VEKTÖREL ANALİZ

Babamın Anısına ...

Ve Aileme ...

Erhan GÜLER

8.10.96 / SALI

Serbest Vektörlerin Tanımı :

Uzayda A ve B gibi iki nokta alındığında, bunlardan birincisini başlangıç ve ikincisini bitim noktası olarak işaretlersek, böyle nokta çiftlerine, sıralanmış nokta çiftleri cümlesi denir. Sıralanmış nokta çiftlerinden birini alıp, öteleme yaparsak, sonsuz tane nokta çifti elde edebiliriz. Bu çiftler, özel bir sınıf oluştururlar ki, bu sınıfa; verilen cümlenin bir denklik sınıfı denir.

TANIM : Serbest Vektör: Elemanları sıralanmış vektör çiftlerinden oluşan bir V cümlesinin, aşağıdaki bağıntıları sağlayan bir denklik sınıfıdır.

i - Her sıralı nokta çifti, yalnız bir serbest vektör belirtir.

ii - Bir öteleme ile üstüste çakışan her sıralı nokta çifti, aynı serbest vektörü belirtir. A ve B sıralanmış nokta çiftlerinin belirlediği vektörü ; $\overrightarrow{AB}$, $\overline{B-A}$ veya $\vec{a}$ sembollerinden biriyle göstereceğiz.

Bu bilgilerin ışığı altında, AB vektörünü belirten elemanları şöyle sıralayabiliriz :

i - Vektörün başlangıç ve bitim noktasından geçen doğrunun doğrultusuna, vektörün doğrultusu denir.

ii - A'dan B'ye giden yöne, vektörün yönü denir.

iii - A ile B arasındaki uzaklığa da, vektörün modülü denir.

$\mathrm{mod}\, AB = |AB|$ veya $\mathrm{mod}\, a = |a|$ ile gösterilir.

İki vektörün; doğrultusu, yönü ve modülü aynı ise bu vektörlere denk (eşit) vektörler denir.

TANIM : Sıralanmış iki nokta, üst üste çakıştığında ; elde edilen vektörün, doğrultu ve yönü belirsiz olup, modülü sıfırdır.

Böyle bir vektöre sıfır vektörü denir. Modülü 1 olan vektöre ise birim vektör denir. Uzayın herhangi iki noktasından verilen vektörlere denk vektörler çizilmesiyle elde edilen ve aynı noktadan geçen, yönlü doğru parçaları arasında kalan α açısına, bu iki vektörün açısı denir. Bu ise $0 \leq \alpha \leq \pi$ şeklindedir.

Eğer bir vektörün başlangıç noktası, belli herhangi bir noktaya bağlı ise, böyle vektörlere bağlı vektör denir. Eğer bir vektör, verilen bir doğru üzerinden ayrılmıyorsa, böyle vektörlere de kayan vektör denir.

TANIM: Üzerinde bir yön belirtilmiş doğruya eksen denir.

Bir eksen üzerinde alınan her $\overrightarrow{AB}$ vektörüne bir cebirsel sayı karşılık getirilebilir. Bu cebirsel sayının mutlak değeri; verilen vektörün modülünü gösteren sayıdır. İşareti de; vektörün yönü eksenle aynı yönde ise pozitif, ters yöndeyse negatif olur. Yani; $|AB|$ veya $-|AB|$ biçimindedir.

Sonuç: Eksen üzerinde alınan $\overrightarrow{AB}$ vektörünün cebirsel değerini AB ile gösterirsek, $AB + BA = 0$ olması; $AB = -BA$ olmasını gerektirir.

$$AB + BA = 0 \iff AB = -BA$$

Chasles Bağıntısı:

Bir eksen üzerinde A, B, C gibi herhangi üç nokta alınırsa, bu noktaların sırası ne olursa olsun, $AB + BC + CA = 0$ dır. Bu ise $AB + BC = AC$ olmasını gerektirir.

$$AB + BC + CA = 0 \Rightarrow AB + BC = AC$$

Bu durum genelleştirilirse, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gibi, eksen üzerinde alınan noktanın sırası ne olursa olsun;

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0$$

dır. Eksen üzerinde alınan A ve B noktalarının apsisleri, a ve b ise, $\vec{AB}$ vektörünün bu eksen üzerindeki cebirsel değerine X dersek, $X = b - a$ dır. Çünkü, Chasles bağıntısı gözönüne alınırsa;

$$OA + AB = OB \Rightarrow AB = OB - OA \Rightarrow X = b - a$$

elde edilir. Ayrıca, eksen doğrultusunda alınan birim vektör U ise, $AB = X.U = (b-a)U$ elde edilir.

Bir Vektörün Bir Skalerle Çarpımı

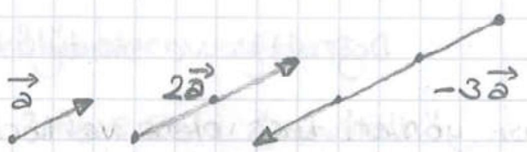
Bir a vektörüyle, bir λ skaleri verilmiş olsun. Bu vektörle λ skalerinin, $a\lambda$ veya λa şeklinde göstereceğimiz skaler çarpımı, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir vektördür.

i - λa vektörünün doğrultusu, a'nın vektörünün doğrultusuyla aynıdır.

ii - λa vektörünün yönü; λ pozitif ise a'nın yönüyle aynı, λ negatif ise a'nın yönüyle zıttır.

iii - λa'nın modülü; a'nın modülü ile λ'nın mutlak değerinin çarpımına eşittir.

Bir vektörle bir skalerin çarpımını geometrik olarak şöyle gösterebiliriz :



Buradan şu sonuçlar söylenebilir :

i - $\lambda a = a\lambda$

ii - $|\lambda a| = |a\lambda| = |\lambda|.|a|$

iii - $1.a = a$

iv - $0.a = a.0 = 0$

v - $\lambda(-a) = (-\lambda)a = -\lambda a$

vi - $(-\lambda)(-a) = \lambda a$

vii - $\lambda\mu a = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$

viii - $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$

TANIM: a ve b iki vektör olsunlar. Başlangıç noktası, a vektörünün bitim noktasına gelmek üzere, b'ye denk olan vektörü çizip, a'nın başlangıç noktasını b'nin uç noktasına birleştirdiğimizde elde edilen yeni vektöre, a ve b vektörlerinin toplamı denir.

