T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ HESAPLAMALAR İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

RUMEYSA ERDEN

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ FUNDA TÜRK

BARTIN-2021

T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ HESAPLAMALAR İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rumeysa ERDEN

BARTIN-2021

KABUL VE ONAY

Rumeysa ERDEN tarafından hazırlanan “KESİRLİ HESAPLAMALAR İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER” başlıklı bu çalışma, 19.08.2021 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK	……………
Üye	:	Doç. Dr. Ali BAŞHAN	……………
Üye	:	Doç. Dr. Hüseyin BUDAK	……………

Bu tezin kabulü Lisansüstü Eğitimi Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ..…/..…/20… tarih ve 20…../…..-….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. H. Selma ÇELİKYAY
Enstitü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK danışmanlığında hazırlamış olduğum "KESİRLİ HESAPLAMALAR İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

19.08.2021

Rumeysa ERDEN

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımlardan dolayı çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK' e en içten dileklerimle teşekkür ederim. Tezin gelişmesinde katkı sağlayan sayın jüri üyelerine, katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Sadece tez çalışmam süresinde değil, tanıştığımız ilk günden beri beni cesaretlendiren, desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen eşim Doç. Dr. Samet ERDEN' e, varlığıyla hayatımızı renklendiren biricik kızım Neva ERDEN' e ve bugünlere gelmemi sağlayan kıymetli aileme en kalbi duygularımla şükranlarımı sunarım.

.

Rumeysa ERDEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ HESAPLAMALAR İÇİN OSTROWSKİ TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Rumeysa ERDEN

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK

Bartın-2021, sayfa: 66

İntegral eşitlikleri gerek teorik gerekse uygulamalı matematikte kullanılan en önemli araçlardan biridir. Birçok adi diferansiyel eşitliklere ve kısmi diferansiyel eşitliklere dayalı başlangıç ve sınır değer problemleri söz konusu integral eşitlikleri yardımıyla çözümlenebilir. Ancak, bazı başlangıç ve sınır değer kümeleri kesirlidir, bir başka deyişle her yerde sürekli fakat hiçbir yerde türevlenemezdir. Bu durumda, klasik matematiksel yöntemler kullanılamaz. Lokal kesirli integral ve türevler, sürekli fakat türevlenemez fonksiyon problemlerinin çözümünde kullanılan etkili yöntemlerdir. Lokal kesirli fonksiyonel analizin özel fonksiyonlar, kontrol teorisi, kimyasal fizik, stokastik süreçler ve düzensiz difüzyon gibi birçok uygulama sahası mevcuttur.

Diğer yandan, sıfır ile bir arasındaki integral ve türev değerlerinin hesaplanmasında kullanılan uyumlu kesirli hesaplamalar teorisi, matematikte önemli bir yere sahip olmaya başlamıştır. Bazı araştırmacılar Hermite-Hadamard, Ostrowski, Grüss ve Ostrowski-Grüss gibi temel eşitsizliklerin genelleştirilmiş kesirli versiyonlarını elde etmiştir.

Bu tezde, yeni eşitsizlikler elde etmek için lokal kesirli matematiksel analizden ve uyumlu kesirli hesaplamalardan faydalanılacaktır. Bunun için, ilk olarak lokal kesirli uzaylar üzerinde iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar için bir integral özdeşliği kurulacaktır.

Daha sonra, bu özdeşliği kullanarak, ikinci mertebeden lokal kesirli türevlerinin mutlak değeri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler sunulacaktır. Aynı zamanda, bu tezde elde edilen sonuçlar yardımıyla, nümerik integrasyon ve özel ortalamalar için uygulamalar verilecektir.

Bu tezin ikinci amacı, uyumlu kesirli integraller için Ostrowski tipli sonuçlar oluşturmaktır. İkinci mertebeden genelleştirilmiş kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için iki Ostrowski tipli tahminler türetilecek ve bu kapsamlı eşitsizliklerin özel durumları gözlemlenecektir. Ek olarak, bu sonuçların nümerik analiz uygulamaları incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Lokal Kesirli Hesaplamalar, Uyumlu Kesirli Hesaplamalar, Ostrowski Eşitsizliği, Sınırlı Fonksiyonlar, Özel Ortalamalar, Nümerik İntegrasyon.

Bilim Alanı Kodu: 26D07, 26D10, 26D15, 26A33, 41A55.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

OSTROWSKI TYPE INEQUALITIES FOR FRACTIONAL CALCULUS

Rumeysa ERDEN

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Funda TÜRK

Bartın-2021, pp: 67

The theory of integral equations is one of the most useful mathematical tools in both pure and applied mathematics. Many initial and boundary value problems associated with ordinary differential equation (ODE) and partial differential equation (PDE) can be transformed into problems of solving some approximate integral equations. However, some initial and boundary value domains are fractal curves, which are everywhere continuous but nowhere differentiable. As a result, we cannot employ the classical calculus, which requires that the defined functions should be differentiable. The theory of local fractional integrals and derivatives are one of useful tools to handle the fractal and continuously non-differentiable functions. It is worth to note the applications of fractional calculus in several scientific areas including special functions, control theory, chemical physics, stochastic processes, anomalous diffusion, etc.

On the other hand, the theory of Conformable Fractional Calculus which is used to calculate the integral and derivative values in between 0 and 1 has become the important place in mathematics. Some researchers established fundamental inequalities such as Hermite-Hadamard, Ostrowski, Grüss and Ostrowski-Grüss.

In this thesis, some basic methods based on local fractal calculus and conformable fractional calculus are used to obtain the new inequalities will be first established. For this, an integral

identity for twice differentiable functions on local fractal spaces will be established. Afterwards, Ostrowski type inequalities for mappings whose second local fractional derivatives in modulus are bounded will be presented by using this equality. Furthermore, with the help of the results obtained in this thesis, some applications for numerical integration and special means will be given.

Second aim of this study is to establish Ostrowski type results for conformable fractional integrals. Two generalized Ostrowski type estimations for mappings whose second conformable fractional derivatives are bounded will be derived, and special cases of these comprehensive inequalities will be observed. Moreover, by using these inequalities, some applications in numerical integrations will be examined.

Keywords: Local Fractional Calculus, Conformable Fractional Calculus, Ostrowski's Inequality, Special Means, Numerical Integration.

Scientific Field Code: 26D07, 26D10, 26D15, 26A33, 41A55.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(\alpha)$	: Gama Fonksiyonu
R	: Reel Sayılar Kümesi
I	: R' nin içinde bir aralık
I^o	: I' nın içi
f'	: f' in birinci türevi
f''	: f' in ikinci türevi
$\lvert f \rvert$	: f' in mutlak değeri
$\lVert . \rVert$	: Norm
$[.,.]$	: Kapalı aralık
$(.,.)$	: Açık aralık
R^{α}	: α-tipi reel sayılar
$f^{(\alpha)}$	: f fonksiyonunun α. mertebeden lokal kesirli türevi
$f^{(k\alpha)}$	: f fonksiyonunun α. mertebeden k defa lokal kesirli türevi
$C_{\alpha}(a,b)$	: (a,b) aralığında lokal sürekli fonksiyonların kümesi
$D_{\alpha}(a,b)$	: (a,b) aralığında α. mertebeden lokal kesirli türevli fonksiyonların kümesi
${}_aI_b^{\alpha}f(x)$	: f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde lokal kesirli integrali
$T_{\alpha}(f)$	: f fonksiyonunun α. mertebeden uyumlu kesirli türevi
$T_{\alpha}^{(2)}(f)$	: f fonksiyonunun α. mertebeden 2 defa uyumlu kesirli türevi
$J_{\alpha}^{a}(f)$	: f fonksiyonunun α. mertebeden uyumlu kesirli integrali
$L_1[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_p[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_{\infty}[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrali sınırlı olan fonksiyonların kümesi
$\lVert f \rVert_{\infty}$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki maksimum değeri

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi, matematiğin hemen hemen her alanında önemli bir yere sahiptir. Matematiksel problemlerde her zaman net sonuçlara ulaşılamaz. Bu durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gerekir. Eşitsizliğin kullanımı çok eski tarihlere dayansa da sistematik olarak kullanılması on dokuzuncu yüzyılın sonu ve yirminci yüzyılın başlarını bulmuştur. A. L. Cauchy, P. L. Cebyshev, C. F. Gauss ve diğer bilim adamlarının çalışmaları, yaklaşım metotlarının temellerini oluşturmada büyük öneme sahiptir. Eşitsizlik teorisi, Hardy, Littlewood ve Polya tarafından kaleme alınan "Inequalities" adlı eserin 1934 yılında yayınlanmasıyla birçok araştırmacının dikkatini çekmeyi başarmıştır (Hardy vd., 1934). Böylece eşitsizlikler sadece matematiğin dallarında değil, aynı zamanda fizik ve mühendislik alanlarında da sıkça başvurulan bir konu haline gelmeye başlamıştır. Bu esere ek olarak, Beckenbach ve Bellman (1965) tarafından hazırlanan "Inequalities" ve Mitrinovic (1970) tarafından sunulan "Analytic Inequalities" adlı kitaplar, eşitsizlik teorisi üzerine araştırma yapan matematikçiler için kullanışlı referanslardır.

Eşitsizlik teorisi, son yüzyılda sürekli gelişimini sürdürmüştür ve bu süreçte eşitsizlikler matematiksel problemlerin çözümünde etkili araçlar haline gelmiştir. Özellikle son 25 yılda, bulan insanların isimlerini taşıyan ve temel eşitsizlikler olan Jensen, Hadamard, Hilbert, Chebyšev, Grüss, Ostrowski, Hardy ve Poincare eşitsizliklerini temel alan çok sayıda eşitsizlik bulunmuştur. Farklı özelliklere sahip fonksiyonların kullanılmasıyla, genelleştirilmiş çekirdekler yardımıyla ya da farklı mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ile yeni eşitsizlikler elde edilmektedir. Böylece, bu yeni eşitsizlikler farklı uygulama alanlarının ortaya çıkmasına yol açmıştır. Örneğin, nümerik integrasyonda kullanılan hata hesaplamalarında, özel ortalamaların yaklaşık değerlerinin belirlenmesinde, tam olarak hesaplanamayan bir değerin tahmin edilmesinde, mühendislikte önemli bir yere sahip olan optimizasyon ve mukavemet hesaplamalarında, haritadaki bir noktanın ya da bir bölgenin yerinin tarifinde eşitsizlikler kullanılmaktadır. Bu bağlamda, eşitsizliklerin daha yakın tahminler verecek şekilde geliştirilmesi matematiğin birçok alanına ve bağlantılı uygulama alanlarına önemli katkılar sağlamıştır.

Diğer yandan, kesirli türev ve integral hesaplamaları ilk olarak Liouville tarafından duyurulmuştur. Daha sonra Leibniz, Euler, Lagrange, Abel ve diğer birçok matematikçinin öncü çalışmaları ile kesirli analiz gelişme göstermiştir. Kesirli hesaplamalar son zamanlarda matematiksel analiz için önemli bir hale gelmiştir. Kesirli integraller ve türevler genellikle çok sayıda araştırmacı tarafından bilinmezdi ve son zamanlara kadar sadece teorik matematik konularında kullanılmıştı. Ancak bu integraller ve türevler son zamanlarda matematiğin birçok uygulama alanında kullanılmıştır. Bu teori özellikle bazı bilimsel alanlarda vazgeçilmez hale gelmiştir. Örneğin, bir kesirli türev olmadan viskoelastik bir süreç tanımlamak mümkün değildir. Elektromanyetik teori, akım teorisi, biyoloji, atmosferik fizik gibi alanlar kesirli teorinin bazı diğer uygulamalarıdır. Ek olarak, matematiğin en önemli uygulama alanlarından biri olan eşitsizlik teorisinde kesirli türevler ve integraller içeren çok sayıda sonuç elde edilmiştir.

Şimdi, tez çalışmasında önemli bir yere sahip olan Ostrowski eşitsizliği ele alınacaktır. Temel Ostrowski eşitsizliği 1938 yılında A. M. Ostrowski (1938) tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$f\ :[a,b]\rightarrow R,\ (a,b)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun öyle ki $f'\ :(a,b)\rightarrow R$ aynı aralık üzerinde sınırlı olsun, yani $\|f'\| = sup_{t\in(a,b)}|f'(t)|$ şartı sağlansın, bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left[\frac{1}{4}+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f'\|_\infty \qquad (1.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir (Ostrowski, 1938).

Literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak tanınan (1.1) eşitsizliği, $x\in[a,b]$ kapalı aralığındaki $f(x)$ değeri yardımıyla

$$\int_a^b f(t)dt$$

integral ortalamasının yaklaşımı için bir üst sınır belirler. Literatürde (1.1) eşitsizliğini temel alan çok sayıda önemli sonuç elde edilmiştir. Bu tezin amacı da ikinci dereceden lokal kesirli türevlere sahip fonksiyonlar ve ikinci dereceden uyumlu kesirli türevlere sahip fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçlar elde etmektir. Bu tez konusu kapsamında yapılan çalışmanın sonucunda elde edilen eşitsizlikler, ana sonuçları elde etmek için gerekli olan lokal kesirli hesaplamalar, uyumlu kesirli hesaplamalar ve literatürdeki gerekli eşitsizlikler hatırlatıldıktan sonra iki ana başlık halinde verilecektir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde; tez çalışmasında elde edilen ana sonuçların bulunmasında önem taşıyan temel kavramlardan bahsedilecektir.

2.1. Bazı Temel Eşitsizlikler

Bu tezin kapsamında elde edilecek yeni eşitsizlikleri temel alan önemli sonuçlardan bahsetmeden önce bazı temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Limit) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon ve k sayısı K kümesinin bir yığılma noktası olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - L| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonunun k noktasındaki limiti L sayısıdır denir ve bu durum

$$\lim_{x \to k} \varphi(x) = L$$

ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.2. (Süreklilik) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - \varphi(k)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonu $k \in K$ noktasında süreklidir denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.3. (Türev) $K \subset R$ olmak üzere $x_0 \in K$, x_0 K’ nın yığılma noktası ve $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

limiti ya da $x = x_0 + h$ alındığında ortaya çıkan

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

limiti varsa φ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevinin değeridir. Ayrıca, φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $\varphi'(x_0)$, $\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ ya da $D\varphi(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir (Balcı, 2012).

Teorem 2.1.2. (İntegraller için üçgen eşitsizliği) φ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\right| \le \int_\alpha^\beta |\varphi(x)|\,dx$$

eşitsizliği sağlanır (Balcı, 2012).

Tek değişkenli fonksiyonlarda türevlenebilme ve diferansiyellenebilme kavramları aynı anlama gelmektedir.

1938 yılında Ostrowski (1938), daha sonra kendi adıyla anılacak olan aşağıdaki temel integral eşitsizliğini ispatlamıştır.

Teorem 2.1.3. (Ostrowski Eşitsizliği) $\varphi : [\alpha,\beta] \to R$, (α,β) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun öyle ki $\varphi' : (\alpha,\beta) \to R$ aynı aralık üzerinde sınırlı olsun, yani $\|\varphi'\|_\infty = \sup_{\xi\in(\alpha,\beta)} |\varphi'(\xi)| < \infty$ şartı sağlansın. Bu bağlamda, her $x \in [\alpha,\beta]$ için

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\,d\xi\right| \le \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right](\beta-\alpha)\|\varphi'\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\frac{1}{4}$ elde edilebilecek en iyi sabittir.

İspat. $\varphi : [\alpha,\beta] \to R$ fonksiyonu (α,β) açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan, her $x \in (\alpha,\beta)$ için tanımlanan

$$\Delta(x,\xi)\ :=\begin{cases}(\xi-\alpha) & ,\alpha\le\xi<x\\ (\xi-\beta) & ,x\le\xi\le\beta\end{cases}$$

ifadesi için

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\Delta(x,\xi)\,\varphi'(\xi)d\xi$$

eşitliği sağlanır. Bu özdeşlik aynı zamanda

$$\varphi(x)-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\varphi(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\Delta(x,\xi)\,\varphi'(\xi)d\xi \tag{2.1}$$

olarak ifade edilebilir. (2.1) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra integraller için üçgen eşitsizliği ve φ fonksiyonunun sınırlılık özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\varphi(x)-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\varphi(\xi)d\xi\right| &(2.2)\\ &\le\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^x(\xi-\alpha)\left|\varphi'(\xi)\right|d\xi+\frac{1}{\beta-\alpha}\int_x^\beta(\beta-\xi)\left|\varphi'(\xi)\right|d\xi\\ &\le\frac{\left\|\varphi'\right\|_\infty}{\beta-\alpha}\left[\int_\alpha^x(\xi-\alpha)d\xi+\int_x^\beta(\beta-\xi)d\xi\right]\\ &=\frac{\left\|\varphi'\right\|_\infty}{\beta-\alpha}\left[\frac{(x-\alpha)^2+(\beta-x)^2}{2}\right]\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^2+(\beta-x)^2\\ &=\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^2+\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)^2\\ &=2(\beta-\alpha)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right]\end{aligned}$$

özdeşliği (2.2) ifadesinin en sağında yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır (Ostrowski, 1938).

