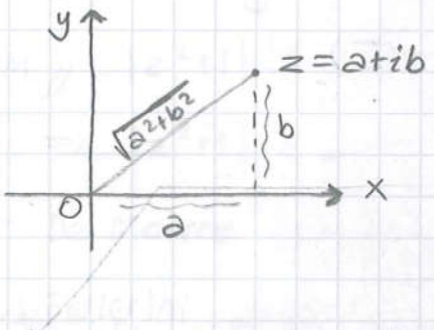
$z - \overline{z} = (a+ib)-(a-ib) = 2ib$

$$b = \frac{z-\overline{z}}{2i} \Rightarrow \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

vii- $z = a+ib \Rightarrow \overline{z} = a-ib \Rightarrow \overline{\overline{z}} = (\overline{a-ib}) = (a+ib) = z$

$\Rightarrow \overline{\overline{z}} = z$ //

TANIM: Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ nin modülü $|z|$ ile gösterilir ve $z = a+ib$ ise $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ olarak tanımlanır.



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Bir karmaşık sayının modülünün geometrik anlamı, o karmaşık sayının başlangıç noktasına olan uzaklığını gösterir.

7.Teorem: Her $z, z' \in \mathbb{C}$ için ,

i- $|z.z'| = |z|.|z'|$

ii- Eğer $z' \neq 0$ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

iii- $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \qquad |\operatorname{Re} z| \leq |z|$

$-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z| \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

iv - $|\bar{z}| = |z|$

v - $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

vi - $\big||z|-|z'|\big| \leq |z-z'|$ (üçgen eşitsizliği)

vii - $|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2+\dots+|z_n|^2} \cdot \sqrt{|w_1|^2+\dots+|w_n|^2}$

$\forall w \in \mathbb{C}$. (Cauchy eşitsizliği.)

İspat// i - Teorem 3'de yapıldı.

ii - $|z'| \cdot \left|\frac{z}{z'}\right| = \left|\frac{z' z}{z'}\right| = |z| \Rightarrow \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

iii - $-|z| \leq \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Re}\, z}}{a} \leq |z|$ $\qquad -|z| \leq \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Im}\, z}}{b} \leq |z|$

$\Rightarrow |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ $\qquad \Rightarrow |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ //

iv - $z = a+ib$, $\bar{z} = a-ib$

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

v - $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'})$

$= (z+z')(\bar{z}+\bar{z}')$

$= (z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}')$

$= |z|^2+|z'|^2+(z\bar{z}'+z'\bar{z})$

$\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}\bar{\bar{z}}' = \bar{z} \cdot z' = z'\bar{z}$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\qquad z\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$

$\Rightarrow |z+z'|^2 = |z|^2+|z'|^2+2\,\mathrm{Re}(z'\cdot\bar{z}) \leq |z|^2+|z'|^2+2|z'\cdot\bar{z}|$

$= |z|^2+|z'|^2+2|z'|\cdot|\bar{z}|$

$= |z|^2+|z'|^2+2|z'|\cdot|z|$

$= (|z|+|z'|)^2$

$|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \Rightarrow |z+z'| \leq |z|+|z'|$

vi - $|z| = |z+z'-z'| = |(z-z')+z'| \leq |z-z'|+|z'|$

$\Rightarrow |z|-|z'| \leq |z-z'|$ --- (1)

$|z'| = |z'+z-z| = |(z'-z)+z| \leqslant |z'-z| + |z|$

$\Rightarrow |z'|-|z| \leqslant |z'-z|$

$|z| = |-z| \quad -z = -a-ib \quad |-z| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = |z|$

$\Rightarrow |z'|-|z| \leq |z'-z|$

$\Rightarrow -(|z|-|z'|) \leq |z'-z|$

$\Rightarrow \quad |z|-|z'| \geqslant |z'-z| \; \ldots\ldots (2)$

1 ve 2 den,

$-|z-z'| \leqslant (|z|-|z'|) \leqslant |z-z'|$

$\Rightarrow \quad \big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|$

1. Uygulama

11.10.96 / CUMA

1- $\left(\dfrac{\overline{(3+7i)^2}}{8+6i}\right) \overset{?}{=} \dfrac{(3-7i)^2}{8-6i}$

Çözüm // $= \dfrac{\overline{(3+7i)^2}}{(\overline{8+6i})} = \dfrac{(\overline{3+7i})^2}{8-6i} = \dfrac{(3-7i)^2}{8-6i}$ //

2- $\{z \mid |z| \leq 1\}$ birim dairesi üzerinde $|z^2+1|$ ifadesinin maksimum değerinin 2 olduğunu gösteriniz.