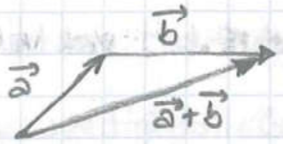
Eğer vektör sayısı ikiden fazla ise yani; a, b, c, d gibi vektörlerin toplamı sözkonusu ise;

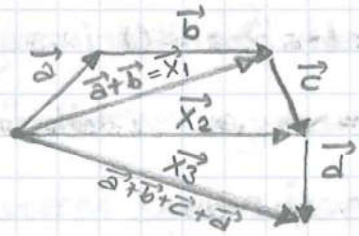
$a+b = X_1$, $X_1+c = a+b+c$

olur. $a+b+c = X_2$ dersek, $X_2+d = a+b+c+d$ olur. ....

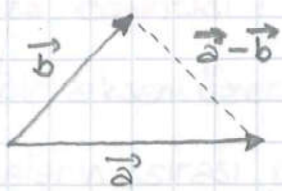
Bu şekilde devam edersek, n tane vektörün toplamı bulunur.

Vektörlerde toplama geometrik olarak şöyledir:





a ve b vektörlerinin farkı ise $b+X=a$ eşitliğini sağlayan X vektörüdür. $X = a-b$ şeklindedir. Bunu da geometrik olarak; sabit bir noktadan, a ve b'ye denk iki vektör çizdiğimizde; b'nin bitim noktasını, a'nın bitim noktasına birleştirerek elde ederiz.



Doğrultu ve modülü aynı, fakat yönleri ters olan vektörlere, zıt vektörler denir.

Burada, şu sonuçları söyleyebiliriz:

i - $b+(-b)=0$

ii - $a-b = a+(-b)$

iii - $-1.b = -b$.

Teorem: Vektörel toplamda, değişme ve birleşme özellikleri vardır.

a, b, c üç vektör ise;

$a+b=b+a$ ve $a+(b+c)=(a+b)+c$ olur.

Sonuç: Herhangi iki vektörel toplamda, terimlerin yeri istenildiği gibi değiştirilebilir.

Sonuç: Serbest vektörler, toplama işlemine göre bir komütatif (değişmeli) grup teşkil ederler. Çünkü, serbest vektörlerin kümesini E ile gösterirsek;

i- $a, b \in E$; $a+b \in E$. (kapalılık)

ii- $a, b, c \in E$; $a+(b+c)=(a+b)+c$. (birleşme)

iii- $a \in E$; $a+0=0+a$ o.ş $0 \in E$. (sıfır serbest vektör)

iv- $a \in E$; $a+(-a)=(-a)+a=0$ o.ş $-a \in E$. (ters vektör)

v- $a; b \in E$; $a+b=b+a$ (değişme)

$(E,+)$ değişmeli bir gruptur.

Teorem: a ve b iki serbest vektör ve λ bir skaler olmak üzere, $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ dir. Bu durum genelleştirilirse;

$\lambda(a_1+a_2+\dots+a_n)=\lambda a_1+\lambda a_2+\dots+\lambda a_n$ dir.

Sonuç: Skalerlerin meydana getirdiği bir K cismi ile serbest vektörlerin meydana getirdiği E kümesi gözönüne alınırsa, vektör uzayı aksiyomları sağlanır.

T1: $a, b \in E$; $a+b \in E$. (kapalılık)

T2: $a, b \in E$; $a+b=b+a$. (değişme)

T3: $a, b, c \in E$; $a+(b+c)=(a+b)+c$. (birleşme)

T4: $a \in E$, $\exists 0 \in K \Rightarrow a+0=0+a=a$ (birim eleman)

T5: $a \in E$, $\exists (-a) \in E \Rightarrow a+(-a)=(-a)+a=0$ (ters eleman)

Ç1: $\forall \lambda \in K$, $a \in E$; $\lambda a \in E$ (kapalılık)

Ç2: $\lambda, \mu \in K$, $a \in E$: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ (birleşme)

Ç3: $1 \in K$; $a \in E$; $1a = a$ (etkisiz eleman)

D1: $\mu, \lambda \in K$, $a \in E$; $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

D2: $\lambda \in K$, $a, b \in E$; $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

özellikleri sağlanır.

TANIM: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ler skalerler ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$'ler de serbest vektörler olmak üzere ;

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$$

ifadesine, vektörlerin lineer kombinasyonu denir. Eğer ; $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$ eşitliği, bütün λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ katsayılarının sıfır olmasıyla mümkün oluyorsa, yani ; $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ ise $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektörleri lineer bağımsızdır denir. Eğer λ_i'lerden en az biri sıfırdan farklı oluyorsa, bu durumda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ serbest vektörleri lineer bağımlıdır denir.

Teorem: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektörleri lineer bağımsız ise bunların içinden gelişigüzel seçilen p-tane vektör de lineer bağımsızdır. 15.10.96/SALI

İspat// a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan, lineer bağımsızlık'tan ① $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ olarak sağlanır. a_i'ler içerisinde gelişigüzel seçtiğimiz p-tane vektör; $b_1, b_2, \ldots, b_p$ olsun. Bu vektörlerin lineer kombinasyonu sıfıra eşitlenirse, $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_p b_p = 0$'dan $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p = 0$ dır. Çünkü ; bu son eşitliğe ; $b_1, b_2, \ldots, b_p$'lerin dışında kalan a_i'lerin lineer kombinasyonunu katıp sıfıra eşitlersek (1) denklemine dönülür ve bu denklem gereği, tüm katsayılar ve μ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sıfıra eşit olur.

Sonuç: Sıfırdan farklı her a vektörü lineer bağımsızdır. Çünkü; $\lambda a = 0$ 'dan, $a \neq 0$ olduğundan (hipotez gereği), $\lambda \neq 0$ olsaydı $\lambda a \neq 0$ olurdu. O halde $\lambda = 0$ olmak zorunda olurdu.