Ostrowski eşitsizliği, birçok alanda uygulamalara sahip olduğundan (1.1) eşitsizliği üzerine pek çok araştırmacı yoğunlaşmıştır. Ostrowski eşitsizliği, birinci türevleri sınırlı olan, yani birinci türevleri $L_\infty[\alpha,\beta]$ uzayına ait olan fonksiyonlar için elde edilmiştir. Birinci türevleri $L_p[\alpha,\beta]$ ve $L_1[\alpha,\beta]$ uzaylarına ait fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler ise Dragomir ve Wang (1997; 1998) tarafından sunulmuştur.

İkinci türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli bir eşitsizlik Cerone vd. (1998) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.1.4. $\varphi \; : [\alpha,\beta] \to R$ fonksiyonu iki kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki $\varphi'' \; : \; (\alpha,\beta) \to R$ ifadesi (α,β) açık aralığında sınırlı yani $\|\varphi''\|_\infty = \sup_{\xi\in(\alpha,\beta)} |\varphi''(\xi)| < \infty$ olsun. Bu bağlamda, her $x \in [\alpha,\beta]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi(x) - \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\,d\xi\right| \\
&\leq \left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\|\varphi''\|_\infty \\
&\leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{6}\|\varphi''\|_\infty
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ifadesi sağlanır (Cerone vd., 1998).

İspat. İlk olarak, $\Lambda(\cdot,\cdot) \; : [\alpha,\beta]^2 \to R$ fonksiyonu

$$\Lambda(x,\xi) \; := \begin{cases} \dfrac{(\xi-\alpha)^2}{2} & ,\alpha \leq \xi < x \\[2ex] \dfrac{(\xi-\beta)^2}{2} & ,x \leq \xi \leq \beta \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun tanımı ve iki kez kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \Lambda(x,\xi)\varphi''(\xi)d\xi \\
&= \int_\alpha^x \frac{(\xi-\alpha)^2}{2}\varphi''(\xi)d\xi + \int_x^\beta \frac{(\xi-\beta)^2}{2}\varphi''(\xi)d\xi \\
&= \frac{(\xi-\alpha)^2}{2}\varphi'(\xi)\bigg|_\alpha^x - \int_\alpha^x (\xi-\alpha)\varphi'(\xi)d\xi + \frac{(\xi-\beta)^2}{2}\varphi'(\xi)\bigg|_x^\beta - \int_x^\beta (\xi-\beta)\varphi'(\xi)d\xi \\
&= \frac{(x-\alpha)^2-(\beta-x)^2}{2}\varphi'(x) - \int_\alpha^x (\xi-\alpha)\varphi'(\xi)d\xi - \int_x^\beta (\xi-\beta)\varphi'(\xi)d\xi \\
&= \frac{(x-\alpha)^2-(\beta-x)^2}{2}\varphi'(x) - (\xi-\alpha)\varphi(\xi)|_\alpha^x - (\xi-\beta)\varphi(\xi)|_x^\beta + \int_\alpha^\beta \varphi(\xi)d\xi \\
&= (\beta-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) - (\beta-\alpha)\varphi(x) + \int_\alpha^\beta \varphi(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Bu durumda, her $x \in [\alpha,\beta]$ için

$$
\varphi(x) - \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \Lambda(x,\xi)\varphi''(\xi)d\xi \quad (2.4)
$$

özdeşliği yazılır.

(2.4) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa, $\Lambda(x,\xi)$ ifadesinin tanımı ve φ'' fonksiyonunun sınırlılık özelliğinden dolayı,

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi(x) - \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)d\xi\right| \qquad (2.5) \\
&\le \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta |\Lambda(x,\xi)||\varphi''(\xi)|d\xi \\
&\le \frac{\|\varphi''\|_\infty}{\beta-\alpha}\left[\int_\alpha^x \left|\frac{(\xi-\alpha)^2}{2}\right|d\xi + \int_x^\beta \left|\frac{(\xi-\beta)^2}{2}\right|d\xi\right] \\
&= \frac{\|\varphi''\|_\infty}{\beta-\alpha}\left[\frac{(\xi-\alpha)^3}{6}\bigg|_\alpha^x + \frac{(\xi-\beta)^3}{6}\bigg|_x^\beta\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(\beta - x)^3 + (x - \alpha)^3}{6(\beta - \alpha)} \|\varphi''\|_\infty$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
&(\beta - x)^3 + (x - \alpha)^3 \\
&= (\beta - \alpha)[(\beta - x)^2 + (x - \alpha)^2 - (\beta - x)(x - \alpha)] \\
&= (\beta - \alpha)[(\beta - x + x - \alpha)^2 - 3(\beta - x)(x - \alpha)] \\
&= (\beta - \alpha)\left[(\beta - \alpha)^2 + 3\left[\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2\right]\right] \\
&= (\beta - \alpha)\left[3\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

eşitliği (2.5) ifadesinin en sağında yerine yazılırsa (2.3) sonucu kolaylıkla elde edilir ve böylece ispat tamamlanır (Cerone vd., 1998).

Teorem 2.1.5. $\varphi \ : [\alpha, \beta] \to R$ fonksiyonu iki kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki $\varphi'' \ : \ (\alpha, \beta) \to R$ ifadesi (α, β) açık aralığında sınırlı yani $\|\varphi''\|_\infty = \sup_{\xi \in (\alpha, \beta)} |\varphi''(\xi)| < \infty$ olsun. Bu bağlamda, her $x \in [\alpha, \beta]$ için

$$\left|\varphi(x) - \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha}\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi) d\,\xi\right| \tag{2.6}$$

$$\leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\left\{\left[\left(\frac{x - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\beta - \alpha}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{12}\right\} \|\varphi''\|_\infty$$

$$\leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{6} \|\varphi''\|_\infty$$

ifadesi sağlanır (Dragomir ve Barnett, 1998).

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla elde edilen

$$\int_{\alpha}^{x} (\xi-\alpha)\varphi'(\xi)d\xi = (x-\alpha)\varphi(x) - \int_{\alpha}^{x} \varphi(\xi)d\xi$$

ve

$$\int_{\alpha}^{x} (\xi-\beta)\varphi'(\xi)d\xi = (\beta-x)\varphi(x) - \int_{x}^{\beta} \varphi(\xi)d\xi$$

integral özdeşlikleri kullanıldığında, $\Delta(x,\xi)$ çekirdeği için verilen (2.1) özdeşliği tekrar elde edilebilir. (2.1) özdeşliğinde $\varphi(\cdot)$ yerine $\varphi'(\cdot)$ fonksiyon yazılırsa

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(\xi)d\xi + \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(\tau,\xi)\varphi''(\xi)d\xi$$

ifadesi elde edilebilir. Bu durumda,

$$\varphi'(\tau) = \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(\tau,\xi)\varphi''(\xi)d\xi \tag{2.7}$$

sonucu bulunur. Eğer (2.7) sonucunun her iki tarafı $\Delta(x,\tau)$ ile çarpılır ve daha sonra $[\alpha,\beta]$ aralığında τ' ya göre integral alınırsa

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(\tau)\Delta(x,\tau)d\tau$$
$$= \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x,\tau)d\tau + \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x,\tau)\Delta(\tau,\xi)\varphi''(\xi)d\xi d\tau$$

bulunur. Aynı zamanda, (2.1) özdeşliğinden ve

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x,\tau)d\tau = \int_{\alpha}^{x} (\tau-\alpha)d\tau + \int_{x}^{\beta} (\tau-\beta)d\tau$$
$$= (\beta-\alpha)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

ifadesinden dolayı,

$$\varphi(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)d\xi - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\int_{\alpha}^{\beta}\Delta(x,\tau)\,\Delta(\tau,\xi)\varphi''(\xi)d\xi d\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra, $\Delta(.,.)$ ifadesinin tanımı ve φ'' fonksiyonunun sınırlılık özelliği kullanılırsa, (2.6) sonucu bulunur (Dragomir ve Barnett, 1998).

Ostrowski eşitsizliği geniş bir uygulama alanına sahip olduğundan, farklı tipte fonksiyonlar ve genelleştirilmiş çekirdekler kullanılarak birçok Ostrowski tipli eşitsizlik ispatlanmıştır. Bu tarz çalışmaların sayısı çok fazla olduğundan, burada sadece emsal çalışmalardan bahsedilecektir. Örneğin, Dragomir (2015) mutlak sürekli fonksiyonlar için önemli Ostrowski tipli eşitsizlikler vermiştir. Aynı makalede, bu eşitsizliklerle bağlantılı olan çok sayıda uygulama da sunulmuştur. Ayrıca, bazı matematikçiler ikinci türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için genelleştirilmiş yeni eşitsizlikler ortaya koymuşlardır (Dragomir ve Sofo, 2000; Zafar ve Mir, 2009; Qayyum vd., 2014; Erden vd., 2016). Sarıkaya ve Erden (2016), ikinci türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir. İki değişkenli fonksiyonlar için Ostrowski tipli bazı eşitsizlikler ise Sarıkaya tarafından ispatlanmıştır (Sarıkaya, 2010; Sarıkaya, 2012). Bu çalışmalara ek olarak, farklı bir fonksiyon türü olan konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler için Tunç (2013) ve Sarıkaya ve Erden (2014) tarafından sunulan çalışmalar incelenebilir.

2.2. Lokal Kesirli Hesaplamalar için Bazı Önemli Kavramlar

Giriş bölümünde bahsedilen Riemann, Liouville, Leibniz, Euler, Lagrange, Abel ve birçok matematikçinin üzerine çalıştığı kesirli türev ve integral operatörleri, lokal olmayan operatörlerdir. Bu çalışmalar, sürekli fonksiyonların en azından bir noktada türevlenebilir olduğu düşünülerek hareket edilmiştir, fakat fraktal kümeler lokal ölçekleme özelliğine sahiptir. Bu durum, Karl Weierstrass tarafından 1872 sunulan her yerde sürekli ama hiçbir yerde türevlenemeyen

$$W_{\lambda}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin \lambda^{k} \xi \quad (\xi \in R,\ \lambda > 1,\ 1 < s < 2)$$

Weiestrass fonksiyonu ile değişmiştir (Kolwankar ve Gangal, 1996). Bu şekilde verilen düzensiz fonksiyonların grafikleri fraktallara benzer, bu yüzden düzensiz olan bu fonksiyonlara fraktal fonksiyonlar da denir. Klasik analiz yöntemleri, fraktal fonksiyonlar içeren problemlerin çözümlerinde yetersiz kalmıştır. Böylece, lokal kesirli hesaplamalar birçok araştırmacının dikkatini çeken önemli bir matematiksel konu haline gelmiştir.

Kesirli uzaylar, Mandelbort tarafından kaleme alınan şimdilerde ise bir klasik olan kitaptan itibaren mühendislikten mikro ve makro fiziğe kadar birçok alanda kullanılan bir yöntem haline gelmiştir (Yang, 2011; Yang 2012a). Kesikli uzayda en sık kullanılan kesikli türev ise Chen (2013) ve Yang (2012a) tarafından ele alınmıştır. Yerel kesirli fonksiyonel analiz ise Yang (2011) tarafından ele alınmış ve yerel kesirli türev ve yerel kesirli integral operatörleri tanımlanmıştır. Bu çalışmaların ardından, çok sayıda araştırmacı lokal kesirli teorinin matematik, mühendislik ve fizik gibi birçok farklı alandaki uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır (Yang, 2012b; Yang, 2012c; Yang vd., 2013). Daha sonra, bazı matematikçiler tarafından yerel kesirli türev ve yerel kesirli integral tanımları kullanılarak Hölder, Hermite-Hadamard, Ostrowski, Simpson gibi önemli eşitsizlikler kesirli uzaylar için tekrar ispatlanmış ve bu eşitsizliklerle bağlantılı çok sayıda yeni sonuç verilmiştir. (Chen, 2013; Mo vd., 2014; Sarıkaya ve Budak, 2016; Sarıkaya vd., 2016, Sarıkaya vd., 2019).

Şimdi lokal kesirli hesaplamalar için bazı önemli kavram, tanım ve teoremler verilecektir. Yang (Yang, 2011; Yang 2012a), yerel kesirli türev ve integrali, kesirli geometri bakış açısından yorumlamıştır. İlk olarak, kesirli türev ve integral tanımlarını daha iyi anlamak için α-tipi kümeler ve α-tipi reel sayı kümesindeki işlem özelliklerinden bahsedilecektir. Buna göre; kesirli uzayda ele alınan Ω kümesinin α-tipi kümeleri $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Ω^{α} olarak tanımlanır. Ω^{α} kümesine Ω kümesinin kesirli kümesi denir.

$0 < \alpha \leq 1$ için α-tipi kümeler

N^{α}: α-tipi doğal sayılar $\{0^{\alpha}, 1^{\alpha}, 2^{\alpha}, \dots, n^{\alpha}, \dots\}$,

Z^{α} : α-tipi tam sayılar $\{0^{\alpha}, \pm 1^{\alpha}, \pm 2^{\alpha}, \dots, \pm n^{\alpha}, \dots\}$,

Q^{α}: α-tipi rasyonel sayılar $\left\{m^{\alpha} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\alpha} : \mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathrm{Z}, \mathrm{q} \neq 0\right\}$,

J^α: α-tipi irrasyonel sayılar $\left\{m^\alpha \neq \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : \mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathrm{Z}, \mathrm{q} \neq 0\right\}$,

R^α: α-tipi reel sayılar $R^\alpha = Q^\alpha \cup J^\alpha$

şeklinde tanımlanmıştır.

$\sigma^\alpha, \rho^\alpha,\ \varsigma^\alpha \in R^\alpha$ olmak üzere

(1) $\sigma^\alpha + \rho^\alpha$ ve $\sigma^\alpha \rho^\alpha$ ifadeleri R^α ' nn elemanlarıdır;

(2) $\sigma^\alpha + \rho^\alpha = \rho^\alpha + \sigma^\alpha = (\sigma + \rho)^\alpha = (\rho + \sigma)^\alpha$;

(3) $\sigma^\alpha + (\rho^\alpha + \varsigma^\alpha) = (\sigma + \rho)^\alpha + \varsigma^\alpha$;

(4) $\sigma^\alpha \rho^\alpha = \rho^\alpha \sigma^\alpha = (\sigma\rho)^\alpha = (\rho\sigma)^\alpha$;

(5) $\sigma^\alpha(\rho^\alpha \varsigma^\alpha) = (\sigma^\alpha \rho^\alpha)\varsigma^\alpha$;

(6) $\sigma^\alpha(\rho^\alpha + \varsigma^\alpha) = \sigma^\alpha \rho^\alpha + \sigma^\alpha \varsigma^\alpha$;

(7) $\sigma^\alpha + 0^\alpha = 0^\alpha + \sigma^\alpha = \sigma^\alpha$ ve $\sigma^\alpha 1^\alpha = 1^\alpha \sigma^\alpha = \sigma^\alpha$

özellikleri sağlanır.

Kesirli uzayda yapılan işlemler için gerekli olan lokal kesirli süreklilik, lokal kesirli türev ve lokal kesirli integral ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Bu bölümde verilecek olan tanım, teorem ve kurallar Yang (2011; 2012a) tarafından yazılan kitaplarda ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2.1. $A \subset R,\ \psi\ :\ A \to R^\alpha$ olmak üzere $x \to \psi(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olmayan bir fonksiyon olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - x_0| < \delta$ iken $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ şartını sağlayan en az bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\psi(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında lokal kesirli süreklidir denir (Yang, 2012a).

$\psi(x)$ fonksiyonunun (σ, ρ) aralığında lokal sürekli olması, kısaca $\psi \in C_\alpha(\sigma, \rho)$ ile gösterilir. Eğer $\psi(x)$ fonksiyonu A kümesinin her noktasında lokal kesirli sürekli ise ψ fonksiyonu A kümesi üzerinde lokal kesirli süreklidir denir.