Çözüm // $|z^2+1| \leq |z^2| + 1 = |z|^2+1 \leq 1+1 = 2$

$\Rightarrow |z^2+1| \leq 2$ //

3- De Moivre formülünü kullanarak $\cos 3\theta$ ve $\sin 3\theta$ değerlerini, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden bulunuz.

Çözüm // $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\Rightarrow \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\Rightarrow \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases}$ //

4- $|z|=1$ ise $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}.z+\bar{a}}\right|=1$ olduğunu gösterin.

Çözüm // $\bar{b}z+\bar{a} = \underbrace{(\bar{b}+\bar{a}.\bar{z}).z}$

$= \bar{b}z+\bar{a}.\bar{z}.z$

$= \bar{b}z+\bar{a}|z|^2$

$= \bar{b}z+\bar{a}$

$\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \dfrac{|az+b|}{|\bar{b}z+\bar{a}|}$ $\Big\}$ $|z|=|\bar{z}|$

$= \dfrac{|\overline{az+b}|}{|\bar{b}+\bar{a}\bar{z}||z|}$

$= \dfrac{|\bar{a}.\bar{z}+\bar{b}|}{|\bar{a}\bar{z}+\bar{b}|} = 1$ //

5- Aşağıdaki toplama ve çarpma işlemlerini yapın.

a- $(5+3i)+(-1+2i)+(7-5i)$

b- $(4+2i)(2-3i)$

c- $(2-i)(-3+2i)(5-4i)$

Çözüm // a- 11 //

b- $(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

$(4,2)(2,-3)=(8+6,\ -12+4)=(14,-8)=14-8i$ //

c- $(2,-1)(-3,2)=(-6+2,\ 4-3)=(-4,1)=-4+i$

$(-4,1).(5,-4)=(-20+4,\ 16+5)=(-16,21)=-16+21i$ //

6- Aşağıdaki ifadeleri sadeleştirin.

a- $\dfrac{5+5i}{3-4i}+\dfrac{20}{4+3i}$ b- $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

Çözüm // a- $\dfrac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\dfrac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$= \dfrac{(-5+35i)}{25}+\dfrac{80-60i}{25}=\dfrac{75-25i}{25}$

$= 3-i$ //

b- $\dfrac{3(i^2)^{15} - i(i^2)^9(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = \dfrac{(-3+i)(-2i-1)}{5}$

$= \dfrac{5+5i}{5} = 1+i$ //

7- Aşağıdaki ifadeleri reel ve sanal kısımlara ayırınız. $z \in \mathbb{C}$.

a- $\dfrac{1}{z^2}$ b) $\dfrac{1}{3z+2}$ c- $\dfrac{z+1}{2z-5}$ d- z^3

Çözüm // c- $\dfrac{z+1}{2z-5} = \dfrac{x+1+iy}{2x-5+2iy}$ $\left\{ z = x+iy \right.$

$= \dfrac{((x+1)+iy)\cdot(2x-5-2iy)}{(2x-5)^2+4y^2}$

$= \dfrac{2x^2+2y^2-3x-5-7i}{(2x-5)^2+4y^2}$

$\left\{ \begin{array}{l} (x-iy).(x+iy) \\ = |x-iy|^2 = |x+iy|^2 \\ = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2+y^2 \end{array} \right.$

$= \dfrac{2x^2+2y^2-3x-5}{(2x-5)^2+4y^2} - i\dfrac{7}{(2x-5)^2+4y^2}$ //

8- Aşağıdaki karmaşık sayıların köklerini bulunuz.

a- $z^5 = -32$ b- $(-1+i)^{1/3}$ c- $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$

Çözüm // c- $z = -2\sqrt{3}-2i$, $z^{1/4}$'ün köklerini bulacağız.