Teorem: Lineer bağımlı bir vektör sistemine, hangi vektörleri katarsak katalım, elde edilen yeni vektör sistemi de lineer bağımlıdır.

İspat// $a_1, a_2, \dots, a_n$ 'ler lineer bağımlı bir vektör sistemi olsun. Bu durumda; $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + \dots + \lambda_n a_n = 0 \dots (1)$ ise bu sistem lineer bağımlı olduğundan tanım gereği, en az bir $\lambda_k \neq 0$ vardır. Bu sisteme; $b_1, b_2, \dots, b_p$ gibi yeni vektörler katıp, bunların tümünün lineer kombinasyonunu sıfıra eşitleyelim. Yani;

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + \dots + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_p b_p = 0 \dots (2)$$

eşitliğinde, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p = 0$ dersek (1) eşitliği elde edilir. Bu taktirde $\exists \lambda_k \neq 0$ olur. O halde (2) eşitliğinin olması için tüm katsayılar sıfır olmak zorunda değildir. Bu nedenle, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_p$ 'ler lineer bağımsız olamaz. Yani lineer bağımlıdırlar. Böylece teoremin iddiası gösterilmiş olur.

Teorem: Sıfır vektörünü bulunduran her vektör sistemi lineer bağımlıdır.

İspat// $0, a_1, a_2, \dots, a_n$ vektörlerinden oluşan sistemin, lineer kombinasyonunu sıfıra eşitlersek,

$$\mu . 0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \dots (1)$$

olur. $\mu . 0 = 0$ olduğu için; $\mu \neq 0$ olarak seçilmiş olsa bile (1) de bir değişiklik olmaz. O halde (1) eşitliğinin sağlanması için, tüm katsayıların sıfır olması gerekmez. Bu sistem lineer bağımsız değildir. Lineer bağımlıdır.

Teorem: Lineer bağımlı bir vektör sisteminde en az bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Karşıt olarak da bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak verilmiş ise bu vektör sistemi lineer bağımlıdır.

İspat// $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektörleri lineer bağımlı ve

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \quad --- (1)$$

dır. Bu sistem lineer bağımlı olduğundan, katsayılardan en az biri sıfırdan farklıdır. Burada, genellikten birşey kaybetmeksizin, $\lambda_1 \neq 0$ kabul edebiliriz. Bu taktirde,

$$\lambda_1 a_1 = -\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 - \ldots - \lambda_n a_n$$

olur. $a_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)a_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)a_3 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)a_n$

yazılır. Buradan a_1, diğer vektörlerin kombinasyonu olduğunu belirtir. Aynı şekilde diğerleri de gösterilir.

Karşıt olarak; eğer $a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_n a_n$ şeklinde yazılabiliyorsa; a_1'i diğer tarafa alırsak;

$$-a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$$

elde edilir. Bu ise a_1'in (-1) ile çarpıldığını gösterir. $(-1) \neq 0$ dır. O halde bu sistem, lineer bağımlıdır.

Vektörel Fonksiyonlar

TANIM: $[t_1, t_2]$ aralığına ait her t skaler değişkenine, belirli bir kurala göre bir r vektörü karşılık getirilebiliyorsa bu r vektörüne t değişkeninin fonksiyonu denir ve $r = r(t)$ ile gösterilir.

Sonuç: $r = r(t)$ vektörü, $[t_1, t_2]$ aralığında t'nin bir fonksiyonu ise, bu vektörün bileşenleri de, aynı aralıkta t'nin fonksiyonlarıdır. Karşıt olarak, r vektörünün her bileşeni $[t_1, t_2]$ aralığında, t'nin bir fonksiyonu ise r vektörü de aynı aralıkta t'nin bir fonksiyonudur. Çünkü $r = r(t)$ ise $x = x(t)$, $y = y(t)$ ve $z = z(t)$ dir. (Parametrik gösterim) Ve,

$r = x(t) \cdot i + y(t) j + z(t) k$ (vektörel gösterim) şeklindedir.

Örnek // $r = 2t^2 i + 3t j + 5k$

$r = i \cos t + j \sin t + k t$

TANIM: $\alpha_1' \leq u_1 \leq \alpha_1$, $\alpha_2' \leq u_2 \leq \alpha_2, \ldots, \alpha_n' \leq u_n \leq \alpha_n$ aralıklarında verilmiş olan $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gibi n-tane serbest değişken alalım. Eğer; $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ gibi her n-değer kümesine bir r vektörü karşılık gelirse, r vektörüne $u_1, u_2, \ldots, u_n$ değişkenlerinin fonksiyonu denir ve $r = r(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca bu vektörün skaler bileşenlerinin herbiri de aynı aralıkta n değişkenli fonksiyonlardır. Yani $r = r(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ise

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= x(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ y &= y(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ z &= z(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

dir.

Örnek // $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq R$ olmak üzere,

$R = i \rho \cos\varphi \cos\theta + j \cdot \rho \cos\varphi \sin\theta + k \rho \sin\varphi = r(\rho, \varphi, \theta)$

$u_1 = \rho$ $u_2 = \varphi$ $u_3 = \theta$ dır.

Not: r, vektörel fonksiyonunda, bu vektörün başlangıç noktasını daima sıfır noktasına ya da orjine çakışık düşüneceğiz. Böylece $r = OM$ gibi bağlı bir vektör elde ederiz. Yani $r = OM$, M noktasının bir yer vektörüdür. r vektörünün herhangi değişkenlere bağlı olarak değişmesi demek, uzayda M noktasının bu değişkenlere bağlı olarak yer değiştirmesi demektir.

Eğri Denklemleri

Bir değişkenli vektörel bir fonksiyonda $r = OM$ yer vektörünün gösterdiği noktaların geometrik yeri bir c eğrisi olarak adlandırılır. O halde üç boyutlu uzayda bir c eğrisinin vektörel ve parametrik denklemleri $r = r(t)$ ise ;

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}$$ şeklinde ifade edilebilir.