Tanım 2.2.2. $\psi \in C_\alpha(\sigma, \rho)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer

$$ {}_{x_0}D_x^\alpha \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta^\alpha(\psi(x) - \psi(x_0))}{(x - x_0)^\alpha} $$

limiti var ve sonlu ise bu limite $\psi(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden lokal kesirli türevi denir. Burada, $\Delta^{\alpha}(\psi(x) - \psi(x_0)) = \Gamma(\alpha + 1)(\psi(x) - \psi(x_0))$ şeklinde tanımlanırken $\Gamma(\alpha)$ ifadesi

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan klasik Euler Gama fonksiyonudur. $\psi(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden lokal kesirli türevi

$$\psi^{(\alpha)}(x_0) \quad \text{veya} \quad \left.\frac{d^{\alpha}\psi(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x=x_0}$$

ifadeleri ile gösterilir (Yang, 2012a).

Her $x \in I \subseteq R$ ve $k = 0,1,2,\ldots$ için $\psi^{(k+1)\alpha}(x) = \overbrace{D_x^{\alpha}\ldots D_x^{\alpha}}^{k+1 \text{ kere}}\psi(x)$ lokal kesirli türevi varsa bu durum kısaca $\psi \in D_{(k+1)\alpha}(I)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1. $\psi, \phi \in D_{\alpha}(\sigma, \rho)$ ise aşağıdaki türev alma kuralları geçerlidir.

a) c sabit bir sayı olmak üzere $\frac{d^{\alpha}[c\psi(x)]}{dx^{\alpha}} = c\,\frac{d^{\alpha}\psi(x)}{dx^{\alpha}}$;

b) $\frac{d^{\alpha}[\psi(x)\pm\phi(x)]}{dx^{\alpha}} = \frac{d^{\alpha}\psi(x)}{dx^{\alpha}} \pm \frac{d^{\alpha}\phi(x)}{dx^{\alpha}}$;

c) $\frac{d^{\alpha}[\psi(x)\phi(x)]}{dx^{\alpha}} = \phi(x)\frac{d^{\alpha}\psi(x)}{dx^{\alpha}} + \psi(x)\frac{d^{\alpha}\phi(x)}{dx^{\alpha}}$;

d) $\frac{d^{\alpha}\left[\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right]}{dx^{\alpha}} = \frac{\phi(x)\frac{d^{\alpha}\psi(x)}{dx^{\alpha}} - \psi(x)\frac{d^{\alpha}\phi(x)}{dx^{\alpha}}}{\phi^2(x)}$;

e) $\frac{d^{\alpha}[(\psi\circ\phi)(x)]}{dx^{\alpha}} = \frac{d^{\alpha}\psi(\phi(x))}{dx^{\alpha}}[\phi'(x)]^{\alpha}$.

Sonuç 2.2.1. m sabit bir sayı olmak üzere $\psi(x) = x^{m\alpha}$ alınırsa

$$\frac{d^{\alpha}\psi(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{\Gamma(1 + m\alpha)}{\Gamma(1 + (m-1)\alpha)} x^{(m-1)\alpha}$$

türevi elde edilir.

Teorem 2.2.2. ψ fonksiyonu türevlenebilir olduğu aralıkta süreklidir. Diğer bir ifadeyle, $\psi \in D_\alpha(\sigma,\rho)$ ise $\psi \in C_\alpha(\sigma,\rho)$ olur.

Tanım 2.2.3. $\psi \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ ve $0 < \alpha \le 1$ olsun. $\sigma = \xi_0 < \xi_1 <\ldots< \xi_{N-1} < \xi_N = \rho$ olmak üzere $j = 0,\ldots,N-1$ için verilen $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ aralığı $[\sigma,\rho]$ kapalı aralığının bir bölüntüsü olsun. Bu bağlamda, ψ fonksiyonunun $[\sigma,\rho]$ aralığı üzerindeki lokal kesirli integrali

$$ {}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_\sigma^\rho \psi(\xi)(\,d\xi)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{\Delta\xi \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} \psi(\xi_j)(\,\Delta\xi_j)^\alpha $$

şeklinde tanımlanır. Bu integralde yer alan $\Gamma(\alpha)$ ifadesi (2.8) da tanımlanan klasik Euler Gama fonksiyonu, $\Delta\xi_j = \xi_{j+1} - \xi_j$ ve $\Delta\xi = max\{\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \ldots, \Delta\xi_{N-1}\}$ şeklindedir (Yang, 2012a).

Eğer $\sigma = \rho$ ise ${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) = 0$ olduğu ve $\sigma < \rho$ ise ${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) = -{}_\rho I_\sigma^\alpha \psi(x)$ olduğu tanımdan kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, her $x \in [\sigma,\rho]$ için ${}_\sigma I_x^\alpha \psi(x)$ integrali mevcut ise $\psi(x) \in I_x^\alpha[\sigma,\rho]$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.2.3. $\psi, \phi \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ ise aşağıdaki lokal kesirli integral kuralları geçerlidir.

a) c sabit bir sayı olmak üzere ${}_\sigma I_\rho^\alpha[c\psi(x)] = c\,{}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x)$;

b) ${}_\sigma I_\rho^\alpha[\psi(x) \pm \phi(x)] = {}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) \pm {}_\sigma I_\rho^\alpha \phi(x)$;

c) $\sigma < \varsigma < \rho$ olmak üzere ${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) = {}_\sigma I_\varsigma^\alpha \psi(x) + {}_\varsigma I_\rho^\alpha \psi(x)$;

d) Eğer $\psi(x) \ge 0^\alpha$ ise ${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) \ge 0^\alpha$;

e) Eğer $\psi(x) \ge \phi(x)$ ise ${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) \ge {}_\sigma I_\rho^\alpha \phi(x)$;

f) $\left|{}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x)\right| = {}_\sigma I_\rho^\alpha |\psi(x)|$ (Yang, 2012a).

Teorem 2.2.4. $\psi \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ ve $0 < \alpha \le 1$ olsun. $\psi(x)$ fonksiyonunun $[\sigma,\rho]$ aralığındaki maksimum değeri M ve minimum değeri m ise

$$M\frac{(\rho-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \geq {}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) \geq m\frac{(\rho-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Yang, 2012a).

Sonuç 2.2.2. c ve m sabit sayılar olmak üzere, aşağıdaki integral alma kuralları geçerlidir.

a) ${}_\sigma I_\rho^\alpha[c] = c\frac{(\rho-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$;

b) ${}_\sigma I_\rho^\alpha[x^{m\alpha}] = \frac{\Gamma(1+m\alpha)}{\Gamma(1+(m+1)\alpha)}\left(\rho^{(m+1)\alpha} - \sigma^{(m+1)\alpha}\right)$.

Teorem 2.2.5. (Lokal Kesirli İntegraller için Ortalama Değer Teoremi) $\psi \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

$${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) = \psi(\tau)\frac{(\rho-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

olacak şekilde en az bir $\tau \in [\sigma,\rho]$ vardır (Yang, 2012a).

Tanım 2.2.4. $\psi \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $\phi(x) = {}_\sigma I_x^\alpha \psi(x)$ olacak şekilde bir $\phi(x) \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ fonksiyonu vardır ve bu fonksiyonun $\sigma < x < \rho$ değerleri için lokal kesirli türevi

$$\frac{d^\alpha \phi(x)}{dx^\alpha} = \psi(x)$$

şeklinde tanımlanır (Yang, 2012a).

Teorem 2.2.6. (Lokal Kesirli İntegral için Newton-Leibniz Formülü) ψ, $[\sigma,\rho]$ aralığında tanımlı ve aynı aralık üzerinde lokal kesirli integrallenebilir olsun. Her $x \in (\sigma,\rho)$ için $\psi(x) = \phi^{(\alpha)}(x) \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ olacak şekilde bir ϕ fonksiyonu varsa

$${}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(x) = \phi(\rho) - \phi(\sigma)$$

özdeşliği sağlanır (Yang, 2012a).

Teorem 2.2.7. $\phi(x) \in C_1[\sigma, \rho]$ ve $\psi \circ \phi \in C_\alpha[\phi(\sigma), \phi(\rho)]$ olsun. Bu bağlamda,

$$_{\phi(\sigma)}I^{\alpha}_{\phi(\rho)}\psi(x) = {}_{\sigma}I^{\alpha}_{\rho}(\psi \circ \phi)(x)[\phi'(x)]^{\alpha}$$

eşitliği sağlanır (Yang, 2012a).

Teorem 2.2.8. (Kısmi Lokal Kesirli İntegrasyon) $\psi(x), \phi(x) \in D_\alpha[\sigma, \rho]$ ve $\psi^{(\alpha)}(x)$, $\phi^{(\alpha)}(x) \in C_\alpha[\sigma, \rho]$ olsun. O zaman,

$$_{\sigma}I^{\alpha}_{\rho}\psi(x)\phi^{(\alpha)}(x) = \psi(x)\phi(x)|^{\rho}_{\sigma} - {}_{\sigma}I^{\alpha}_{\rho}\psi^{(\alpha)}(x)\phi(x)$$

integral özdeşliği sağlanır (Yang, 2012a).

2.3. Uyumlu Kesirli Hesaplamalar için Bazı Önemli Kavramlar

Başta Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri olmak üzere literatürde yer alan kesirli türev tanımlarının büyük bir çoğunluğu integral tabanlıdır. Literatürde yer alan bütün kesirli türev tanımlarının klasik türevle tek ortak özelliği lineer olmalarıdır. Kesirli türev tanımlarının bunun dışındaki özellikleri klasik türev tanımı ile örtüşmemektedir. Örneğin, sabit fonksiyonun klasik türevi sıfır iken Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır olmamaktadır. Bunun yanı sıra, klasik türevde yer alan iki fonksiyonun çarpımı, iki fonksiyonun bölümü ve zincir kuralları kesirli türevlerde geçerli değildir.

Khalil vd. (2014) klasik türevin doğal bir genelleştirmesi olan kesirli türev tanımını ortaya koymuştur. Bu kesirli türev tanımı klasik türev ile olan uyumundan dolayı uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılmıştır. Önceki paragrafta bahsettiğimiz diğer kesirli türevler için sağlanmayan iki fonksiyonun çarpımı ve bölümü kuralları uyumlu kesirli türevler için sağlanmaktadır. Aynı zamanda, zincir kuralı da klasik türeve çok yakın bir şekilde ifade edilebilmektedir. Bu konu, bütün bu özelliklerinden dolayı birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Mesela, Abdeljawad (2015) sağ ve sol uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirli zincir kuralını, integrasyon formüllerini, uyumlu kesirli kuvvet seri açılımını, Laplace dönüşümünü ve Gronwall eşitsizliğini sunarak bu konunun gelişmesine büyük katkılar sağlamıştır.

Bu kısımda, uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar verilecektir (Khalil vd., 2014; Abdeljawad, 2015).

Tanım 2.3.1. (Uyumlu Kesirli Türev) $f\ :[0,\infty)\rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için f fonksiyonunun uyumlu kesirli türev diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t)=lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. f nin $\alpha.$ mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ ifadesi de kullanılabilir. Ayrıca, $\alpha.$ mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f , α $-$diferansiyellenebilirdir denir (Khalil vd., 2014).

Eğer f fonksiyonu $a>0$ olmak üzere bazı $(0,a)$ aralıklarında α $-$diferansiyellenebilir ve $lim_{t\rightarrow 0^+}f^{(\alpha)}(t)$ oluşursa, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0)=lim_{t\rightarrow 0^+}f^{(\alpha)}(t)$$

olur. Aynı zamanda,

$$T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}f'(t) \tag{2.9}$$

özdeşliği sağlanır ve burada

$$f'(t)=lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{f(t+\varepsilon)-f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.1. $f\ :[0,\infty)\rightarrow R$ fonksiyonu $t_0>0$ noktasında $\alpha\in(0,1)$ için α $-$diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir denir (Khalil vd., 2014).

Aşağıdaki teoremde verilen uyumlu kesirli türev kuralları önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.3.2. $\alpha \in (0,1]$ için f ve g fonksiyonları, $t > 0$ olmak üzere a noktasında $\alpha -$diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,

1. Her $a, b \in R$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$,
2. Her sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için $T_\alpha(\lambda) = 0$,
3. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$,
4. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

kuralları sağlanır (Khalil vd., 2014).

Tanım 2.3.2. (Uyumlu Kesirli İntegral) $\alpha \in (0,1]$ ve $0 \leq a < b$ olsun. Eğer

$$\int_a^b f(x) d_\alpha x \ := \int_a^b f(x) x^{\alpha-1} dx \tag{2.10}$$

integrali var ve sınırlı ise $f\ : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında α-kesirli integrallenebilirdir denir (Khalil vd., 2014).

f fonksiyonunun $\alpha \in (0,1]$ için uyumlu kesirli integrali $J_\alpha^a(f)$ ile gösterilmek üzere

$$J_\alpha^a(f)(t) = J_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

eşitliği sağlanır, bu özdeşliğin sağındaki integral klasik Riemann integralidir (Khalil vd., 2014).

Teorem 2.3.3. $f\ : (a, b) \to R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda tüm $t > a$ değerleri için

$$J_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a)$$

olur (Khalil vd., 2014).

Teorem 2.3.4. $f\ :[a,\infty)\rightarrow R$ bir fonksiyon olsun öyle ki $n\in N$ olmak üzere $f^{(n)}(t)$ ifadesi sürekli ve $\alpha\in(n,n+1]$ olsun. O zaman, her $t>a$ için

$$T_\alpha^a J_\alpha^a f(t)=f(t)$$

ifadesi sağlanır (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.3.5. (Uyumlu Kesirli İntegraller için Kısmi İntegrasyon Kuralı) $f,g\ :[a,b]\rightarrow R$ iki fonksiyon olsun öyleki fg diferansiyellenebilirdir. Bu durumda,

$$\int_a^b f(x)T_\alpha^a(g)(x)d_\alpha x=fg|_a^b-\int_a^b g(x)T_\alpha^a(f)(x)d_\alpha x$$

kısmi integrasyon kuralı sağlanır (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.3.6. (Uyumlu Kesirli İntegraller için Üçgen Eşitsizliği) $f\ :[a,b]\rightarrow R$ fonksiyonu $0\leq a<b$ olmak üzere $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. O halde

$$|J_\alpha^a(f)(x)|\leq J_\alpha^a|f|(x)$$

integral eşitsizliği sağlanır (Anderson, 2016).

Ayrıca uyumlu kesirli integrallerle ilgili literatürde bu tezin konusuyla bağlantılı birçok çalışma bulunmaktadır. Uyumlu kesirli hesaplamaların gelişmesinde ve matematiksel uygulamalarının kullanılmasında öne çıkan bazı çalışmalar bulunmaktadır (Khalil vd., 2014; Abu Hammad ve Khalil, 2014; Abdeljawad, 2015; Abdeljawad vd., 2015; Iyiola ve Nwaeze, 2016). Bunlara ek olarak, Anderson (2016) bu tezde sıkça ele alınan Ostrowski eşitsizliğine ek olarak Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Steffensen Eşitsizliği ve Chebyshev eşitsizliği gibi birçok temel eşitsizliğin uyumlu kesirli integraller içeren versiyonlarını ispatlamıştır. Çok sayıda matematikçi uyumlu kesirli integraller içeren eşitsizlikler üzerine çalışmış ve bu makalelerin bazıları referanslarda verilmiştir (Khan vd., 2018; Usta vd., 2018; Erden, 2020).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde; tez konusu kapsamında elde edilecek olan yeni sonuçlara ilham kaynağı olan bazı önemli eşitsizlikler ve onların ispat yöntemlerinden bahsedilecektir.

3.1. İkinci Türevi Sınırlı Olan Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Sonuçlar

Literatürde ikinci mertebeden türevleri sınırlı fonksiyonlar için verilen (2.3) ve (2.6) temel Ostrowski tipli eşitsizliklerin yanı sıra bu tarz fonksiyonlar kullanılarak elde edilen çok sayıda sonuç bulunmaktadır. Bu tezin kesirli türev ve integraller ile oluşturulan ana sonuçlarının bulunmasında ilham kaynağı olan özdeşlik ve eşitsizliklerin klasik integral ve türev ile elde edilen versiyonları bu bölümde sunulacaktır.

İlk olarak, birinci türevi sınırlı olan fonksiyonlar için verilen aşağıdaki eşitsizlik ele alınacaktır (Dragomir vd., 2000).

Teorem 3.1.1. $\varphi\ :[\alpha,\beta]\to R$, $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde sürekli ve (α,β) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonunun türevi $\varphi'\ :(\alpha,\beta)\to R$ aynı aralık üzerinde sınırlı ise, $\|\varphi'\|_\infty = \sup_{\xi\in(\alpha,\beta)} |\varphi'(\xi)| < \infty$, o zaman her $h\in[0,1]$ ve $\alpha + h\frac{\beta-\alpha}{2} \le x \le \beta - h\frac{\beta-\alpha}{2}$ için

$$\left|(1-h)\varphi(x) + h\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} - \frac{1}{(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\,d\xi\right| \tag{3.1}$$
$$\le \frac{\|\varphi'\|_\infty}{\beta-\alpha}\left[\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2\left[(h-1)^2+h^2\right] + \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir vd., 2000).