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $|z| = 4$ $\sin\theta = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{|z|}$ $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{|z|}$

$\left\{ \theta = 7\dfrac{\pi}{6} \right.$ ($7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$)

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ $k = 0,1,2,3$

$z_k = |z|^{1/4}\left(\cos\dfrac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)$ { derece ne ise o kadar kök vardır. }

$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{24} + i\sin\dfrac{7\pi}{24}\right)$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{24} + i\sin\dfrac{19\pi}{24}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{31\pi}{24} + i\sin\dfrac{31\pi}{24}\right)$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{43\pi}{24} + i\sin\dfrac{43\pi}{24}\right)$

{ $f(z) = 0$ z_1, z_2, z_3, z_4 kökse, birisi $\bar{z}_1$ olur.

Ödev // $f(z) = 0$ denkleminde z bir kök ise $\bar{z}$ de köktür.

{ 3 kök varsa birisi mutlaka reeldir. }

9- $z_1=2+i$, $z_2=3-2i$, $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ifadelerini kullanarak aşağıdakileri hesaplayınız.

a- $|3z_1-4z_2|$

b- $z_1^3-3z_1^2-4z_1-8$

c- $(\overline{z_3})^4$

d- $\left|\dfrac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}\right|$

10- Aşağıdaki z değerlerinin kümesini çiziniz.

a- $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|=2$ b- $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|<2$

Çözüm// a- $\dfrac{|z-3|}{|z+3|}=2 \Rightarrow |z-3|=2|z+3|$

$\Rightarrow |z-3|^2=4|z+3|^2$

$\Rightarrow |x-3+iy|^2=4|x+3+iy|^2$

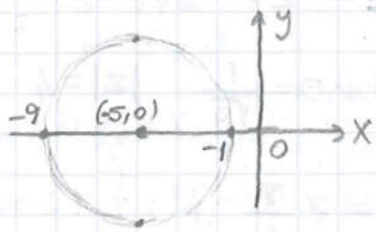
$\Rightarrow (x-3)^2+y^2=4(x+3)^2+4y^2$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2=4x^2+24x+36+4y^2$

$\Rightarrow 3x^2+30x+27+3y^2=0$

$\Rightarrow x^2+10x+9+y^2=0$

$\Rightarrow (x+5)^2-25+9+y^2=0$



$\Rightarrow (x+5)^2+y^2=16$ çemberdir. $M(-5,0)$ $R=4$ //

b- $(x+5)^2+y^2<16$ aynı çemberin içidir. //

8/b- $(-1+i)^{1/3}$ köklerini bulalım.

$z=(-1+i)$ $|z|=\sqrt{2}$ $\tan\theta=-1$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(2. bölge.)

$\theta=\frac{3}{4}\pi$ $\underline{\underline{135^\circ}}$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ $\left.\right\}$ $\frac{1}{3}$, ekok$(1,3)=3$ kökün derecesi

$z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3/4\cdot\pi+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right)$ $k=0,1,2$

$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}.\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[6]{2}(1+i)$

$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$

$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$ köklerden birisi reeldir.

16.10.96/Çarşamba

İspat// vii - $z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$,

$$|z_1w_1 + z_2w_2 + \dots + z_nw_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \cdot \sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$$

Kabul edelim ki; $w_1, w_2, \dots, w_n$ lerin en az biri sıfırdan farklı olsun. Eğer hepsi sıfır olsaydı $0=0$ olurdu. Bu ispatı sağlamış olurdu.

Şimdi kabul edelim ki $\exists w_i \neq 0$ $(i=1,2,\dots,n)$ olsun.

$$c = \frac{z_1w_1 + z_2w_2 + \dots + z_nw_n}{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \dots + |w_n|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_kw_k}{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2}$$

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2, \quad t = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \quad \text{ve} \quad s = \sum_{k=1}^{n} z_kw_k$$

$\Rightarrow c = \frac{s}{t}$ olur.