Örnek// $r = i.R\cos t + j R\sin t + k.0 \ldots (1)$, $x = R\cos t \quad y = R\sin t \quad z = 0 \ldots (2)$ ve $x^2 + y^2 = R^2 \ldots (3)$ olsun.

(1) ile ifade edilen denkleme, çemberin vektörel denklemi,

(2) ile ifade edilen denkleme, çemberin parametrik denklemi,

(3) ile ifade edilen denkleme, çemberin kartezyen koordinatlardaki denklemi denir.

Örnek// $R = i\, a\cos t + j\, a\sin t + k\, w t$ denklemi parametrik olarak, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $z = wt$ helis denklemidir.

Örnek// $r = (t-1)i + (t^2+2)j + (\sqrt{t^2+2})k$

$x = t-1 \quad y = t^2+2 \quad z = \sqrt{t^2+2}$

$y = t^2+2 \Rightarrow y = (x+1)^2 + 2 \Rightarrow y = x^2 + 2x + 3$ yüzeyi ile $z^2 = t^2+2$ $\Rightarrow z^2 = y$ yüzeylerinin arakesitinden ibaret bir eğri gösterir.

22.10.96 / SALI

Yüzey Denklemleri

İki değişkenli, parametrik bir vektörel denklemde ; $r = OM$ yer vektörünün gösterdiği M noktasının geometrik yerine bir yüzey denir. Eğriler nasıl ki noktaların hareketinden oluşuyorsa, yüzeyler de eğrilerin hareketinden oluşur. Çünkü yüzeyin vektörel denklemi ; $r(u, v) \Rightarrow$

$x = x(u,v) \quad y = y(u,v) \quad z = z(u,v)$

olur. Burada $\vartheta=\vartheta_0$ sabit tutulursa, $r=r(u,\vartheta_0)$ tek değişkenli bir (c_0) eğrisi gösterir. ϑ_0'ın yerine $\vartheta=\vartheta_1$ alınırsa, başka bir (c_1) eğrisi elde edilir.

Şu halde ϑ'nın değişmesiyle $r=r(u,\vartheta_0)$'ın gösterdiği (c) eğrisi değişir, yani hareket eder.

Aynı şekilde $r=r(u_0,\vartheta)$ gibi bir diğer eğri elde edilir. Burada $u=u_0$ ve $\vartheta=\vartheta_0$ eğrilerine, parametrik eğriler denir.

Örnek$_{//}$ $r=iR\cos\varphi\cos\theta+jR\cos\varphi\sin\theta+kR\sin\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} x=R\cos\varphi\cos\theta \\ y=R\cos\varphi\sin\theta \\ z=R\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (\text{küre})$$

Vektörel ve Skaler Fonksiyonlarda Limit Kavramı

TANIM: $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlı $f(t)$ skaler fonksiyonu ile aynı aralıkta tanımlanmış, $r(t)$ vektörel fonksiyonu verilsin. $f(t)$ ve $r(t)$ fonksiyonları için, $\varepsilon>0$ (istenildiği kadar küçük) keyfî bir sayı olmak üzere, ε'a bağlı bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı bulunabilirse; öyle ki $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0 \ni |t-t_0|<\delta(\varepsilon)$ $\Rightarrow |r(t)|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0$; $\exists\,\delta(\varepsilon)>0 \Rightarrow |t-t_0|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(t)|<\varepsilon$ olsun.

Bu durumda, $f(t)$ skaler fonksiyonu ile $r(t)$ vektörel fonksiyonu, $t=t_0$ noktasında sıfır limitine sahiptir denir.

$\lim_{t\to t_0} f(t)=0$ ve $\lim_{t\to t_0} r(t)=0$ veya

$t\to t_0$; $f(t)=0$ ve $t\to t_0$; $r(t)=0$

şeklinde yazılır. Vektörel açıklaması ise ; "t, t_0'a ne kadar yaklaşırsa t'nın görüntüsü de sıfıra 0 (vektör) kadar yaklaşır" olur.

Not: $|t-t_0| < \delta(\varepsilon)$ ise $|r(t)| < \varepsilon$ dur. Yani t sayısı,

$[t_0-\delta(\varepsilon), t_0+\delta(\varepsilon)]$ aralığında kalınca, $r(t)$ vektörü de

O merkezli, ε yarıçaplı küre içinde kalır.

1. Teorem: Aynı $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlanmış olan $m=m(t)$, $r=r(t)$ ve $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ vektörel ve skaler fonksiyonları, $t=t_0$ için sıfır limitine sahip iseler a ve c sırasıyla bir sabit ve bir vektör olmak üzere, aşağıdaki skaler ve vektörel fonksiyonlar da, $t=t_0$ noktasında sıfır limitine sahiptirler.

i - $m(t) \mp r(t)$; $a.r(t)$

ii - $m(t) \wedge r(t)$; $c \wedge r(t)$

iii - $f(t) \mp \varphi(t)$; $f(t).\varphi(t)$

iv - $m(t).r(t)$; $f(t).r(t)$

İspat// i- Hipoteze göre $m(t)$ ve $r(t)$ sıfır limitine sahip olduklarından, limitin tanımı gereğince,

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1(\varepsilon)>0 \ \ni |t-t_0| < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_2(\varepsilon)>0 \ \ni |t-t_0| < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |r(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Burada $\delta_1(\varepsilon)$ ve $\delta_2(\varepsilon)$'ların en küçüğüne $\delta(\varepsilon)$ dersek, yani $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ olarak seçilirse,

$$|t-t_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |t-t_0| < \delta_1(\varepsilon) \text{ ve } |t-t_0| < \delta_2(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |r(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. O halde $\forall \varepsilon>0$ için,

$$\exists \delta(\varepsilon)>0, \ \ni |t-t_0| < \delta(\varepsilon)$$

olarak alınırsa,

$$|m(t) \mp r(t)| \leq |m(t)| + |r(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise, tanım gereğince $m(t) \mp r(t)$'nin sıfır limitine sahip olduğunu gösterir. //