İspat. Teorem 2.1.3 de verilen temel Ostrowski eşitsizliğinin ispatında kullanılan yöntemler,

$$K(x,\xi)\ := \begin{cases} \left(\xi-\alpha-h\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right) & ,\alpha\le\xi<x \\[2ex] \left(\xi-\beta+h\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right) & ,x\le\xi\le\beta \end{cases}$$

çekirdeği kullanılarak aynı sıra izlenirse, o zaman (3.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.1. Eğer (3.1) eşitsizliğinde $h = 0$ alınırsa, (3.1) sonucu (1.1) temel Ostrowski eşitsizliğine dönüşür (Dragomir vd., 2000).

(3.1) eşitsizliğinin ikinci mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar kullanılarak elde edilen versiyonu ise Qayyum vd. (2014) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.1.2. $\varphi \ : [\alpha, \beta] \to R$, $[\alpha, \beta]$ aralığı üzerinde sürekli ve (α, β) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonunun ikinci türevi $\varphi'' \ : (\alpha, \beta) \to R$ aynı aralık üzerinde sınırlı ise, $\|\varphi''\|_\infty = \sup\limits_{\xi \in (\alpha, \beta)} |\varphi''(\xi)| < \infty$, o zaman her $h \in [0,1]$ ve $\alpha + h\frac{\beta-\alpha}{2} \leq x \leq \beta - h\frac{\beta-\alpha}{2}$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|(1-h)\varphi(x) - (1-h)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) + h\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} \\
&-h^2(\beta-\alpha)\frac{\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha)}{8} - \frac{1}{(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\, d\xi\Bigg| \\
&\leq \left[(1-h)\left(\left(\frac{(1-h)^2(\beta-\alpha)^2}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)\right. \\
&\left. + \frac{h^3(\beta-\alpha)^2}{24}\right]\|\varphi''\|_\infty \\
&\leq [3(1-h)^2 + 1]\frac{(\beta-\alpha)^2}{24}\|\varphi''\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır (Qayyum vd., 2014).

İspat. Teorem 2.1.4' de sunulan eşitsizliğin ispatında kullanılan yöntemler,

$$L(x,\xi) \ := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\xi - \alpha - h\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 & , \alpha \leq \xi < x \\ \frac{1}{2}\left(\xi - \beta + h\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 & , x \leq \xi \leq \beta \end{cases}$$

çekirdeği kullanılarak aynı sıra izlenirse, o zaman (3.2) sonucu bulunur.

Sonuç 3.1.2. Eğer (3.2) eşitsizliklerinde $h = 0$ alınırsa, (3.2) sonucu (2.3) ifadesine dönüşür (Qayyum vd., 2014).

Zafar ve Mir (2009), $K(x,\xi)$ çekirdeğini ve Teorem 2.1.5' in ispatında izlenen yöntemleri kullanarak aşağıdaki eşitsizliği sunmuşlardır.

Teorem 3.1.3. $\varphi\ : [\alpha,\beta] \to R$ fonksiyonunun birinci türevi $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli ve $\varphi'' \in L_\infty[a,b]$ olsun. Bu durumda, her $h \in [0,1]$ ve $\alpha + h\frac{\beta-\alpha}{2} \le x \le \beta - h\frac{\beta-\alpha}{2}$ için

$$\left|\frac{1}{(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\left[(1-h)\varphi(x) + (1+h)\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-(1-h)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) - h(\beta-\alpha)\frac{\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha)}{4}\right]\right|$$
$$\le \frac{1}{(\beta-\alpha)}\left[\frac{1}{3}\left|x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^3 + \frac{(\beta-\alpha)^3}{48}\Psi(h)\right]\|\varphi''\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\Psi(h)$ fonksiyonu

$$\Psi(h) = (1-h)[2(1-h)^2 - 1] + 2h$$

olarak tanımlanmaktadır (Zafar ve Mir, 2009).

Gonska vd. (2012) kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini kullanarak Ostrowski-Grüss tipli eşitsizlikler elde etmek için

$$G(x,\xi)\ := \begin{cases} \left(\xi - \alpha - h\left(x - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) & ,\alpha \le \xi < x \\ \left(\xi - \beta - h\left(x - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) & ,x \le \xi \le \beta \end{cases}$$

çekirdeğini kullanmışlardır. Bu çekirdeğin biraz daha gelişmiş bir versiyonunu kullanan

Erden vd. (2016), ikinci dereceden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli farklı sonuçlar elde etmiştir.

Lemma 3.1.1. $I°$ ifadesi I' nın içini göstermek üzere $\varphi : I \subset R \to R$ fonksiyonu $I°$ üzerinde iki kez diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\alpha < \beta$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \in I°$ değerleri için $\varphi'' \in L[\alpha, \beta]$ oluyorsa, o zaman her $h \in [0,2]$ ve $x \in [\alpha, \beta]$ için

$$\frac{1}{2(\beta-\alpha)}\int_{\alpha}^{\beta} G(x,\xi)\,\varphi''(\xi)d\xi \tag{3.3}$$
$$= \frac{h-2}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) + \varphi(x) - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{2(\beta-\alpha)}m_h(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\,d\xi$$

özdeşliği geçerlidir. Burada, $m_h(x) = h\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ve $H(x,\xi)$ ifadesi

$$H(x,\xi) \;:= \begin{cases} (\alpha-\xi)(\xi-\alpha-m_h(x)) & ,\alpha \le \xi < x \\ (\beta-\xi)(\xi-\beta-m_h(x)) & ,x \le v \le \beta \end{cases}$$

olarak tanımlanmaktadır (Erden vd., 2016).

İspat. İki kez kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\int_{\alpha}^{\beta} H(x,\xi)\,\varphi''(\xi)d\xi$$
$$= \int_{\alpha}^{x}(\alpha-\xi)\,(\xi-\alpha-m_h(x))\varphi''(\xi)d\xi + \int_{x}^{\beta}(\beta-\xi)\,(\xi-\beta-m_h(x))\varphi''(\xi)d\xi$$
$$= (\alpha-x)(x-\alpha-m_h(x))\varphi'(x) - \int_{\alpha}^{x}(-2\xi+2\alpha+m_h(x))\,\varphi'(\xi)d\xi$$
$$-(\beta-x)(x-\beta-m_h(x))\varphi'(x) - \int_{x}^{\beta}(-2\xi+2\beta+m_h(x))\,\varphi'(\xi)d\xi$$
$$= [(\alpha-x)(x-\alpha-m_h(x)) - (\beta-x)(x-\beta-m_h(x))]\varphi'(x)$$
$$+2(\beta-\alpha)\varphi(x) - [\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)]m_h(x) - 2\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\,d\xi$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra, temel analiz işlemleri kullanılırsa (3.3) özdeşliği elde edilir.

Teorem 3.1.4. I° ifadesi I' nın içini göstermek üzere $\varphi : I \subset R \to R$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\alpha < \beta$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \in I^{\circ}$ değerleri için $\varphi'' : (\alpha, \beta) \to R$ fonksiyonu sınırlı ise, $\|\varphi''\|_{\infty} = \sup_{\xi \in (\alpha,\beta)} |\varphi''(\xi)| < \infty$, o zaman her $h \in [0,2]$ olmak üzere $\alpha \leq x \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ için

$$\left| \frac{h-2}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) + \varphi(x) - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{2(\beta-\alpha)} m_h(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \tag{3.4}$$
$$\leq \frac{1}{2}\left\{ (\beta-\alpha)^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2} \right) - h\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \frac{[m_h(x)]^3}{3(\beta-\alpha)} \right\} \|\varphi''\|_{\infty}$$

eşitsizliği ve $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq x \leq \beta$ için

$$\left| \frac{h-2}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) + \varphi(x) - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{2(\beta-\alpha)} m_h(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \tag{3.5}$$
$$\leq \frac{1}{2}\left\{ (\beta-\alpha)^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2} \right) - h\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{[m_h(x)]^3}{3(\beta-\alpha)} \right\} \|\varphi''\|_{\infty}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $m_h(x) = h\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ olarak verilmektedir (Erden vd., 2016).

İspat. (3.3) özdeşliği ve φ'' ifadesinin sınırlılığı kullanıldığında

$$\left| \frac{h-2}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varphi'(x) + \varphi(x) - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{2(\beta-\alpha)} m_h(x) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \tag{3.6}$$
$$\leq \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\int_{\alpha}^{\beta} |H(x,\xi)|\, |\varphi''(\xi)| d\xi$$
$$\leq \frac{\|f''\|_{\infty}}{2(\beta-\alpha)}\left[\int_{\alpha}^{x} |\alpha-\xi|\, |\xi-\alpha-m_h(x)| d\xi + \int_{x}^{\beta} |\beta-\xi|\, |\xi-\beta-m_h(x)| d\xi \right]$$

ifadesi bulunur. Bu ifadenin sağındaki integralleri hesaplamak için $\alpha \leq x \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ ve $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq x \leq \beta$ durumları ayrı ayrı düşünülmelidir. Ayrıca, $p \leq q \leq r$ şartını sağlayan her r, p, q sayıları için verilen

$$\int_p^r |t-p|\,|t-q|dt \tag{3.7}$$
$$= \int_p^q (t-p)\,(q-t)dt + \int_q^r (t-p)\,(t-q)dt$$
$$= \frac{(q-p)^3}{3} + \frac{(r-p)^3}{3} - \frac{(q-p)(r-p)^2}{2}$$

integral özdeşliği hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır.

İlk olarak, $\alpha \leq x \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$ durumu için

$$\int_\alpha^x |\alpha-\xi|\,|\xi-\alpha-m_h(x)|d\xi \tag{3.8}$$
$$= \int_\alpha^x (\xi-\alpha)\,(\xi-\alpha-m_h(x))d\xi = \int_0^{x-\alpha} u\,(u-m_h(x))du$$
$$= \frac{(x-\alpha)^3}{3} - \frac{(x-\alpha)^2}{2} m_h(x)$$

ifadesi elde edilir. (3.6)' nın sağındaki ikinci integral için (3.7) formülü kullanılırsa

$$\int_x^\beta |\beta-\xi|\,|\xi-\beta-m_h(x)|d\xi = -\frac{[m_h(x)]^3}{3} + \frac{(\beta-x)^3}{3} + \frac{(\beta-x)^2}{2} m_h(x) \tag{3.9}$$

eşitliği bulunur. (3.8) ve (3.9) sonuçlar (3.6) ifadesinde yerine yazılırsa (3.4) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq x \leq \beta$ durumu için (3.7) formülü kullanılırsa

$$\int_\alpha^x |\alpha-\xi|\,|\xi-\alpha-m_h(x)|d\xi = \frac{[m_h(x)]^3}{3} + \frac{(x-\alpha)^3}{3} - \frac{(x-\alpha)^2}{2} m_h(x) \tag{3.10}$$

ifadesi elde edilir. Aynı zamanda,

$$\int_{x}^{\beta} |\beta-\xi|\,|\xi-\beta-m_h(x)|d\xi = \frac{(\beta-x)^3}{3} + \frac{(\beta-x)^2}{2} m_h(x) \tag{3.11}$$

integrali kolaylıkla hesaplanabilir. (3.10) ve (3.11) sonuçları (3.6) ifadesinde yerine yazılırsa (3.5) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır (Erden vd., 2016).

Sonuç 3.1.3. (3.4) ve (3.5) eşitsizliklerinde $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ seçilirse iki eşitsizlikte ayrı ayrı Cerone vd. (1998) tarafından sunulan

$$\left|\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\,d\xi\right| \le \frac{(\beta-\alpha)^2}{24}\left\|\varphi''\right\|_{\infty}$$

ifadesine dönüşür (Erden vd., 2016).

Sonuç 3.1.3. Teorem 3.1.4' ün eşitsizliklerinde $h=0$ alınırsa, (2.3) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.4. Teorem 3.1.4' ün eşitsizliklerinde $h=2$ alınırsa, o zaman her $\alpha \le x \le \frac{\alpha+\beta}{2}$ için

$$\left|\varphi(x) - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\,d\xi\right|$$
$$\le \frac{1}{2}\left\{(\beta-\alpha)^2\left(\frac{1}{12}+\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right) - 2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \frac{8}{3}\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3}{(\beta-\alpha)}\right\}\left\|\varphi''\right\|_{\infty}$$

sonucu ve her $\frac{\alpha+\beta}{2} \le x \le \beta$ için

$$\left|\varphi(x) - \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\xi)\,d\xi\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{(\beta-\alpha)^2\left(\frac{1}{12}+\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right)-2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\frac{8}{3}\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3}{(\beta-\alpha)}\right\}\left\|\varphi''\right\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir (Erden vd., 2016).

Tez konusu kapsamında, bu kısımda bahsedilen eşitsizliklerin kesirli versiyonları incelenecektir.

3.2. Lokal Kesirli İntegraller İçeren Ostrowski Tipli Sonuçlar

Eşitsizliklerin elde edilmesi için önce bir integral özdeşliği bulunması gereklidir. Klasik Ostrowski eşitsizliğini elde etmek için kullanılan integral özdeşliğine literatürde Montgomery özdeşliği denilmektedir. Sarıkaya ve Budak (2016) lokal kesirli integraller içeren Montgomery özdeşliğini aşağıdaki gibi ispatlamışlardır.

Teorem 3.2.1. (Genelleştirilmiş Montgomery Özdeşliği) $I \subseteq R$ bir aralık olsun ve I' nın içi I^0 ile gösterilsin. $\psi\ :\ I^0 \subseteq R \to R^\alpha$ fonksiyonu, $\sigma < \rho$ olmak üzere $\sigma, \rho \in I^0$ için, $\psi \in D_\alpha(I^0)$ ve $\psi^{(\alpha)} \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ şartlarını sağlasın. Bu durumda, her $x \in [\sigma,\rho]$ için

$$\psi(x)-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^\alpha}\,{}_\sigma I_\rho^\alpha \psi(\xi)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(\rho-\sigma)^\alpha}\int_\sigma^\rho P(x,\xi)\,\psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha \quad (3.12)$$

özdeşliği sağlanır. Burada $P(x,\xi)$ ifadesi

$$P(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-\sigma)^\alpha, & \xi\in[\sigma,x]\\ (\xi-\rho)^\alpha, & \xi\in(x,\rho]\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Sarıkaya ve Budak, 2016).

İspat. Lokal kesirli integraller için verilen kısmi integrasyon formülü ve $P(x,\xi)$ çekirdeğinin tanımı kullanılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{\rho} P(x,\xi)\,\psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x}(\xi-\sigma)^{\alpha}\,\psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\rho}(\xi-\rho)^{\alpha}\,\psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha}$$
$$= (\xi-\sigma)^{\alpha}\psi(\xi)|_{\sigma}^{x} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x}\Gamma(1+\alpha)\,\psi(\xi)(d\xi)^{\alpha}$$
$$+(\xi-\rho)^{\alpha}\psi(\xi)|_{x}^{\rho} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\rho}\Gamma(1+\alpha)\,\psi(\xi)(d\xi)^{\alpha}$$
$$= (x-\sigma)^{\alpha}\psi(x) - (x-\rho)^{\alpha}\psi(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{\rho}\psi(\xi)\,(d\xi)^{\alpha}$$
$$= (\rho-\sigma)^{\alpha}\psi(x) - \Gamma(1+\alpha)\;{}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)$$

işlemleri sağlanır. Elde edilen sonucun her iki tarafı $(\rho-\sigma)^{\alpha}$ ile bölünürse (3.12) eşitliği elde edilir (Sarıkaya ve Budak, 2016).

Sarıkaya ve Budak (2016) Genelleştirilmiş Montgomery özdeşliğini kullanarak aşağıdaki Ostrowski eşitsizliğini sunmuşlardır.

Teorem 3.2.2. (Genelleştirilmiş Ostrowski Eşitsizliği) $I \subseteq R$ bir aralık olsun ve I' nın içi I^0 ile gösterilsin. $\psi : I^0 \subseteq R \to R^{\alpha}$ fonksiyonu, $\sigma < \rho$ olmak üzere $\sigma, \rho \in I^0$ için, $\psi \in D_{\alpha}(I^0)$ ve $\psi^{(\alpha)} \in C_{\alpha}[\sigma,\rho]$ şartlarını sağlasın. Eğer $\psi^{(\alpha)}$ lokal kesirli türevi (σ,ρ) açık aralığında sınırlı, yani $\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty} = \sup_{\xi\in(\sigma,\rho)}\left|\psi^{(\alpha)}(\xi)\right| < \infty$ ise her $x \in [\sigma,\rho]$ için

$$\left|\psi(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^{\alpha}}\;{}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)\right| \tag{3.13}$$
$$\leq 2^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[\frac{1}{4^{\alpha}} + \left(\frac{x-\frac{\sigma+\rho}{2}}{\rho-\sigma}\right)^{2\alpha}\right](\rho-\sigma)^{\alpha}\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya ve Budak, 2016).