$\left\{ z.\bar{z} = |z|^2 \right\}$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - c\overline{w_k}|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z_k - c\overline{w_k})\left(\overline{z_k - c\overline{w_k}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - c\overline{w_k})(\overline{z_k} - \bar{c}\overline{\overline{w_k}})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - c\overline{w_k})(\overline{z_k} - \bar{c}w_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z_k} - \bar{c}z_kw_k - c\overline{w_k}\overline{z_k} + c\bar{c}w_k\overline{w_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + |c|^2 \cdot |w_k|^2 - c\overline{w_k}\overline{z_k} + c\bar{c}w_k\overline{w_k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}_{\vartheta} + |c|^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2}_{t} - \bar{c}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} z_kw_k}_{s} - c\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overline{w_k}\overline{z_k}}$$

$$= \vartheta + |c|^2 t - \bar{c}.s - c\sum_{k=1}^{n} \overline{w_k}\overline{z_k}$$

$$\left(\overline{c.\sum_{k=1}^{n} \overline{w_k}\overline{z_k}}\right) = \bar{c}\left(\overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{w_k}\overline{z_k}}\right) = \bar{c}\sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{w_k}}\,\overline{\overline{z_k}}$$

$$= \bar{c}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_kz_k}_{s} = \bar{c}.s$$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = Re\, z \Rightarrow 2Re\, z = z+\bar{z}$ (6.Teo./vi)

$= \vartheta + |c|^2.t + 2Re(\bar{c}.s)$

$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}.s = \left(\frac{\bar{s}}{t}\right).s = \frac{\bar{s}}{t}.s = \frac{\bar{s}.s}{t} = \frac{|s|^2}{t} \\ Re(\bar{c}.s) = \frac{|s|^2}{t} \begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{R} \end{array} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \\ \text{- iii} \end{array} \right\}$

$= \vartheta + |c|^2 t - 2\frac{|s|^2}{t}$ $\left\{ |c|^2 = \left|\frac{s}{t}\right|^2 = \frac{|s|^2}{|t|^2} = \frac{|s|^2}{t^2} \right.$

$= \vartheta + \frac{|s|^2}{t^2}t - 2\frac{|s|^2}{t} = \vartheta + \frac{|s|^2}{t} - 2\frac{|s|^2}{t}$

$= \vartheta - \frac{|s|^2}{t}$

$\Rightarrow 0 \leq \vartheta - \frac{|s|^2}{t}$ olur $\Rightarrow \vartheta \geq \frac{|s|^2}{t} \Rightarrow |s|^2 \leq \vartheta.t$

$\Rightarrow |s| \leq \sqrt{\vartheta.t} = \sqrt{\vartheta}.\sqrt{t}$

$\Rightarrow |s| \leq \sqrt{\vartheta}.\sqrt{t}$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2}$ olur. //

Bazı İlkel Fonksiyonlar

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots$

$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!}$

$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$

$z = x+iy$ olmak üzere;

$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$z = x$ iken $e^z = e^x$ oluyor. (iyi tanımlılık) ($y=0$ alarak)

TANIM: Eğer $z=x+iy$ ise $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ olarak tanımlanır.

TANIM: $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ olsun. Eğer $\forall z\in\mathbb{C}$ için $f(z+w)=f(z)$ olacak şekilde bir $w\in\mathbb{C}$ sayısı varsa, bu f fonksiyonuna devirlidir (periyodiktir) denir. Bu w sayısına da, f fonksiyonunun deviri (peryodu) denir.

17.10.96 / Perşembe

8. Teorem: $\forall z,w\in\mathbb{C}$ için,

i- $e^{z+w}=e^z.e^w$

ii- $e^z=0$ olmaz.

iii- $x\in\mathbb{R}$ olsun. $x>0$ ise $e^x>1$, $x<0$ ise $e^x<1$ dir.

iv- $|e^{x+iy}|=e^x$

v- $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$, $e^{\pi i}=-1$ $e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$ $e^{2\pi i}=1$

vi- e^z devirli bir fonksiyondur. $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, e^z nin peryotlarından biri $2\pi n i$ şeklindedir.

vii- $e^z=1 \iff n\in\mathbb{Z}$, $z=2n\pi i$ olmasıdır.