• $\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0 \ni |t-t_0|<\delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |r(t)|<\frac{\varepsilon}{|a|}$

alınabileceğinden,

$$|a.r(t)| = |a|.|r(t)| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon \text{ olur,}$$

Bu ise $a.r(t)$ nin $t=t_0$ için limitinin sıfır olduğunu gösterir. //

ispat // ii − $\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0, \exists |t-t_0|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |m(t)|<\varepsilon<1 \\ |r(t)|<\varepsilon<1 \end{cases}$$ alabileceğimiz için;

$\theta=(m,r)$ için, vektörel çarpımın özellikleri gözönünde tutulursa,

$$|m(t)\wedge r(t)| < |m(t)|.|r(t)|.|\sin\theta| < |m(t)|.|r(t)|.$$
$$< \varepsilon.\varepsilon = \varepsilon^2 < \varepsilon$$

olmakla, $m(t)\wedge r(t)$ nin'de sıfır limitine eşit olduğu anlaşılır. //

ispat // iii − (i) ile aynıdır. //

ispat // iv − • $\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0, \exists |t-t_0|<\delta(\varepsilon)$ için,

$$\begin{cases} |m(t)|<\varepsilon<1 \\ |r(t)|<\varepsilon<1 \end{cases}$$ alınabileceğinden,

$$|m(t).r(t)| \leq |m(t)r(t)||\cos\theta| < |m(t)|.|r(t)| < \varepsilon^2 < \varepsilon$$

olmakla, $m(t).r(t)$ sıfır limite eşit olur. Diğer taraftan;

• $\forall \varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)$ bulunabilir ki, $|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t)|<\varepsilon<1$; $|r(t)|<\varepsilon<1$ olsun. Bu taktirde;

$$|f(t).r(t)| = |f(t)|.|r(t)| < \varepsilon^2 < \varepsilon$$

olur ve buradan da $f(t).r(t)$ limiti sıfıra eşit bulunur. //

TANIM: Limit: (Vektörel ve Skaler Fonksiyonlarda) (Genel Anlamda Limit)

$[t_1,t_2]$ aralığında tanımlanmış, $f(t)$ skaler ve $g(t)$ vektörel fonksiyonu; ayrıca $r(t)$ vektörel fonksiyonu ile sabit bir a vektörü verilmiş olsun.

Eğer $r(t)-a = a_0(t)$ vektörel fonksiyonu, t_0 noktasında sıfır limitine sahipse, yani;

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ \exists |t-t_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_0(t)| = |r(t)-a| < \varepsilon$ ise

$r(t)$ vektörel fonksiyonu $t=t_0$ noktasında a limitine sahiptir denir. Ve $\lim\limits_{t\to t_0} r(t) = a$ şeklinde yazılır.

Sonuç: $r(t) = a + a_0(t)$ ve $\lim\limits_{t\to t_0} a_0(t) = 0$ olarak yazılabilirse, bu durumda $r(t)$ fonksiyonunun limiti a vektörüdür. Skaler fonksiyonlar için de aynı şey söylenebilir.

Eğer $f(t) = A + \delta_1(t)$ ve $\lim\limits_{t\to t_0} \delta(t) = 0$ ise $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = A$ olur.

2. Teorem: $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlanmış $r=r(t)$ vektörel fonksiyonunun $t=t_0$ noktasında bir limitinin olabilmesi için gerek ve yeter şart, $r(t)$ vektörünün skaler bileşenlerinin, aynı aralıkta $t=t_0$ için bir limitinin olmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$: $r=r(t)$ nin $t=t_0$ için bir limiti varsa, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ fonksiyonlarının da $t=t_0$ için bir limiti olması gerekir. Hipoteze göre;

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ \exists |r(t)-a| < \varepsilon$ ... (1)

görülür. Halbuki,

$$r(t) = i.x(t) + j\,y(t) + k\,z(t) \quad \text{ve} \quad a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

olduğuna göre, (1) eşitsizliğini analitik olarak;

$$|r(t)-a| = \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x(t)-a_1| \leq \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} < \varepsilon$$

yazılır. Benzer şekilde;

$$|y(t)-a_2| \leq \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} < \varepsilon$$

$$|z(t)-a| \leq \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} < \varepsilon$$

olur ki, bu ise bize;

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1 \ ; \ \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2 \ ; \ \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3$$

bulunur.

O halde $r = r(t)$ vektörünün limiti olan a vektörünün bileşenlerinin de ; a_1, a_2, a_3 gibi birer limiti vardır.

$\Leftarrow$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ fonksiyonlarının $t = t_0$ için birer limiti varsa, $r = r(t)$ vektörel fonksiyonunun da bir limiti vardır. Hipoteze göre ;

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 , \exists |t - t_0| < \delta_1(\varepsilon) \text{ için } |x(t) - a_1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 , \exists |t - t_0| < \delta_2(\varepsilon) \text{ için } |y(t) - a_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \exists \delta_3(\varepsilon) > 0 , \exists |t - t_0| < \delta_3(\varepsilon) \text{ için } |z(t) - a_3| < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazılır. Halbuki ; $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \delta_3(\varepsilon)\}$

olarak alınırsa ;

$$|t - t_0| < \delta(\varepsilon) \leq \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |x(t) - a_1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|t - t_0| < \delta(\varepsilon) \leq \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |y(t) - a_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|t - t_0| < \delta(\varepsilon) \leq \delta_3(\varepsilon) \Rightarrow |z(t) - a_3| < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazılabilir. Öyleyse ;

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 , \exists |t - t_0| < \delta(\varepsilon) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} |r(t) - a| &= \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} \\ &\leq |x(t) - a_1| + |y(t) - a_2| + |z(t) - a_3| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur, ki bu ise bize $\lim_{t\to t_0} r(t) = a$ olduğunu gösterir.