İspat. (3.12) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra $\psi^{(\alpha)}$' nın sınırlılık özelliği kullanılırsa

$$\left|\psi(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^{\alpha}} \ {}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)\right| \tag{3.14}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(\rho-\sigma)^{\alpha}} \int_{\sigma}^{\rho} |P(x,\xi)| \left|\psi^{(\alpha)}(\xi)\right| (d\xi)^{\alpha}$$

$$\leq \frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+\alpha)(\rho-\sigma)^{\alpha}} \int_{\sigma}^{\rho} |P(x,\xi)| \, (d\xi)^{\alpha}$$

ifadesi elde edilir. $P(x,\xi)$ çekirdeğinin tanımı kullanıldıktan sonra ortaya çıkan integraller Sonuç 2.2.2 ve Teorem 2.2.7 kullanılarak hesaplanırsa

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{\sigma}^{\rho} |P(x,\xi)| \, (d\xi)^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{\sigma}^{x} (\xi-\sigma)^{\alpha} \, (d\xi)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x}^{\rho} (\rho-\xi)^{\alpha} \, (d\xi)^{\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (x-\sigma)^{2\alpha} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (\rho-x)^{2\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} [(x-\sigma)^{2\alpha} + (\rho-x)^{2\alpha}]$$

$$= 2^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{4^{\alpha}} + \left(x - \frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha}\right]$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıda elde edilen özdeşlik (3.14) de yerine yazılırsa

$$\left|\psi(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^{\alpha}} \ {}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)\right|$$

$$\leq 2^{\alpha} \frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{(\rho-\sigma)^{\alpha}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{4^{\alpha}} + \left(x - \frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha}\right]$$

$$= 2^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{1}{4^{\alpha}} + \left(\frac{x - \frac{\sigma+\rho}{2}}{\rho-\sigma}\right)^{2\alpha}\right] (\rho-\sigma)^{\alpha} \|\psi^{\alpha}\|_{\infty}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır (Sarıkaya ve Budak, 2016).

Bu tezin 4. bölümünde elde edilen sonuçları bulmak için sunulan çekirdeğe yakın bir çekirdek kullanılarak elde edilen özdeşlik Sarıkaya ve arkadaşları tarafından 2016 yılında verilmiştir (Sarıkaya vd., 2016).

Teorem 3.2.3. $I \subseteq R$ bir aralık olsun ve I' nın içi I^0 ile gösterilsin. $\psi \;:\; I^0 \subseteq R \to R^\alpha$ fonksiyonu, $\sigma < \rho$ olmak üzere $\sigma, \rho \in I^0$ için, $\psi \in D_\alpha(I^0)$ ve $\psi^{(\alpha)} \in C_\alpha[\sigma,\rho]$ şartlarını sağlasın. Bu durumda, her $h \in [0,1]$ ve $\sigma + h\frac{\rho-\sigma}{2} \leq x \leq \rho - h\frac{\rho-\sigma}{2}$ için

$$\begin{aligned}(1-h)^\alpha\psi(x) + h^\alpha\frac{\psi(\sigma)+\psi(\rho)}{2^\alpha} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^\alpha}\,{}_\sigma I_\rho^\alpha\psi(\xi) \\ = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(\rho-\sigma)^\alpha}\int_\sigma^\rho R(x,\xi)\,\psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha\end{aligned} \tag{3.15}$$

özdeşliği sağlanır. Burada $R(x,\xi)$ ifadesi

$$R(x,\xi) = \begin{cases}\left(\xi - \left(\sigma + h\dfrac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha, & \xi \in [\sigma, x] \\ \left(\xi - \left(\rho - h\dfrac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha, & \xi \in (x, \rho]\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Sarıkaya vd., 2016).

İspat. Lokal kesirli integraller için verilen kısmi integrasyon formülü ve $R(x,\xi)$ çekirdeğinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\sigma^\rho R(x,\xi)\,\psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x \left(\xi - \left(\sigma + h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha \psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^\rho \left(\xi - \left(\rho - h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha \psi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha \\ &= \left(\xi - \left(\sigma + h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha \psi(\xi)\Bigg|_\sigma^x - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\sigma^x \Gamma(1+\alpha)\,\psi(\xi)(d\xi)^\alpha \\ &+ \left(\xi - \left(\rho - h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha \psi(\xi)\Bigg|_x^\rho - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^\rho \Gamma(1+\alpha)\,\psi(\xi)(d\xi)^\alpha\end{aligned}$$

$$= (\rho-\sigma)^{\alpha}(1-h)^{\alpha}\psi(x) + \left(h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{\alpha}[\psi(\sigma)+\psi(\rho)] - \Gamma(1+\alpha)\,{}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)$$

işlemleri sağlanır. Elde edilen sonucun her iki tarafı $(\rho-\sigma)^{\alpha}$ ile bölünürse (3.15) eşitliği elde edilir (Sarıkaya vd., 2016).

(3.15) özdeşliği kullanılarak aşağıdaki genelleştirilmiş Ostrowski tipli eşitsizlik sunulmuştur (Sarıkaya vd., 2016).

Teorem 3.2.4. $I \subseteq R$ bir aralık olsun ve I' nın içi I^0 ile gösterilsin. $\psi\ :\ I^0 \subseteq R \to R^{\alpha}$ fonksiyonu, $\sigma < \rho$ olmak üzere $\sigma, \rho \in I^0$ için, $\psi \in D_{\alpha}(I^0)$ ve $\psi^{(\alpha)} \in C_{\alpha}[\sigma,\rho]$ şartlarını sağlasın. Eğer $\psi^{(\alpha)}$ lokal kesirli türevi (σ,ρ) açık aralığında sınırlı, yani $\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty} = \sup\limits_{\xi\in(\sigma,\rho)}\left|\psi^{(\alpha)}(\xi)\right| < \infty$ ise $h \in [0,1]$ ve $\sigma + h\frac{\rho-\sigma}{2} \le x \le \rho - h\frac{\rho-\sigma}{2}$ için

$$\left|(1-h)^{\alpha}\psi(x) + h^{\alpha}\frac{\psi(\sigma)+\psi(\rho)}{2^{\alpha}} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^{\alpha}}\,{}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)\right| \tag{3.16}$$
$$\le \frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{(\rho-\sigma)^{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[2^{\alpha}\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha} + \frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{2^{\alpha}}\left[(h-1)^{2\alpha}+h^{2\alpha}\right]\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Sarıkaya vd., 2016).

İspat. (3.15) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra $\psi^{(\alpha)}$' nın sınırlılık özelliği ve $R(x,\xi)$ çekirdeğinin tanımı kullanılırsa

$$\left|(1-h)^{\alpha}\psi(x) + h^{\alpha}\frac{\psi(\sigma)+\psi(\rho)}{2^{\alpha}} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^{\alpha}}\,{}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\psi(\xi)\right| \tag{3.17}$$
$$\le \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(\rho-\sigma)^{\alpha}}\int_{\sigma}^{\rho}|P(x,\xi)|\left|\psi^{(\alpha)}(\xi)\right|(d\xi)^{\alpha}$$
$$\le \frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+\alpha)(\rho-\sigma)^{\alpha}}\int_{\sigma}^{\rho}|P(x,\xi)|\,(d\xi)^{\alpha}$$
$$= \frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{(\rho-\sigma)^{\alpha}}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x}\left|\xi-\left(\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right|^{\alpha}(d\xi)^{\alpha}\right.$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^\rho \left|\xi-\left(\rho-h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right|^\alpha (d\xi)^\alpha\Bigg]$$

$$=\frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_\infty}{(\rho-\sigma)^\alpha}[K_1+K_2]$$

ifadesi elde edilir. Burada, K_1 ve K_2 integrallerini hesaplamak için Sonuç 2.2.2 ve Teorem 2.2.7 kullanılırsa

$$K_1=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\sigma^x \left|\xi-\left(\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right|^\alpha (d\xi)^\alpha$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\sigma^{\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}} \left(\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}-\xi\right)^\alpha (d\xi)^\alpha$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}}^x \left(\xi-\left(\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^\alpha (d\xi)^\alpha$$

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[\left(h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{2\alpha}+\left(x-\left(\sigma+h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right)^{2\alpha}\right]$$

ve

$$K_2=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^\rho \left|\xi-\left(\rho-h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\right|^\alpha (d\xi)^\alpha$$

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[\left(h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{2\alpha}+\left(\rho-h\frac{\rho-\sigma}{2}-x\right)^{2\alpha}\right]$$

sonuçları elde edilir. K_1 ve K_2 integralleri (3.17) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\left|(1-h)^\alpha\psi(x)+h^\alpha\frac{\psi(\sigma)+\psi(\rho)}{2^\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^\alpha}\,{}_\sigma I_\rho^\alpha\psi(\xi)\right|$$

$$\leq\frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_\infty}{(\rho-\sigma)^\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[\left(h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{2\alpha}+\left(x-\sigma-h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{2\alpha}\right.$$

$$\left.+\left(h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{2\alpha}+\left(\rho-h\frac{\rho-\sigma}{2}-x\right)^{2\alpha}\right]$$

$$=\frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_\infty}{(\rho-\sigma)^\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[2^\alpha\left(h\frac{\rho-\sigma}{2}\right)^{2\alpha}+2^\alpha\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha}\right.$$

$$+\frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{2^{\alpha}}-h^{\alpha}(\rho-\sigma)^{2\alpha}+h^{2\alpha}(\rho-\sigma)^{2\alpha}\Bigg]$$

$$=\frac{\left\|\psi^{(\alpha)}\right\|_{\infty}}{(\rho-\sigma)^{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left[2^{\alpha}\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha}+\frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{2^{\alpha}}\left[(h-1)^{2\alpha}+h^{2\alpha}\right]\right]$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır (Sarıkaya vd., 2016).

Sonuç 3.2.1. Eğer (3.16) eşitsizliğinde $h=0$ alınırsa, o zaman (3.16) ifadesi Sarıkaya ve Budak (2016) tarafından sunulan (3.13) eşitsizliğine dönüşür (Sarıkaya vd., 2016).

Sonuç 3.2.2. Eğer (3.16) eşitsizliğinde α yerine 1 yazılırsa, Dragomir vd. (2000) tarafından ispatlanan

$$\left|(1-h)\psi(x)+h\frac{\psi(\sigma)+\psi(\rho)}{2}-\frac{1}{(\rho-\sigma)}\int_{\sigma}^{\rho}\psi(t)\,dt\right|$$
$$\leq\frac{\left\|\psi'\right\|_{\infty}}{\rho-\sigma}\left[\frac{1}{4}(\rho-\sigma)^{2}\left[(h-1)^{2}+h^{2}\right]+\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2}\right]$$

sonucu tekrar elde edilir. (Sarıkaya vd., 2016).

Bu kısımda verilen Ostrowski tipli sonuçlar ve Teorem 3.1.4' de verilen eşitsizlikler kullanılarak ikinci mertebeden lokal kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için genelleştirilmiş Ostrowski tipli sonuçlar bu tezin dördüncü bölümünde verilecektir.

3.3. Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren Ostrowski Tipli Sonuçlar

Bu kısımda klasik Ostrowski ve Ostrowski tipli eşitsizliklerin uyumlu kesirli versiyonları üzerine nasıl çalışmalar yapıldığı incelenecektir. Örneğin; Ostrowski eşitsizliğinin α-kesirli integraller içeren versiyonu Anderson (2016) tarafından aşağıdaki gibi ispatlanmıştır.

Teorem 3.3.1. $0\leq a<b$ olmak üzere $a,b,s,t\in R$ ve $f\ :[a,b]\rightarrow R$ fonksiyonu $\alpha\in(0,1]$ için α-kesirli diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda, $M=sup_{t\in(a,b)}|T_{\alpha}f(t)|$ şartını sağlayan M değeri için

$$\left|f(t)-\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(t)d_\alpha t\right| \le \frac{M}{2\alpha(b^\alpha-a^\alpha)}[(t^\alpha-a^\alpha)^2+(b^\alpha-t^\alpha)] \quad (3.18)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır (Anderson, 2016).

İspat. $f \; : [a,b] \to R$ fonksiyonu α -kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan, her $t \in [a,b]$ için tanımlanan

$$Q(t,s)=\begin{cases}\dfrac{s^\alpha-a^\alpha}{\alpha}, & s\in[a,t]\\ \dfrac{s^\alpha-b^\alpha}{\alpha}, & s\in(t,b]\end{cases}$$

fonksiyonu için

$$f(t)=\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(t)\,d_\alpha t+\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b Q(t,s)\,T_\alpha f(s)ds$$

özdeşliği sağlanmaktadır. Bu özdeşlik,

$$f(t)-\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(s)\,d_\alpha s=\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b Q(t,s)\,T_\alpha f(s)ds$$

formatında yazıldıktan sonra her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}&\left|f(t)-\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(s)\,d_\alpha s\right| \qquad (3.19)\\ &\le \frac{M\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b |Q(t,s)|\,d_\alpha s\\ &=\frac{M\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\left[\int_a^t\left(\frac{s^\alpha-a^\alpha}{\alpha}\right)d_\alpha s+\int_t^b\left(\frac{b^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)d_\alpha s\right]\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (2.10) özdeşliği yardımıyla,

$$\int_a^t \left(\frac{s^\alpha - a^\alpha}{\alpha}\right) d_\alpha s + \int_t^b \left(\frac{b^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right) d_\alpha s \tag{3.20}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s^\alpha - a^\alpha}{\alpha}\right)^2\Bigg|_a^t - \frac{1}{2}\left(\frac{b^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)^2\Bigg|_t^b$$
$$= \frac{1}{2\alpha^2}[(s^\alpha - a^\alpha)^2 + (b^\alpha - t^\alpha)^2]$$

sonucu bulunur. (3.20) sonucu (3.19) ifadesinde yerine yazılırsa (3.18) eşitsizliği elde edilir.

Anderson (2016) Ostrowski eşitsizliğini verdiği çalışmada, aynı zamanda Hermite-Hadamard, Steffensen ve Chebyshev gibi birçok temel eşitsizliğin uyumlu kesirli integraller içeren versiyonlarını da ispatlamıştır.

Usta vd. (2018), Hölder eşitsizliğini kullanarak Anderson tarafından sunulan Ostrowski eşitsizliğine yeni bir üst sınır elde etmişlerdir. İkinci mertebeden α-kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler Erden (2020) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Lemma 3.3.1. $0 \leq a < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f \;:\; [a,b] \to R$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) açık aralığı üzerinde iki kez $\alpha-$kesirli diferansiyellenebilir olsun. Aynı zamanda, $w \;:\; [a,b] \to R$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. O zaman, f fonksiyonunun ikinci $\alpha-$kesirli türevi $T_\alpha^{(2)} f(t) = T_\alpha T_\alpha f(t)$ şeklinde gösterilmek üzere

$$\int_a^b K_\alpha(x,t)\, T_\alpha^{(2)} f(t) d_\alpha t \tag{3.21}$$
$$= \left(\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)\, w(u) d_\alpha u\right) T_\alpha f(x)$$
$$+\alpha \left(\int_a^b w(u)\, d_\alpha u\right) f(x) - \alpha \int_a^b w(t)\, f(t) d_\alpha t$$

özdeşliği sağlanır. Burada $K_\alpha(x,t)$ ifadesi

$$K_\alpha(x,t) \ := \begin{cases} \displaystyle\int_a^t (u^\alpha - t^\alpha)\, w(u) d_\alpha u, & a \le t < x \\ \displaystyle\int_t^b (u^\alpha - t^\alpha)\, w(u) d_\alpha u, & x \le t \le b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Erden, 2020).