İspat// i- $z=x+iy$, $w=s+it$

$$z+w=(x+s)+i(y+t)$$

$$e^{z+w}=e^{(x+s)+i(y+t)} \qquad \left\{ e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \right\}$$

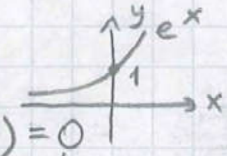
$$=e^{x+s}(\cos(y+t)+i\sin(y+t))$$

$$=e^x.e^s[(\cos y\cos t-\sin y\sin t)+i(\sin y\cos t+\cos y\sin t)]$$

$$=e^x.e^s[(\cos y+i\sin y).(\cos t+i\sin t)]$$

$$=[\underbrace{e^x(\cos y+i\sin y)}_{e^z}].[\underbrace{e^s(\cos t+i\sin t)}_{e^w}]$$

$$=e^z.e^w \quad //$$



İspat// ii- $x\in\mathbb{R}$ ise $e^x>0$

$z=x+iy \Rightarrow e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=0$ ise

$\Rightarrow e^x>0$ ve $\cos y+i\sin y=0$ olur.

$\Rightarrow \cos y=0 \quad \sin y=0$

$\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\Big\}$ böyle ortak bir değer yok

O halde e^z, hiçbir zaman için sıfır olamaz.

ispat// iii- $x>0 \Rightarrow e^x > 1, \quad x<0 \Rightarrow e^x < 1$ dir.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$x>0 \Rightarrow e^x > 1$ olur.

$x<0 \Rightarrow$ öyle bir $x'>0$ vardır ki, $x = -x'$ şeklinde yazılır.

$\Rightarrow e^x = e^{-x'} = \dfrac{1}{\underbrace{e^{x'}}_{>1}} \Rightarrow e^x < 1$ dir. $\quad \{ -4 = -(+4)$

ispat// iv- $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$?

$$|e^{x+iy}| = |e^x(\cos y + i\sin y)|$$
$$= |e^x| . |\cos y + i \sin y| \quad \{ |e^x| > 0$$
$$= e^x . \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} \quad \text{(Modül olduğu için + alınır)}$$
$$= e^x$$

ispat// v- $e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = 0 + i.1 = i$ //

ispat// vi- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \ f(z+w) = f(z)$ o.ş $w \in \mathbb{C}$ varsa

f'ye devirlidir denir. w'ya da devir denir.

$f(z) = e^z$ devirli $\Rightarrow f(z) = f(z+w)$ o.ş $w \in \mathbb{C}$ sayısı

bulmalıyız. Kabul edelim ki $f(z)$ devirli olsun.

$f(z+w) = e^{z+w} \Rightarrow e^{z+w} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ için.

$z=0$ için de sağlanmalıdır.

$\Rightarrow e^{0+w} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow e^w = 1$

$w = s+it \Rightarrow |e^w| = |e^{s+it}| = |1| = 1 \Rightarrow e^s = 1, \quad s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow s = 0$ dır.

$\Rightarrow w = 0 + it = it$ dir.

$\Rightarrow e^{it} = 1 \Rightarrow \cos t + i \sin t = 1 + i.0 \to \begin{matrix} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{matrix}$

$\cos t = 1 \Rightarrow \quad t = 0 + 2n\pi = 2n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

$\sin t = 0 \Rightarrow \quad t = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow t = 2n\pi$ iki denklemi ortak olarak sağlar. $n \in \mathbb{Z}$

$w = it \Rightarrow w = i.2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}.$

İspat// vii- $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$ dir. $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$: vi 'da yapıldı.

$\Leftarrow$: $e^z = e^{2n\pi i} = \underbrace{\cos 2\pi n}_{1} + i\underbrace{\sin 2\pi n}_{0} = 1$ olur.

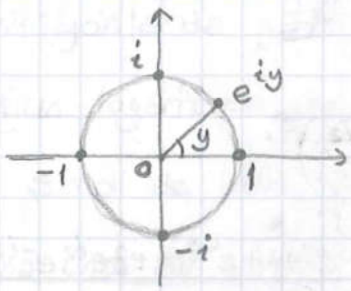
İspat biter. //

---

e^{iy} fonksiyonunun geometrik çizimi :

y	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
e^{iy}	1	i	-1	$-i$	1

$|e^{iy}| = 1$ (orjine olan uzaklık 1 dir.)



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |z| , \theta = \arg z$

$z = |z|.e^{i\theta}$

$\boxed{z = |z| e^{i \arg z}}$ yazılabilir.

Bu ise bir karmaşık sayının dördüncü çeşit yazılışıdır.