12.11.96 / SALI

3. Teorem :
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to t_0} m(t) = a , \ \lim_{t\to t_0} f(t) = A \\ \\ \lim_{t\to t_0} r(t) = b , \ \lim_{t\to t_0} \varphi(t) = B \end{array}\right\} \text{ise}$$

$i-\ \lim_{t\to t_0}\left[m(t)\mp r(t)\right]=a\mp b$

$ii-\ \lim_{t\to t_0} m(t)r(t)=ab \quad , \quad \lim_{t\to t_0} f(t)\varphi(t)=AB$;

$iii-\ \lim_{t\to t_0} m(t)\wedge r(t)=a\wedge b$

$iv-\ \lim_{t\to t_0} f(t)r(t)=A.b$

$v-\ \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{A}{B} \quad ,(B\neq 0)$ dir.

İspat// $i-$ Hipotezden $\lim_{t\to t_0} m(t)=a \Rightarrow m(t)=a+a_0(t)$ (tanımdan)
$ii-$
$iii-$ $\Rightarrow \lim_{t\to t_0} a_0(t)=0$

Ve $\lim_{t\to t_0} r(t)=b \Rightarrow r(t)=b+b_0(t) \Rightarrow \lim_{t\to t_0} b_0(t)=0$

$\lim_{t\to t_0} f(t)=A \Rightarrow f(t)=A+\alpha(t) \ ; \ \lim_{t\to t_0}\alpha(t)=0$

$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=B \Rightarrow \varphi(t)=B+\beta(t) \ ; \ \lim_{t\to t_0}\beta(t)=0$

Buna göre ;

$$m(t)\mp r(t)=(a+a_0(t))\mp(b+b_0(t))$$
$$=a\mp b+A_0(t) \quad \text{olsun.}$$

$$m(t)r(t)=(a+a_0(t)).(b+b_0(t))$$
$$=ab+ab_0(t)+b\,a_0(t)+a_0(t)b_0(t)$$
$$=ab+B_0(t) \quad \text{olsun.}$$

$$m(t)\wedge r(t)=(a+a_0(t))\wedge(b+b_0(t))$$
$$=a\wedge b+a\wedge b_0(t)+b\wedge a_0(t)+a_0(t)\wedge b_0(t)$$
$$=a\wedge b+C_0(t) \quad \text{dir.}$$

Burada ;

$$A_0(t)=a_0(t)\mp b_0(t)$$

$$B_0(t)=a\,b_0(t)+b\,a_0(t)+a_0(t)b_0(t)$$

$$C_0(t)=a\wedge b_0(t)+b\wedge a_0(t)+a_0(t)\wedge b_0(t)$$ olup (1. teo. den)

$$\lim_{t\to t_0} A_0(t) = \lim_{t\to t_0} B_0(t) = \lim_{t\to t_0} C_0(t) = 0$$

olduğundan,

$$\lim_{t\to t_0} (m(t) \mp r(t)) = a \mp b \quad ve \quad \lim_{t\to t_0} m(t) r(t) = ab \quad ve$$

$$\lim_{t\to t_0} m(t) \wedge r(t) = a \wedge b$$

olur. Böylece i-ii-iii ispatlanmış olur. //

ispat// iv- Ayrıca $f(t) r(t) = (A + \alpha(t))(b + b_0(t))$

$$= Ab + Ab_0(t) + b\alpha(t) + \alpha(t)\beta_0(t)$$

$$= Ab + D_0(t)$$

$D_0(t) = Ab_0(t) + b\alpha(t) + \alpha(t)\beta_0(t)$ olup 1. teoremden

$\lim_{t\to t_0} D_0(t) = 0$ olup,

$$\lim_{t\to t_0} f(t) r(t) = Ab \quad \text{olur. } //$$

ispat// v- $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

$B \neq 0$ olmak üzere; $\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{f(t)}{\varphi(t)} - \frac{A}{B}\right)$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{Bf(t) - A\varphi(t)}{B\varphi(t)}\right)$$

$$= \frac{A}{B} + g(t) \; ; \; g(t) = \frac{Bf(t) - A\varphi(t)}{B\varphi(t)} \text{ olup,}$$

$\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$ olur. Çünkü hipotezde:

$f(t) = A + \alpha(t)$, $\varphi(t) = B + \beta(t)$ ve

$\lim_{t\to t_0} \alpha(t) = \lim_{t\to t_0} \beta(t) = 0$ olduğundan,

$$g(t) = \frac{Bf(t) - A\varphi(t)}{B.\varphi(t)} = \frac{B(A + \alpha(t)) - A(B + \beta(t))}{B(B + \beta(t))}$$

$$= \frac{\cancel{BA} + B\alpha(t) - \cancel{AB} - A\beta(t)}{B^2 + B\beta(t)} = \frac{B\alpha(t) - A\beta(t)}{B^2 + B\beta(t)}$$

bulunur.

Diğer taraftan ;

$$|B^2+B\beta(t)| \geqslant B^2-|B||\beta(t)| \text{ olup,}$$

$\beta(t)$ sıfır limitine sahip olduğundan,

$$|\beta(t)|<\varepsilon<\frac{|B|}{2}$$

alınabilir. Buna göre ;

$$|B^2+B\beta(t)| \geqslant B^2-|B||\beta(t)| \geqslant B^2-\frac{B^2}{2}=\frac{B^2}{2} \quad \text{olup,}$$

$$\frac{1}{|B^2+B\beta(t)|} \leqslant \frac{2}{B^2}$$

bulunur. Böylece ;

$$|g(t)| = \frac{|B\alpha(t)-A\beta(t)|}{|B^2+B\beta(t)|} \leqslant \frac{2}{B^2}|B\alpha(t)-A\beta(t)|$$

$$\leqslant \frac{2(|B||\alpha(t)|+|A||\beta(t)|)}{B^2} \text{ olur.}$$

Halbuki $\alpha(t), \beta(t)$; $t\to t_0$ için sıfır limitine sahip olduğundan,

$$\forall\varepsilon>0 \; ; \; \exists\delta(\varepsilon)>0 \; \exists |t-t_0|<\delta(\varepsilon) \text{ için, } \begin{cases} |\alpha(t)| < \dfrac{B^2}{2(|A|+|B|)}\varepsilon = \varepsilon' \text{ ve} \\ |\beta(t)| < \dfrac{B^2}{2(|A|+|B|)}\varepsilon = \varepsilon' \text{ alınabilir.} \end{cases}$$

O halde :

$$|g(t)| \leqslant \frac{2(|B||\alpha(t)|+|A||\beta(t)|)}{B^2} < \frac{2}{B^2}(|A|+|B|)\varepsilon' = \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $g(t)$ nin limitinin sıfır olduğunu gösterir.