İspat. $K_\alpha(x,t)$ ağırlıklı çekirdeği tanımına uygun bir şekilde yazıldıktan sonra kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^b K_\alpha(x,t)\, T_\alpha^{(2)} f(t) d_\alpha t \\
&= \int_a^x \left(\int_a^t (u^\alpha - t^\alpha)\, w(u) d_\alpha u\right) T_\alpha^{(2)} f(t) d_\alpha t \\
&+ \int_x^b \left(\int_b^t (u^\alpha - t^\alpha)\, w(u) d_\alpha u\right) T_\alpha^{(2)} f(t) d_\alpha t \\
&= \left(\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)\, w(u) d_\alpha u\right) T_\alpha f(x) + \alpha \int_a^x \left(\int_a^t w(u)\, d_\alpha u\right) T_\alpha f(t) d_\alpha t \\
&+ \alpha \int_x^b \left(\int_b^t w(u)\, d_\alpha u\right) T_\alpha f(t) d_\alpha t
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Daha sonra, yukarıdaki özdeşliğin sağındaki integrallere bir kez daha kısmi integrasyon uygulanırsa, (3.21) ifadesi elde edilir (Erden, 2020).

Teorem 3.2.2. Lemma 3.3.1' de verilen f ve w fonksiyonlarının şartları sağlansın. f fonksiyonunun ikinci $\alpha -$kesirli türevi $T_\alpha^{(2)} f(t)$ sınırlı ise, yani $\left\|T_\alpha^{(2)} f\right\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} \left|T_\alpha^{(2)} f(t)\right| < \infty$ ise, o zaman her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)\, w(u) d_\alpha u\right) T_\alpha f(x)\right. \\
&\left. + \alpha \left(\int_a^b w(u)\, d_\alpha u\right) f(x) - \alpha \int_a^b w(t)\, f(t) d_\alpha t\right|
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha}\left\|T_\alpha^{(2)}f\right\|_{[a,b],\infty}\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)^2\, w(u)d_\alpha u$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha}\left\|T_\alpha^{(2)}f\right\|_{[a,b],\infty}\left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{2} + \left|\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} - x^\alpha\right|\right)^2 \int_a^b w(u)\, d_\alpha u$$

eşitsizliği sağlanır (Erden, 2020).

İspat. (3.21) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra $T_\alpha^{(2)}f(t)$ fonksiyonunun sınırlılık özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)\, w(u)d_\alpha u\right) D_\alpha f(x)\right. \\
&\left. +\alpha\left(\int_a^b w(u)\, d_\alpha u\right) f(x) - \alpha \int_a^b w(t)\, f(t) d_\alpha t\right| \\
&\leq \left\|T_\alpha^{(2)}f\right\|_{[a,x],\infty}\int_a^x \left(\int_a^t (t^\alpha - u^\alpha)\, w(u)d_\alpha u\right) d_\alpha t \\
&+\left\|T_\alpha^{(2)}f\right\|_{[x,b],\infty}\int_x^b \left(\int_t^b (u^\alpha - t^\alpha)\, w(u)d_\alpha u\right) d_\alpha t
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağındaki integrallere sınır değişimi kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)\, w(u)d_\alpha u\right) D_\alpha f(x)\right. \\
&\left. +\alpha\left(\int_a^b w(u)\, d_\alpha u\right) f(x) - \alpha \int_a^b w(t)\, f(t) d_\alpha t\right| \\
&\leq \frac{\left\|D_\alpha^{(2)}f\right\|_{[a,x],\infty}}{2\alpha}\int_a^x (u^\alpha - x^\alpha)^2\, w(u)d_\alpha u \\
&+\frac{\|D_\alpha^2 f\|_{[x,b],\infty}}{2\alpha}\int_x^b (u^\alpha - x^\alpha)^2\, w(u)d_\alpha u \\
&\leq \frac{\left\|D_\alpha^{(2)}f\right\|_{[a,b],\infty}}{2\alpha}\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)^2\, w(u)d_\alpha u
\end{aligned} \tag{3.23}$$

sonucu bulunur. Son olarak, (3.23) ifadesinin sağındaki integral

$$\int_a^b (u^\alpha - x^\alpha)^2\, w(u) d_\alpha u$$

$$\leq \sup_{u\in(a,b)} (u^\alpha - x^\alpha)^2 \int_a^b w(u)\, d_\alpha u$$

$$= max\{(u^\alpha - a^\alpha)^2, (u^\alpha - b^\alpha)^2\} \int_a^b w(u)\, d_\alpha u$$

$$= \left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{2} + \left|\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} - x^\alpha\right|\right)^2 \int_a^b w(u)\, d_\alpha u$$

şeklinde hesaplanırsa, (3.22) ifadesi elde edilir (Erden, 2020).

Sonuç 3.3.1. (3.22) eşitsizliğinde $w(u) = 1$ seçilirse, o zaman

$$\left|\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} - x^\alpha\right) T_\alpha f(x) + \alpha f(x) - \frac{\alpha^2}{b^\alpha - a^\alpha}\int_a^b f\,(t) d_\alpha t\right|$$

$$\leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^2}{2\alpha}\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^2}{(b^\alpha - a^\alpha)^2}\right] \left\|T_\alpha^{(2)} f\right\|_{[a,b],\infty}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece, ikinci α −kesirli türevi sınırlı olan fonksiyonlar için yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir (Erden, 2020).

Erden (2020) aynı zamanda elde ettiği eşitsizliklerin momentler ve olasılık yoğunluk fonksiyonları içeren uygulamalarını da sunmuştur.

Uyumlu kesirli hesaplamalar teorisinden ve literatürde yer alan benzer eşitsizliklerden yola çıkarak, bu tezin 5. bölümünde ikinci mertebeden α −kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçlar elde edilecektir. Aynı zamanda, bulunan sonuçların bazı uygulamaları da verilecektir.

4. LOKAL KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Bu bölümde; tez konusu kapsamında ortaya çıkan lokal kesirli integraller içeren eşitsizlikler ve onların uygulama alanlarından bahsedilecektir.

4.1. Lokal Kesirli Türevleri Sınırlı Olan Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda, iki kez lokal kesirli türevlenebilir fonksiyonlar ele alındığında nasıl eşitsizlikler oluşacağı incelenmiştir. Bu eşitsizlikleri elde etmek için ilk olarak aşağıdaki lemmada verilen özdeşlik verilmelidir.

Lemma 4.1.1. $0 < \alpha \leq 1,\ \sigma < \rho$ ve $\sigma, \rho \in I^0$ olmak üzere $\varphi : I^0 \subseteq R \to R^\alpha$ fonksiyonu $\varphi \in D_{2\alpha}(I^0)$ ve $\varphi^{(2\alpha)} \in C_{2\alpha}[\sigma, \rho]$ şartlarını sağlasın. Bu durumda, $h \in [0,2]$ için $m_h(x) = h\left(x - \frac{\sigma+\rho}{2}\right)$ ve $x \in [\sigma, \rho]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\sigma)}\int_\sigma^\rho \Lambda_h(x,\xi;\alpha)\,\varphi^{(2\alpha)}(\xi)(d\xi)^\alpha \\
&= \frac{(h-2)^\alpha}{2^\alpha}\left(x - \frac{\sigma+\rho}{2}\right)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(x) + \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\varphi(x) \\
&- \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(\rho-\sigma)^\alpha}(m_h(x))^\alpha\left[\frac{\varphi(\rho)-\varphi(\sigma)}{2^\alpha}\right] \\
&- \frac{1}{2^\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\sigma^\rho \varphi(\xi)\,(d\xi)^\alpha \\
&=:\ \Delta_h(\varphi; x, \alpha)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Lambda_h(x,\xi;\alpha)$ ifadesi

$$\Lambda_h(x,\xi;\alpha) \ := \begin{cases} (\sigma-\xi)^\alpha(\xi-\sigma-m_h(x))^\alpha & ,\sigma \leq \xi < x \\ (\rho-\xi)^\alpha(\xi-\rho-m_h(x))^\alpha & ,x \leq \xi \leq \rho \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. $\Lambda_h(x,t;\alpha)$ ifadesinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{\rho} \Lambda_h(x,\xi;\alpha)\,\varphi^{(2\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x} (\sigma-\xi)^{\alpha}\,(\xi-\sigma-m_h(x))^{\alpha}\varphi^{(2\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\rho} (\rho-\xi)^{\alpha}\,(\xi-\rho-m_h(x))^{\alpha}\varphi^{(2\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha}
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Daha sonra, Teorem 2.2.8' de verilen lokal kesirli integraller için kısmi integrasyon yöntemi uygulanır ve ortaya çıkan integraller Sonuç 2.2.2' de verilen formül ile hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{\rho} \Lambda_h(x,\xi;\alpha)\,\varphi^{(2\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha} \\
&= (h-2)^{\alpha}(\rho-\sigma)^{\alpha}\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{\alpha}\varphi^{(\alpha)}(x) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x}\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(\xi-\sigma)^{\alpha}-\Gamma(1+\alpha)(m_h(x))^{\alpha}\right]\varphi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\rho}\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(\xi-\rho)^{\alpha}-\Gamma(1+\alpha)(m_h(x))^{\alpha}\right]\varphi^{(\alpha)}(\xi)(d\xi)^{\alpha}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde, yukarıda verilen özdeşliğin sağ tarafındaki integrallere bir kez daha lokal kesirli kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa (4.1) özdeşliği elde edilir ve böylece Lemma ispatlanmış olur.

Çeşitli fonksiyonlar ele alındığında klasik integraller kullanılarak çok sayıda eşitsizlik elde edilebilir ve böylece ilgili integraller için yeni alt ve üst sınırlar bulunarak yeni eşitsizlik oluşturulabilir. Bu bölümün devamında, sınırlı fonksiyonlar ve (4.1) özdeşliği kullanılarak lokal kesirli integrallere üst sınırlar aranacaktır.

Teorem 4.1.1. Lemma 4.1.1' de verilen bütün şartlar sağlansın. Eğer $\varphi^{(2\alpha)}$ fonksiyonu (σ,ρ) aralığında sınırlı ise, yani $\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_{\infty} < \infty$ şartı sağlanıyorsa, bu durumda $h \in [0,2]$ ve $\sigma \le x \le \frac{\sigma+\rho}{2}$ için

$$|\Delta_h(\varphi;x,\alpha)| \tag{4.2}$$
$$\leq \left\{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\left(\frac{(\rho-x)^{3\alpha}+(x-\sigma)^{3\alpha}}{2^\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}\right)-h^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(\rho-\sigma)^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right][m_h(x)]^{3\alpha}\right\}\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty$$

eşitsizliği ve $h\in[0,2]$ ve $\frac{\sigma+\rho}{2}<x\leq\rho$ için

$$|\Delta_h(\varphi;x,\alpha)| \tag{4.3}$$
$$\leq \left\{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\left(\frac{(\rho-x)^{3\alpha}+(x-\sigma)^{3\alpha}}{2^\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}\right)-h^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{2\alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(\rho-\sigma)^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right][m_h(x)]^{3\alpha}\right\}\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty$$

sonucu bulunur. Burada, $m_h(x)$ ifadesi $m_h(x)=h\left(x-\frac{\sigma+\rho}{2}\right)$ şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. (4.1) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve daha sonra $\varphi^{(2\alpha)}$ fonksiyonunun sınırlılığı kullanılırsa

$$|\Delta_h(\varphi;x,\alpha)| \tag{4.4}$$
$$\leq \frac{1}{2^\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\sigma)}\int_\sigma^\rho |P_h(x,\xi;\alpha)|\left|\varphi^{(2\alpha)}(\xi)\right|(d\xi)^\alpha$$
$$\leq \frac{\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty}{2^\alpha(\rho-\sigma)^\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_\sigma^x |\sigma-\xi|^\alpha\,|\xi-\sigma-m_h(x)|^\alpha(d\xi)^\alpha\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^\rho |\rho-\xi|^\alpha\,|\xi-\rho-m_h(x)|^\alpha(d\xi)^\alpha\right]$$

ifadesi elde edilir.

(4.4) ifadesindeki lokal kesirli integraller $\sigma\leq x\leq\frac{\sigma+\rho}{2}$ ve $\frac{\sigma+\rho}{2}<x\leq\rho$ durumlar için ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Ayrıca, bu integralleri hesaplamayı kolaylaştırmak için bir özdeşlik verilecektir. $\gamma\leq\delta\leq r$ şartını sağlayan r,γ,δ sayıları için

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\gamma}^{r}|\xi-\gamma|^{\alpha}\,|\xi-\delta|^{\alpha}(d\xi)^{\alpha} \tag{4.5}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\gamma}^{\delta}(\xi-\gamma)^{\alpha}\,(\delta-\xi)^{\alpha}(d\xi)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\delta}^{r}(\xi-\gamma)^{\alpha}\,(\xi-\delta)^{\alpha}(d\xi)^{\alpha}$$
$$=2^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right](\delta-\gamma)^{3\alpha}$$
$$+\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(r-\gamma)^{3\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(\delta-\gamma)^{\alpha}(r-\gamma)^{2\alpha}$$

lokal kesirli integral özdeşliği sağlanmaktadır.

$\sigma \le x \le \frac{\sigma+\rho}{2}$ durumu incelendiğinde, (4.4)' ün sağındaki ilk integral

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x}|\sigma-\xi|^{\alpha}\,|\xi-\sigma-m_h(x)|^{\alpha}(d\xi)^{\alpha} \tag{4.6}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x}(\xi-\sigma)^{\alpha}\,(\xi-\sigma-m_h(x))^{\alpha}(d\xi)^{\alpha}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{0}^{x-\sigma}u^{\alpha}\,(u-m_h(x))^{\alpha}(du)^{\alpha}$$
$$=\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(x-\sigma)^{3\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}[m_h(x)]^{\alpha}(x-\sigma)^{2\alpha}$$

şeklinde hesaplanır. Aynı zamanda, (4.4)' ün sağındaki ikinci integral için (4.5) özdeşliği kullanılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\rho}|\rho-\xi|^{\alpha}\,|\xi-\rho+m_h(x)|^{\alpha}(d\xi)^{\alpha} \tag{4.7}$$
$$=-2^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right][m_h(x)]^{3\alpha}$$
$$+\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(\rho-x)^{3\alpha}+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}[m_h(x)]^{\alpha}(\rho-x)^{2\alpha}$$

ifadesi kolaylıkla elde edilir.

Bu bağlamda, (4.6) ve (4.7) özdeşlikleri (4.4) ifadesinde yerine yazılırsa, (4.2) eşitsizliği bulunur.

$\frac{\sigma+\rho}{2} < x \leq \rho$ durumu ele alındığında, (4.5) formülü yardımıyla

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\sigma}^{x} |\sigma-\xi|^{\alpha}\,|\xi-\sigma-m_h(x)|^{\alpha}(d\xi)^{\alpha} \tag{4.8}$$
$$= 2^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right][m_h(x)]^{3\alpha}$$
$$+\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(x-\sigma)^{3\alpha} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}[m_h(x)]^{\alpha}(x-\sigma)^{2\alpha}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak, mutlak değer özelliği ve kesirli integral hesaplama özellikleri kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\rho} |\rho-\xi|^{\alpha}\,|\xi-\rho+m_h(x)|^{\alpha}(d\xi)^{\alpha} \tag{4.9}$$
$$= \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(\rho-x)^{3\alpha} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}[m_h(x)]^{\alpha}(\rho-x)^{2\alpha}$$

eşitliği elde edilir.

Bu durumda, (4.8) ve (4.9) özdeşlikleri (4.4) ifadesinde yerine yazılırsa, (4.3) eşitsizliği kolaylıkla bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Eğer (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerinde $\alpha = 1$ seçilirse, o zaman Erden vd. (2016) tarafından sunulan (3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri tekrar elde edilir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1' in eşitsizliklerinde h yerine 0 yazılırsa,

$$\left|\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\varphi(x) + \left(\frac{\sigma+\rho}{2}-x\right)^{\alpha}\varphi^{(\alpha)}(x) - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}(\rho-\sigma)^{\alpha}}\,{}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\varphi(\xi)\right| \tag{4.10}$$
$$\leq \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\left(\frac{(\rho-x)^{3\alpha}+(x-\sigma)^{3\alpha}}{2^{\alpha}(\rho-\sigma)^{\alpha}}\right)\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_{\infty}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 4.1.3. (4.10) eşitsizliğinde $x = \frac{\sigma+\rho}{2}$ alınırsa, o zaman ikinci mertebeden lokal kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için genelleştirilmiş Mid-Point eşitsizliği olan

$$\left| \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \varphi\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}(\rho-\sigma)^{\alpha}} \, {}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\varphi(\xi) \right|$$
$$\leq 2\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{2^{4\alpha}} \left\| \varphi^{(2\alpha)} \right\|_{\infty}$$

sonucu bulunur.

Sonuç 4.1.4. (4.10)' da $\alpha = 1$ seçilirse, (4.10) ifadesi literatürde sık kullanılan (2.3) eşitsizliğine dönüşür.

Not: (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerinde $h = 2$ alındığında, kesirli integraller içeren yeni Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilebilir.