Trigonometrik Fonksiyonlar

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$ idi.

$e^{-iy} = e^{i(-y)} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y$

$\Rightarrow e^{-iy} = \cos y - i\sin y$ olur. Bu iki ifadeyi toplarsak,

$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y \Rightarrow \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$

$e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y \Rightarrow \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ $\quad y \in \mathbb{R}$,

TANIM: Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için, $\boxed{\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$ ve $\boxed{\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$ olarak tanımlanır.

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ dir.

TANIM: $\left\{ y \in \mathbb{R} \text{ için, } \operatorname{sh} y = \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2} \quad \operatorname{ch} y = \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} \right\}$

$z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\boxed{\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}}$, $\boxed{\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}}$

olarak tanımlanır.

$\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad \operatorname{coth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$ dir.

9. Teorem: i- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ Her $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$.

ii- $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, $z, w \in \mathbb{C}$

iii- $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

eşitlikleri vardır.

18.10.96 / CUMA

ispat// $\forall z, w \in \mathbb{C}$; $z = x+iy$

i- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$$\Rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2e^{iz}.e^{-iz}}{-4} + \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2e^{iz}.e^{-iz}}{4}$$

$$= \frac{-e^{2iz}-e^{-2iz}+2}{4} + \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4}$$

$$= \frac{-e^{2iz}-e^{-2iz}+2+e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad //$$

ii- $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$$\sin z \cos w + \cos z \sin w = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} - \cancel{e^{i(-z+w)}} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - \cancel{e^{i(z-w)}} + \cancel{e^{i(-z+w)}} - e^{-i(z+w)}}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z+w)} - 2e^{-i(z+w)}}{4i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w) \quad //$$

iii – $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

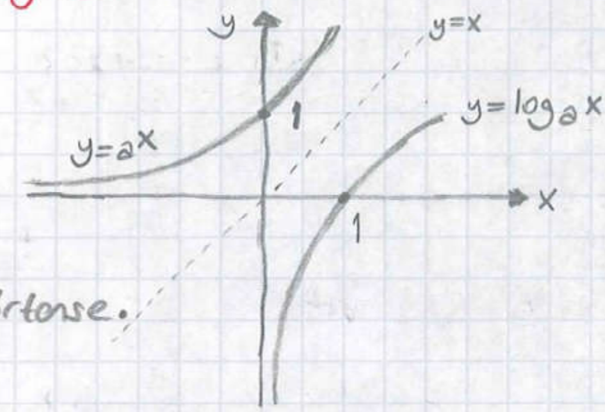
$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} + \cancel{e^{i(-z+w)}} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - \cancel{e^{i(z-w)}} - \cancel{e^{i(-z+w)}} + e^{-i(z+w)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{i(z+w)} + 2e^{-i(z+w)}}{4} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w) \quad //$$

Logaritmik Fonksiyonlar

$x \in \mathbb{R}$, $y = \log_a x \iff x = a^y$



Logaritma fonksiyonu ;

üstel fonksiyonun tersidir.

Bir fonksiyonun tersi var $\iff$ 1:1 ve örtense.

(Analiz I 'den)

Periyodik bir fonksiyon 1:1 değildir. Şimdiye kadar, logaritmik fonksiyonlarda $x>0$ değerleri için logaritmanın var olduğunu, sıfırın logaritmasının tanımsız olduğunu gördük.

Şimdi de, kompleks sayıların logaritmasını araştıralım. Daha önce de belirtildiği gibi, periyodik fonksiyonlar 1:1 olamaz. Eğer tanım bölgesi olarak $\mathbb{C}$ kompleks düzlemini seçersek, $f(x) = e^z$ devirli olacağından, dolayısıyla 1:1 değildir. Yani ; tersi yoktur. O halde logaritma fonksiyonunu bu şekilde tanımlamak mümkün değildir.

Logaritma fonksiyonunu tanımlamak için , $f(z) = w = e^z$ fonksiyonunun tanım bölgesini daraltmamız gerekir. Şimdi, bununla ilgili bir teorem verelim.

10. Teorem : A_{y_0} , $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$ olacak şekilde $z = x+iy$ karmaşık sayılarının bir kümesi olsun. Bunu küme gösterimi olarak ;