O halde ;

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{A}{B}+g(t) \; ; \; g(t)\longrightarrow 0$$

olduğundan, $\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{A}{B} \quad (B\neq 0)$

bulunur.

Vektörel ve Skaler Fonksiyonlarda Süreklilik

TANIM: $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlanmış $f(t)$ skaler fonksiyonu ile $r(t)$ vektörel fonksiyonu verilsin. $t_0 \in [t_1,t_2]$ için, eğer;

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \text{ ve } \lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$$

ise $f(t)$ skaler fonksiyonu ile $r(t)$ vektörel fonksiyonu $t=t_0$ noktasında süreklidir denir. Veya;

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon,t_0)>0, \exists |t-t_0|< \delta(\varepsilon,t_0) : |r(t)-r(t_0)|<\varepsilon$$

oluyorsa $r(t)$ vektörel fonksiyonu $t=t_0$ da süreklidir.
Benzer şekilde $f(t)$ skaler fonksiyonu da süreklidir.

4. Teorem: $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlanmış $f(t), \varphi(t)$ ve $m(t), r(t)$ skaler ve vektörel fonksiyonları verilmiş olsun. Bu fonksiyonların hepsi $t=t_0$ noktasında sürekli iseler;

i- $m(t) \mp r(t)$ iv- $f(t):\varphi(t)$ $(\varphi(t)\neq 0)$ vii- $f(t).r(t)$

ii- $f(t) \mp \varphi(t)$ v- $m(t)r(t)$

iii- $f(t).\varphi(t)$,   vi- $m(t)\wedge r(t)$

fonksiyonları da aynı aralıkta süreklidir.

İspat// $f(t_0), \varphi(t_0), m(t_0), r(t_0)$ bu fonksiyonların limitleri olduğu gözönüne alınırsa 3. teoremden ispat yapılır. //

5. Teorem: $r=r(t)$ fonksiyonunun $[t_1,t_2]$ aralığında sürekli olması için gerek ve yeter şart, $r(t)$ vektörünün $x(t), y(t), z(t)$ skaler bileşenlerinin aynı aralıkta sürekli olmasıdır.

İspat// 2. teoremin sonucu olarak söylenebilir.

Skaler ve Vektörel Fonksiyonlarda Türev

TANIM: $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlanmış $f(t), r(t)$ skaler ve vektörel fonksiyonları verilsin. $t_0 \in [t_1,t_2]$ için, eğer;

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}$$

limitleri mevcut ise $f(t)$ ve $r(t)$ fonksiyonlarının $t=t_0$ noktasında türevleri vardır denir. Bu limitlere fonksiyonun bu noktadaki türevi denir. Buna göre;

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}=r'(t_0)=\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=t_0}$$

şeklinde gösterilir.

6. Teorem: $r=r(t)$ vektörel fonksiyonunun $t=t_0$ noktasında türevinin olması için gerek ve yeter şart, $r(t)$ vektörel fonksiyonunun, $x(t), y(t), z(t)$ skaler bileşenlerinin aynı aralıkta türevli olmasıdır.

İspat// $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ olduğundan,

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}i+\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}j+\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}k$$

olup, $$=\frac{\Delta x}{\Delta t}i+\frac{\Delta y}{\Delta t}j+\frac{\Delta z}{\Delta t}k$$

olduğundan; teorem, limit problemine indirgenmiş olur.

2. Teoreme göre de doğruluğu görülür. Böylece;

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}i+\frac{\Delta y}{\Delta t}j+\frac{\Delta z}{\Delta t}k\right)$$

olup, $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=i\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+j\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+k\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k$$

olur. Bu durum genelleştirilirse, ardışık türevler oluşur.

$$\frac{d^n r}{dt^n}=\frac{d^n x}{dt^n}i+\frac{d^n y}{dt^n}j+\frac{d^n z}{dt^n}k$$

bulunur. (tümevarım ile)

7. Teorem: $t=t_0$ noktasında türevlenebilen her vektörel ve skaler fonksiyon aynı zamanda süreklidir.

İspat// Fonksiyon türevlenebilir olduğuna göre ;

$$\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}-r'(t_0)=R(t_0,\Delta t)$$

ise, $\lim\limits_{\Delta t\to 0} R(t_0,\Delta t)=0$ olur. Buna göre ;

$$r(t_0+\Delta t)=r(t_0)+\underline{\Delta t\, r'(t_0)+\Delta t\,.\,R(t_0,\Delta t)}$$

$$\Rightarrow r(t_0+\Delta t)=r(t_0)+S(t_0+\Delta t)$$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0} S(t_0+\Delta t)=0$ olduğundan ;

$$\lim_{\Delta t\to 0} r(t_0+\Delta t)=r(t_0)$$

olur. Bu ise $r(t)$ fonksiyonunun $t=t_0$ için sürekliliğini ifade eder.

Karşıtının doğru olması gerekmez. (Her zaman doğru değildir.)

8. Teorem: $[t_1,t_2]$ aralığında tanımlı, türevlenebilen $m=m(t)$ ve $r=r(t)$ vektörel fonksiyonlarıyla, $f(t)$ skaler fonksiyonu verildiğine göre ;

i- $\dfrac{d}{dt}(m\mp r)=\dfrac{dm}{dt}\mp\dfrac{dr}{dt}$

ii- $\dfrac{d}{dt}(m.r)=\dfrac{dm}{dt}r+m\dfrac{dr}{dt}$

iii- $\dfrac{d}{dt}(m\wedge r)=\dfrac{dm}{dt}\wedge r+m\wedge\dfrac{dr}{dt}$

iv- $\dfrac{d}{dt}(f.r)=\dfrac{df}{dt}r+f\dfrac{dr}{dt}$

eşitlikleri vardır.