4.2. Lokal Kesirli İntegraller için Nümerik Yaklaşım Uygulamaları

Bu kısımda, lokal kesirli integraller içeren eşitsizlikler araştırırken ortaya çıkan hata tahminlerinden bahsedilecektir. İlk olarak, formülleri daha kolay ifade etmek için bazı tanım ve gösterimler verilecektir.

D_z : $\sigma = x_0 < x_1 < \ldots < x_{z-1} < x_z = \rho$ ifadesi $[\sigma, \rho]$ aralığının bir parçalanması olsun. Ayrıca, burada ortaya çıkan alt aralıklar için $k = 0, \ \ldots, z-1$ olmak üzere $\zeta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ve $b_k = x_{k+1} - x_k$ olsun. Bu kabüllerden yola çıkarak yazılabilen

$$S\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big) \tag{4.11}$$
$$= \frac{(h-2)^{\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^{z-1} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{\alpha} \varphi^{(\alpha)}(\zeta_k) b_k^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{z-1} \varphi(\zeta_k)\, b_k^{\alpha}$$
$$- \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{z-1} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{\alpha} [\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)]$$

ifadesi aşağıdaki teoremin oluşmasında kolaylık sağlayacaktır.

Teorem 4.2.1. $0 < \alpha \leq 1$, $\sigma < \rho$ ve $\sigma, \rho \in I^0$ olmak üzere $\varphi : I^0 \subseteq R \to R^\alpha$ fonksiyonu $\varphi \in D_{2\alpha}(I^0)$ ve $\varphi^{(2\alpha)} \in C_{2\alpha}[\sigma, \rho]$ şartlarını sağlasın. Eğer $\varphi^{(2\alpha)}$ fonksiyonu (σ, ρ) aralığında sınırlı ise, yani $\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty < \infty$ şartı sağlanıyorsa, φ fonksiyonunun lokal kesirli integrali

$$ {}_\sigma I_\rho^\alpha \varphi(\xi) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_\sigma^\rho \varphi(\xi)\,(d\xi)^\alpha = S\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big) + R\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big) $$

gösterimi ile yazılabilir. Burada, $S\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big)$ ifadesi (4.11)' de tanımlandığı gibidir ve $R\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big)$ kalan terimi $h \in [0,2]$ olmak üzere her $x_k \leq \zeta_k \leq \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ için

$$ \begin{aligned} &\left|R\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big)\right| \\ &\leq \left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+3\alpha)} \sum_{k=0}^{z-1} \left((x_{k+1} - \zeta_k)^{3\alpha} + (\zeta_k - x_k)^{3\alpha}\right) \right. \\ &-2^\alpha h^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^{z-1} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{2\alpha} b_k^\alpha \\ &\left. - \frac{2^\alpha h^{3\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right] \sum_{k=0}^{z-1} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{3\alpha} \right\} \end{aligned} \tag{4.12} $$

tahminini ve her $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \leq \zeta_k \leq x_{k+1}$ için

$$ \begin{aligned} &\left|R\big(\varphi, \varphi^{(\alpha)}, \zeta, D_z\big)\right| \\ &\leq \left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+3\alpha)} \sum_{k=0}^{z-1} \left((x_{k+1} - \zeta_k)^{3\alpha} + (\zeta_k - x_k)^{3\alpha}\right) \right. \\ &-2^\alpha h^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^{z-1} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{2\alpha} b_k^\alpha \\ &\left. + \frac{2^\alpha h^{3\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right] \sum_{k=0}^{z-1} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{3\alpha} \right\} \end{aligned} \tag{4.13} $$

tahminini sağlar.

İspat. Eğer (4.2) eşitsizliği $k = 0, \ \ldots, \ z-1$ için $[x_k, x_{k+1}]$ alt aralığı üzerinde uygulanırsa, o zaman $h \in [0,2]$ olmak üzere her $x_k \leq \zeta_k \leq \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ için

$$\left| \frac{(h-2)^\alpha}{2^\alpha}\left(x_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(\zeta_k) + \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^\alpha \Gamma(1+\alpha)}\varphi(\zeta_k) \right.$$
$$- \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^\alpha (x_{k+1}-x_k)^\alpha} h^\alpha \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^\alpha [\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)]$$
$$\left. - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^\alpha (x_{k+1}-x_k)^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(\xi)\,(d\xi)^\alpha \right|$$
$$\leq \left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty \left\{ \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \left(\frac{(x_{k+1}-\zeta_k)^{3\alpha} + (\zeta_k - x_k)^{3\alpha}}{2^\alpha (x_{k+1}-x_k)^\alpha} \right) \right.$$
$$-h^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{2\alpha}$$
$$\left. - \frac{h^{3\alpha}}{(x_{k+1}-x_k)^\alpha} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] \left(\zeta_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^{3\alpha} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik k değerleri için 0' dan $z-1$' e kadar toplandıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa, (4.12) tahmini elde edilir. Benzer şekilde, (4.3) eşitsizliği dikkate alınarak her $x_k \leq \zeta_k \leq \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ için aynı işlemler uygulanırsa (4.13) tahmini bulunur.

Sonuç 4.2.1. Eğer (4.12) ve (4.13) tahminlerinde $\alpha = 1$ alınırsa, o zaman Erden vd. (2016) tarafından verilen tahminler elde edilir.

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.1' in bütün şartları altında $\zeta_k = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ ve $h = 0$ seçilirse, o zaman φ' nin lokal kesirli integrali

$${}_\sigma I_\rho^\alpha \varphi(\xi) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_\sigma^\rho \varphi(\xi)\,(d\xi)^\alpha = S_M(\varphi, D_z) + R_M(\varphi, D_z)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R_M(\varphi, D_z)$ kalan terimi

$$|R_M(\varphi, D_z)| \leq \frac{2}{\Gamma(1+3\alpha)} \frac{\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_\infty}{2^{3\alpha}} \sum_{k=0}^{z-1} b_k^{3\alpha} \tag{4.14}$$

tahminini sağlar.

Sonuç 4.2.3. (4.14) tahmininde α yerine 1 yazılırsa, Cerone vd. (1998) tarafından verilen Mid-point integral tahmin formülü tekrar elde edilir.

4.3. Lokal Kesirli İntegral Eşitsizlikleri için Özel Ortalama Uygulamaları

Bu kısımda, α-tipi sayıları taban alan genelleştirilmiş ortalamalar içeren eşitsizlikler sunulacaktır. Bunun için, ilk olarak bazı genelleştirilmiş özel ortalamalar verilecektir.

Lokal hesaplama teorisi için verilen genelleştirilmiş aritmetik ortalama

$$A(\sigma, \rho) = \frac{\sigma^\alpha + \rho^\alpha}{2^\alpha}$$

ile tanımlanmaktadır. Ayrıca, lokal hesaplama teorisi için verilen genelleştirilmiş logaritmik ortalama ise $\sigma \neq \rho$ olmak üzere $s \in Z \backslash \{-1,0\}$ ve $\sigma, \rho \in R$ için

$$L_s(\sigma, \rho) = \left[\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}\left[\frac{\rho^{(s+1)\alpha} - \sigma^{(s+1)\alpha}}{(\rho-\sigma)^\alpha}\right]\right]^{\frac{1}{s}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$\varphi\ :(0,\infty) \to R^\alpha$ fonksiyonu $s \in Z \backslash \{-1,0\}$ için $\varphi(\xi) = \xi^{s\alpha}$ şeklinde verilsin. Bu durumda, $0 < \sigma < \rho$ için

$$\varphi\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) = [A(\sigma, \rho)]^s$$

olarak yazılabilir. Ayrıca, Sonuç 2.2.1’ den faydalanarak

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s-1)\alpha)} x^{(s-1)\alpha}$$

ifadesi ve Sonuç 2.2.2' den faydalanarak

$$\frac{1}{(\rho-\sigma)^{\alpha}} {}_{\sigma}I_{\rho}^{\alpha}\varphi(\xi)\big) = [L_s(\sigma,\rho)]^s$$

eşitliği bulunur. Son olarak, $\varphi^{(2\alpha)}$ fonksiyonunun normu

$$\left\|\varphi^{(2\alpha)}\right\|_{\infty} = \begin{cases} \left|\dfrac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s-2)\alpha)}\right| \rho^{(s-2)\alpha}, & s > 1 \\ \left|\dfrac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s-2)\alpha)}\right| \sigma^{(s-2)\alpha}, & s \in (-\infty, 1]\backslash\{-1,0\} \end{cases}$$
$$=: \Upsilon_s(\sigma,\rho)$$

şeklinde hesaplanır.

Genelleştirilmiş özel ortalamalar düşünüldüğünde, (4.10) eşitsizliği $0 < \sigma < \rho$ değerleri için

$$\left|\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)} x^{s\alpha} + \frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s-1)\alpha)}\left[A(\sigma,\rho)x^{(s-1)\alpha} - x^{s\alpha}\right] - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}}[L_s(\sigma,\rho)]^s\right|$$
$$\leq \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\left(\frac{(\rho-x)^{3\alpha} + (x-\sigma)^{3\alpha}}{2^{\alpha}(\rho-\sigma)^{\alpha}}\right)\Upsilon_s(\sigma,\rho)$$

şeklinde tekrar ifade edilebilir. Böylece, genelleştirilmiş özel ortalamalar içeren yeni bir eşitsizlik ortaya çıkar. Aynı zamanda, (4.15) eşitsizliğinde $x = \frac{\sigma+\rho}{2}$ seçilirse, o zaman genelleştirilmiş özel ortalamalar içeren mid-point tipli

$$\left|\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}[A(\sigma,\rho)]^{s}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{\alpha}}[L_{s}(\sigma,\rho)]^{s}\right|$$
$$\leq 2\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\frac{(\rho-\sigma)^{2\alpha}}{2^{4\alpha}}\Upsilon_{s}(\sigma,\rho)$$

eşitsizliği elde edilir.

5. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, ikinci mertebeden uyumlu kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için nasıl eşitsizlikler ortaya çıkacağı incelenecektir. Ayrıca, elde edilen eşitsizlikler uyumlu kesirli integrallerin hata değeri hesaplamalarında kullanılacaktır.

5.1. Uyumlu Kesirli Türevleri Sınırlı Olan Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Sonuçlar

Uyumlu kesirli integraller içeren eşitsizlikleri elde etmek için ilk olarak aşağıdaki özdeşlik verilecektir.

Lemma 5.1.1. $0 \leq a < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu (a,b) açık aralığı üzerinde iki kez $\alpha -$kesirli diferansiyellenebilir olsun. O zaman, f fonksiyonunun ikinci $\alpha -$kesirli türevi $T_\alpha^{(2)} f(t) = T_\alpha T_\alpha f(t)$ ve $h \in [0,2]$ için $\varphi_\alpha(x;h) = h\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)$ şeklinde gösterilmek üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\alpha^2(b^\alpha - a^\alpha)} \int_a^b Q_h(x,t)\, T_\alpha^{(2)} f(t) d_\alpha t \\
&= \frac{h-2}{2\alpha^2}\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right) T_\alpha f(x) \\
&+ \frac{1}{\alpha} f(x) - \frac{\varphi_\alpha(x;h)}{2\alpha(b^\alpha - a^\alpha)}[f(b) - f(a)] - \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)} \int_a^b f(t) d_\alpha t \\
&=: \ S_\alpha(f;x)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

özdeşliği sağlanır. Burada, $Q_h(x,t)$ fonksiyonu

$$Q_h(x,t) \ := \begin{cases} (a^\alpha - t^\alpha)(t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)) & , a \leq t < x \\ (b^\alpha - t^\alpha)(t^\alpha - b^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)) & , x \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. $Q_h(x,t)$ çekirdeğinin tanımı kullanıldıktan sonra kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\int_a^b Q_h(x,t)\, T_\alpha^{(2)} f(t)dt$$
$$= \int_a^x (a^\alpha - t^\alpha)\,(t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h))T_\alpha^{(2)} f(t)d_\alpha$$
$$+ \int_x^b (b^\alpha - t^\alpha)\,(t^\alpha - b^\alpha - \varphi_\alpha(x;h))T_\alpha^{(2)} f(t)d_\alpha t$$
$$= (a^\alpha - t^\alpha)(t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h))T_\alpha f(t)d_\alpha t|_a^x$$
$$- \int_a^x (2\alpha a^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h))\, T_\alpha f(t)d_\alpha t$$
$$+(b^\alpha - t^\alpha)(t^\alpha - b^\alpha - \varphi_\alpha(x;h))T_\alpha f(t)d_\alpha t|_x^b$$
$$- \int_x^b \left(2\alpha b^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h)\right) T_\alpha f(t)d_\alpha t$$
$$= (b^\alpha - a^\alpha)\left[2(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} - x^\alpha) + \varphi_\alpha(x;h)\right] T_\alpha f(x)$$
$$-\left[\int_a^x \left(2\alpha a^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h)\right) T_\alpha f(t)d_\alpha\right.$$
$$\left. + \int_x^b (2\alpha b^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h))\, T_\alpha f(t)d_\alpha t\right]$$

ifadesi bulunur. Yukarıdaki özdeşliğin sonundaki integraller için bir kez daha kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\int_a^x (2\alpha a^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h))\, D_\alpha f(t)d_\alpha t$$
$$+ \int_x^b (2\alpha b^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h))\, D_\alpha f(t)d_\alpha t$$
$$= \left[(2\alpha a^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h))f(t)|_a^x - \left(-2a^2 \int_a^x f(t)\, d_\alpha t\right)\right]$$
$$+ \left[(2\alpha b^\alpha - 2\alpha t^\alpha + \alpha\varphi_\alpha(x;h))f(t)|_x^b - \left(-2a^2 \int_x^b f(t)\, d_\alpha t\right)\right]$$

$$= (2\alpha a^{\alpha} - 2\alpha x^{\alpha} + \alpha\varphi_{\alpha}(x;h))f(x) - \alpha\varphi_{\alpha}(x;h)f(a) + 2\alpha^{2}\int_{a}^{x} f(t)\, d_{\alpha}t$$

$$+\alpha\varphi_{\alpha}(x;h)f(b) - (2\alpha b^{\alpha} - 2\alpha x^{\alpha} + \alpha\varphi_{\alpha}(x;h))f(x) + 2\alpha^{2}\int_{x}^{b} f(t)\, d_{\alpha}t$$

$$= -2\alpha[(b^{\alpha} - a^{\alpha}) + \varphi_{\alpha}(x;h)] + \alpha\varphi_{\alpha}(x;h)[f(b) - f(a)] + 2\alpha^{2}\int_{a}^{b} f(t)\, d_{\alpha}t$$

sonucu elde edilir. Buradan (5.1) özdeşliği kolaylıkla bulunur.

Şimdi, (5.1) özdeşliği kullanılarak nasıl eşitsizlikler ortaya çıkacağı incelenecektir.

Teorem 5.1.1. $0 \leq a < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f \;:\; [a,b] \to R$ fonksiyonu, (a,b) açık aralığı üzerinde iki kez $\alpha-$kesirli diferansiyellenebilir olsun. Eğer f fonksiyonunun ikinci $\alpha-$kesirli türevi $T_{\alpha}^{(2)}f(t)$ sınırlı ise, $\left\|T_{\alpha}^{(2)}f\right\|_{\infty} = \sup_{t\in(a,b)}\left|T_{\alpha}^{(2)}f(t)\right| < \infty$, o zaman

$$|S_{\alpha}(f;x)| \tag{5.2}$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha^{3}}\left\|T_{\alpha}^{(2)}f(t)\right\|_{\infty} \times \begin{cases} N_{h}(x) - \dfrac{[\varphi_{\alpha}(x;h)]^{3}}{3(b^{\alpha} - a^{\alpha})}, & \text{her } a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2} \text{ için} \\ N_{h}(x) + \dfrac{[\varphi_{\alpha}(x;h)]^{3}}{3(b^{\alpha} - a^{\alpha})}, & \text{her } \dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b \text{ için} \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\varphi_{\alpha}(x;h)$ fonksiyonu $h \in [0,2]$ için $\varphi_{\alpha}(x;h) = h\left(x^{\alpha} - \frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}\right)$ ve $N_{h}(x)$ fadesi

$$N_{h}(x) = (b^{\alpha} - a^{\alpha})^{2}\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(x^{\alpha} - \dfrac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}\right)^{2}}{(b^{\alpha} - a^{\alpha})^{2}}\right] - h\left(x^{\alpha} - \frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}\right)^{2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. (5.1) özdeşliği ve $T_{\alpha}^{(2)}f(t)$ fonksiyonunun sınırlılık özelliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&|S_\alpha(f;x)| \\
&\leq \left|\frac{1}{2\alpha^2(b^\alpha - a^\alpha)} \int_a^b Q_h(x,t)\, T_\alpha^{(2)} f(t) d_\alpha t\right| \\
&\leq \frac{\left\|T_\alpha^{(2)} f(t)\right\|_\infty}{2\alpha^2(b^\alpha - a^\alpha)} \int_a^b |T_h(x,t)|\, d_\alpha t \\
&= \frac{\left\|T_\alpha^{(2)} f(t)\right\|_\infty}{2\alpha^2(b^\alpha - a^\alpha)} L
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

sonucu bulunur. $Q_h(x,t)$ çekirdeğinin tanımından dolayı L integrali

$$
\begin{aligned}
L = &\int_a^x |a^\alpha - t^\alpha|\, |t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)| d_\alpha t \\
&+ \int_x^b |b^\alpha - t^\alpha|\, |t^\alpha - b^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)| d_\alpha t
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

şeklinde yazılabilir. Bu integrali hesaplamak için $a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$ ve $\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$ durumları ayrı ayrı incelenmelidir. Ayrıca, $p \leq q \leq r$ şartını sağlayan r, p, q değerleri için geçerli olan

$$
\begin{aligned}
&\int_p^r |t^\alpha - p^\alpha|\, |t^\alpha - q^\alpha| d_\alpha t \\
&= \int_p^q (t^\alpha - p^\alpha)\, (q^\alpha - t^\alpha) d_\alpha t + \int_q^r (t^\alpha - p^\alpha)\, (t^\alpha - q^\alpha) d_\alpha t \\
&= \frac{(q^\alpha - p^\alpha)^3}{3\alpha} + \frac{(r^\alpha - p^\alpha)^3}{3\alpha} - \frac{(q^\alpha - p^\alpha)(r^\alpha - p^\alpha)^2}{2\alpha}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

formülü hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır.