İspat// i- $\dfrac{d}{dt}(m\mp r)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{m(t+\Delta t)\mp r(t+\Delta t)-(m(t)\mp r(t))}{\Delta t}$ yazılır.

$m(t+\Delta t)-m(t)=\Delta m$, $r(t+\Delta t)-r(t)=\Delta r$ denirse

$$\frac{d}{dt}(m\mp r)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\mp\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\mp\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \mp \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \mp \frac{dr}{dt} \quad //$$

ispat// ii- $\frac{d}{dt}(mr) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t+\Delta t)r(t+\Delta t) - m(t)r(t)}{\Delta t}$ olup,

$$m(t+\Delta t) - m(t) = \Delta m \,, \quad r(t+\Delta t) - r(t) = \Delta r$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(m(t)+\Delta m)(r(t)+\Delta r) - m(t)r(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(m.r) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{m(t)r(t)} + m(t)\Delta r + \Delta m\, r(t) + \Delta m \Delta r - \cancel{m(t)r(t)}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t)\Delta r + \Delta m\, r(t) + \Delta m \Delta r}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} m(t) + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} r(t) + \lim_{\Delta t \to 0} \Delta r \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

$$= m(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} + r(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} + 0$$

$$= m(t) \frac{dr}{dt} + r(t) \frac{dm}{dt}$$

elde edilir. // (Diğerleri ödev)

Skaler ve Vektörel Fonksiyonlarda Kısmî Türev

$\alpha' \leq u \leq \alpha$ ve $\beta' \leq v \leq \beta$ aralıklarında tanımlı $r = r(u,v)$ gibi iki değişkenli bir vektörel fonksiyonun, (u_0, v_0) noktasındaki kısmî türevleri ;

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)}{\Delta u} = r_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}}$$

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0)}{\Delta v} = r_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}}$$

şeklinde tanımlanır.

9.Teorem : a) Sabit bir vektörel fonksiyonun türevi sıfır vektörüdür.

b) Modülü sabit olan vektörel fonksiyonun türevi kendisine dik bir vektördür.

ispat // a - $r(t)=c$ (sabit) olsun. Bu durumda,

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=\frac{c-c}{\Delta t}=0$$

olur. Böylece $\frac{dr}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=0$ olup aranılan bulunmuş olur. //

ispat // b - $|r(t)|=R$ (sabit) olsun.

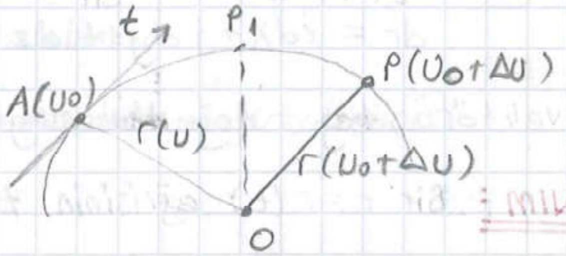
$$r(t)\,r(t)=R^2 \quad \text{türev alırsak,}$$

$$\frac{dr}{dt}r+\frac{dr}{dt}r=\frac{d}{dt}(R^2)=0$$

$$\Rightarrow 2\frac{dr}{dt}r=0 \Rightarrow \frac{dr}{dt}r=0 \Rightarrow \frac{dr}{dt}\perp r \text{ olur.}$$ //

Türevin Geometrik Yorumu : 18.11.96 / SALI

$r=r(u)$ denklemiyle verilmiş (vektörel denklemi ile) verilmiş eğrinin $r_0=r(u_0)=OA$ noktasındaki teğet vektörünü bulmaya çalışalım.



A'ya istenildiği kadar yakın olan hareketli bir P noktası alalım. Buna karşı gelen parametrik değer ; $u_0+\Delta u$ olsun. Böylece ;

$$r_0+\Delta r=r(u_0+\Delta u)=OP \text{ olur.}$$

Böylece $AP=OP-OA=r(u_0+\Delta u)-r(u_0)=\Delta r$ olur.

AP vektörünü Δu ile bölersek, doğrultusu değişmez.

Buna göre ; $\frac{AP}{\Delta u}=\frac{\Delta r}{\Delta u}$ vektörü AP kirişi doğrultusunda bir vektör gösterir. Δu'nun sıfıra yaklaşması demek, P nin hareket ederek A ile çakışması demektir. P noktası A'ya çakıştığından, bu kirişin limiti teğet doğrusunu verir.

O halde : $t=\lim_{P\to A}\frac{AP}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta u}=\left(\frac{dr}{du}\right)_{u=u_0}=r'(u_0)$

Buna göre, teğetin belirli bir A noktasıyla, t doğrultu vektörü belirli olduğundan, vektörel denklemi;

$$r_0 = OA = r(u_0) \quad r = r_0 + \lambda t = r_0 + \lambda\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{du}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{du}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{du}}$$

Veya,

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

yazabiliriz. Çünkü; $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ ve $\frac{dz}{du}$ teğet doğrultusunu gösterdiğine göre, bunların du ile çarpımı, doğrultuyu değiştirmediğinden;

$$dx = \frac{dx}{du}du, \quad dy = \frac{dy}{du}du, \quad dz = \frac{dz}{du}du$$

doğrultuları da teğet doğrultusudur. O halde;

$$dr = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

vektörü, teğet doğrultusunu gösteren vektördür.

TANIM: Bir $r = r(t)$ eğrisinin $t = t_0$ noktasında $r'(t_0)$ olmak üzere, türevi mevcut ve sürekli ise; $r(t_0) = r_0 = OA$ yer vektörüyle temsil edilen A noktasına, eğrinin pürüzsüz (adi - tekil olmayan) noktası denir. Aksi halde tekil (singüler) noktası denir.

Ölçülebilir Eğri - Bir Eğrinin Yay Uzunluğu

A ve B noktaları arasında kalan bir eğri parçası verilmiş olsun. $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ noktalarıyla eğriyi çeşitli parçalara bölelim. Sonra da bu noktaların birleşmesiyle elde edilen kiriş uzunluklarının toplamını bulalım. Yani;

$|A_{i-1}, A_i| = \Delta l_i$ olmak üzere $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$ yi

gözönüne alalım.