$a \leq x \leq \frac{a+b}{2}$ durumu için (5.4) deki ilk integral

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x |a^\alpha - t^\alpha|\, |t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)| d_\alpha t \\
&= \int_a^x (t^\alpha - a^\alpha)\, (t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)) d_\alpha t
\end{aligned}
$$

$$= \int_a^x (t^\alpha - a^\alpha)^2\, d_\alpha t - \varphi_\alpha(x;h) \int_a^x (t^\alpha - a^\alpha)\, d_\alpha t$$
$$= \frac{(x^\alpha - a^\alpha)^3}{3\alpha} - \frac{(x^\alpha - a^\alpha)^2}{2\alpha} \varphi_\alpha(x;h)$$

olarak hesaplanır. (5.4) ün ikinci integrali için (5.5) formülü kullanılırsa

$$\int_x^b |b^\alpha - t^\alpha|\,|t^\alpha - b^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)| d_\alpha t$$
$$= -\frac{[\varphi_\alpha(x;h)]^3}{3\alpha} + \frac{(b^\alpha - x^\alpha)^3}{3\alpha} + \frac{(b^\alpha - x^\alpha)^2}{2\alpha} \varphi_\alpha(x;h)$$

özdeşliği elde edilir. Bu bağlamda, $a \le x \le \frac{a+b}{2}$ için L integrali

$$L = \frac{(b^\alpha - x^\alpha)^3 + (x^\alpha - a^\alpha)^3}{3\alpha} - h\frac{(b^\alpha - a^\alpha)}{\alpha}\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^2 - \frac{[\varphi_\alpha(x;h)]^3}{3\alpha} \quad (5.6)$$

şeklinde bulunur.

$\frac{a+b}{2} \le x \le b$ durumu ele alındığında, (5.5) formülünden

$$\int_a^x |a^\alpha - t^\alpha|\,|t^\alpha - a^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)| d_\alpha t dt$$
$$= \frac{[\varphi_\alpha(x;h)]^3}{3\alpha} + \frac{(x^\alpha - a^\alpha)^3}{3\alpha} - \frac{(x^\alpha - a^\alpha)^2}{2\alpha} \varphi_\alpha(x;h)$$

eşitliği yazılabilir. Aynı zamanda, (5.4) ün ikinci integrali, uyumlu kesirli integral formüllerinden

$$\int_x^b |b^\alpha - t^\alpha|\,|t^\alpha - b^\alpha - \varphi_\alpha(x;h)| d_\alpha t = \frac{(b^\alpha - x^\alpha)^3}{3\alpha} + \frac{(b^\alpha - x^\alpha)^2}{2\alpha} \varphi_\alpha(x;h)$$

şeklinde hesaplanabilir. Böylece, $a \le x \le \frac{a+b}{2}$ için L integrali

$$L = \frac{(b^\alpha - x^\alpha)^3 + (x^\alpha - a^\alpha)^3}{3\alpha} - h\frac{(b^\alpha - a^\alpha)}{\alpha}\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^2 + \frac{[\varphi_\alpha(x;h)]^3}{3\alpha} \quad (5.7)$$

olarak bulunur.

(5.6) ve (5.7) özdeşlikleri (5.3) ifadesinde yerine yazılırsa, istenilen (5.2) eşitsizlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.1. (5.2) eşitsizliklerinde özel olarak $x^\alpha = \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$ seçilirse, uyumlu kesirli integral içeren mid-point tipli

$$\left|\frac{1}{\alpha} f\left(\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right| \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^2}{24\alpha^3}\left\|T_\alpha^{(2)} f(t)\right\|_\infty \quad (5.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.2. Eğer (5.8) eşitsizliğinde α yerine 1 yazılırsa, o zaman Cerone vd. (1998) tarafından verilen

$$\left|f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{24}\left\|f''(t)\right\|_\infty$$

sonucu tekrar elde edilir.

Sonuç 5.1.3. (5.2) eşitsizliklerinde özel olarak $h = 0$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{\alpha} f(x) - \frac{1}{\alpha^2}\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right) T_\alpha f(x) - \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right| \quad (5.9)$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha^3}(b^\alpha - a^\alpha)^2\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^2}{(b^\alpha - a^\alpha)^2}\right]\left\|T_\alpha^{(2)} f(t)\right\|_\infty$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 5.1.4. Eğer (5.9) eşitsizliğinde α yerine 1 yazılırsa, o zaman (5.9) ifadesi literatürde iyi bilinen (2.3) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 5.1.5. (5.2) eşitsizliklerinde özel olarak $h = 2$ yazılırsa, o zaman

$$\left|\frac{1}{\alpha}f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{(b^\alpha - a^\alpha)}\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right) - \frac{1}{(b^\alpha - a^\alpha)}\int_a^b f(t)\, d_\alpha t\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\alpha^3}\left\|T_\alpha^{(2)} f(t)\right\|_\infty$$
$$\times \begin{cases} N_2(x) - \dfrac{8}{3(b^\alpha - a^\alpha)}\left(x^\alpha - \dfrac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^3, & \text{her } a \leq x \leq \dfrac{a+b}{2} \text{ için} \\ N_2(x) + \dfrac{8}{3(b^\alpha - a^\alpha)}\left(x^\alpha - \dfrac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^3, & \text{her } \dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b \text{ için} \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada, $N_2(x)$ ifadesi

$$N_2(x) = (b^\alpha - a^\alpha)^2\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^2}{(b^\alpha - a^\alpha)^2}\right] - 2\left(x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^2$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

5.2. Uyumlu Kesirli İntegraller için Nümerik Yaklaşım Uygulamaları

Bu kısımda, uyumlu kesirli integraller içeren eşitsizlikler araştırırken ortaya çıkan hata tahminlerinden bahsedilecektir. Ayrıca, nümerik yaklaşımlar kullanılarak bir uyumlu kesirli integralin kalan terimine üst sınırlar bulunacaktır. İlk olarak, formülleri daha kolay ifade etmek için bazı tanım ve gösterimler verilecektir.

$I_n \ : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ ifadesi, $[a, b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. Aynı zamanda, burada ortaya çıkan alt aralıklar için $i = 0, \ \ldots, n-1$ olmak üzere $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ve $k_i = x_{i+1}^\alpha - x_i^\alpha$ olsun. Bu kabullerden yola çıkarak yazılabilen

$$V_\alpha\left(f,f^{(\alpha)},\xi,I_n\right) \tag{5.10}$$
$$:=\frac{h-2}{2\alpha^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i^\alpha-\frac{x_i^\alpha+x_{i+1}^\alpha}{2}\right)k_iT_\alpha f(\xi_i)+\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}k_i\,f(\xi_i)$$
$$-\frac{h}{2\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i^\alpha-\frac{x_i^\alpha+x_{i+1}^\alpha}{2}\right)[f(x_{i+1})-f(x_i)]$$

notasyonu aşağıdaki teoremin ifadesinde kolaylık sağlayacaktır.

Teorem 5.2.1. $0\le a<b$ ve $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere $f\ :\ [a,b]\to R$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve (a,b) açık aralığı üzerinde iki kez $\alpha-$kesirli diferansiyellenebilir olsun. Eğer f fonksiyonunun ikinci $\alpha-$kesirli türevi $T_\alpha^{(2)}f(t)$ sınırlı ise, $\left\|T_\alpha^{(2)}f\right\|_\infty=\sup_{t\in(a,b)}\left|T_\alpha^{(2)}f(t)\right|<\infty,$ o zaman f fonksiyonunun uyumlu kesirli integrali

$$\int_a^b f(x)\,d_\alpha x=V_\alpha(f,f^{(\alpha)},\xi,I_n)+R_\alpha(f,f^{(\alpha)},\xi,I_n)$$

gösterimi ile yazılabilir. Burada, $V_\alpha(f,f^{(\alpha)},\xi,I_n)$ ifadesi (5.10) da tanımlandığı gibidir ve $i=0,\dots,n-1$ değerleri için $h\in[0,2]$ ve $k_i=x_{i+1}^\alpha-x_i^\alpha$ olmak üzere $R_\alpha(f,f^{(\alpha)},\xi,I_n)$ kalan terimi

$$\left|R_\alpha(f,f^{(\alpha)},\xi,I_n)\right| \tag{5.11}$$
$$\le\frac{1}{2\alpha^3}\left\|T_\alpha^{(2)}f\right\|_\infty$$
$$\times\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}N_{h,i}(\xi_i)-\frac{h^3}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i^\alpha-\frac{x_i^\alpha+x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^3, & \text{her } x_i\le\xi_i\le\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2} \text{ için}\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}N_{h,i}(\xi_i)+\frac{h^3}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i^\alpha-\frac{x_i^\alpha+x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^3, & \text{her } \dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\le\xi_i\le x_{i+1} \text{ için}\end{cases}$$

tahminlerini sağlar. (5.11) ifadesinde verilen $N_{h,i}(\xi_i)$ fonksiyonu

$$N_{h,i}(\xi_i) = k_i^3\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2}{k_i^2}\right] - hk_i\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. Teorem 5.1.1' de verilen eşitsizlikler $i = 0, \ldots, n-1$ olmak üzere $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı üzerinde tekrar ele alınırsa, $h \in [0,2]$ ve $x_i \leq \xi_i \leq \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ için

$$\Bigg|\frac{h-2}{2\alpha^2}\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)k_i T_\alpha f(\xi_i) + \frac{1}{\alpha}k_i f(\xi_i)$$
$$-\frac{h}{2\alpha}\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)[f(x_{i+1}) - f(x_i)] - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,(x) d_\alpha x\Bigg|$$
$$\leq \frac{1}{2\alpha^3}\left\{k_i^3\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2}{k_i^2}\right] - hk_i\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{h^3}{3}\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^3\right\}\left\|T_\alpha^{(2)} f\right\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik i değerleri için 0 dan $n-1$ e kadar toplandıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa, (5.11) tahmininin ilk satırı elde edilir. Aynı zamanda, Teorem 5.1.1' den $h \in [0,2]$ ve $\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ için

$$\Bigg|\frac{h-2}{2\alpha^2}\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)k_i T_\alpha f(\xi_i) + \frac{1}{\alpha}k_i f(\xi_i)$$
$$-\frac{h}{2\alpha}\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)[f(x_{i+1}) - f(x_i)] - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, d_\alpha x\Bigg|$$
$$\leq \frac{1}{2\alpha^3}\left\{k_i^3\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2}{k_i^2}\right] - hk_i\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{h^3}{3}\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^3\right\}\left\|T_\alpha^{(2)} f\right\|_\infty$$

ifadesi de yazılabilir. Benzer şekilde, yukarıdaki eşitsizlik i değerleri için 0 dan $n-1$ e kadar toplandıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa, (5.11) tahmininin ikinci satırı elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2.1. Teorem 5.2.1' de verilen tahminlerde $\xi_i^\alpha = \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}$ alınırsa, o zaman f fonksiyonunun uyumlu kesirli integrali

$$\int_a^b f(x)\, d_\alpha x = V_{\alpha,M}(f, I_n) + R_{\alpha,M}(f, I_n)$$

gösterimi ile yazılabilir. Bu durumda, $R_{\alpha,M}(f, I_n)$ kalan terimi

$$\left| R_{\alpha,M}(f, I_n) \right| \le \frac{\left\| T_\alpha^{(2)} f \right\|_\infty}{24\alpha^3} \sum_{i=0}^{n-1} k_i^3 \tag{5.12}$$

tahminini sağlar.

Sonuç 5.2.2. (5.12) tahmininde α yerine 1 yazılırsa, o zaman Cerone vd. (1998) tarafından sunulan hata tahminine ulaşılır.

Sonuç 5.2.3. (5.11) tahmininde $h = 0$ yazılırsa, o zaman f fonksiyonunun uyumlu kesirli integrali

$$\int_a^b f(x) d_\alpha x = V_\alpha(f, f^{(\alpha)}, \xi, I_n) + R_\alpha(f, f^{(\alpha)}, \xi, I_n)$$

gösterimi ile yazılabilir. Burada, $V_\alpha(f, f^{(\alpha)}, \xi, I_n)$ ifadesi $i = 0, \dots, n-1$ değerleri için $k_i = x_{i+1}^\alpha - x_i^\alpha$ olmak üzere

$$V_\alpha(f, f^{(\alpha)}, \xi, I_n) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, k_i - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2} \right) k_i T_\alpha f(\xi_i)$$

şeklindedir ve $R_\alpha(f, f^{(\alpha)}, \xi, I_n)$ kalan terimi

$$\left|R_\alpha\left(f, f^{(\alpha)}, \xi, I_n\right)\right| \le \frac{1}{2\alpha^3}\left\|T_\alpha^{(2)} f\right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} k_i^3\left[\frac{1}{12} + \frac{\left(\xi_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}\right)^2}{k_i^2}\right] \tag{5.13}$$

tahminini sağlar.

Sonuç 5.2.2. (5.13) tahmininde α yerine 1 yazılırsa, o zaman Cerone vd. (1998) tarafından sunulan hata tahminine ulaşılır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, ikinci mertebeden kesirli türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Literatürde yer alan Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri detaylı bir şekilde incelendikten sonra, bu eşitsizliklerin lokal kesirli integraller ve uyumlu kesirli integraller içeren versiyonları araştırılmıştır. Literatür araştırması sonucunda elde edilen bilgiler tez konusu kapsamında özetlenerek 2. ve 3. Bölümde yazılmıştır. 4. bölümde, lokal kesirli hesaplamalar kullanılarak elde edilen eşitsizlikler ve onların bazı uygulamaları sunulmuştur. 5. bölümde, uyumlu kesirli hesaplamalar kullanılarak elde edilen eşitsizlikler ve onların nümerik yaklaşımlar için uygulamaları literatüre kazandırılmıştır.

Bu tez konusu kapsamında eşitsizliklerin gelişim süreci tarihsel bir şekilde anlatıldıktan sonra, yeni eşitsizliklerin nasıl elde edileceği detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bu doğrultuda, farklı kesirli hesaplamalar ya da farklı tarzda fonksiyonlar kullanılarak yeni eşitsizlikler ve uygulamaları üzerine araştırmalar yapılabilir. Örneğin, bu tez sınırlı fonksiyonlar kullanılarak elde edilen sonuçlardan oluşmaktadır. Benzer sonuçlar konveks fonksiyonlar için araştırılabilir. Ayrıca, bu tez klasik integraller içeren bir sonucun lokal kesirli ve uyumlu kesirli versiyonları incelenerek oluşturulmuştur ve bu tezin 3. bölümünde verilen bazı eşitsizliklerin kesirli versiyonları henüz literatürde bulunmamaktadır. Sonuç olarak, ilgili okuyucular bu tezde elde edilen sonuçlar üzerinden yeni eşitsizlikler ve uygulama alanları geliştirebilirler.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279: 57–66.

Abdeljawad, T., Horani, M. A. ve Khalil, R. (2015). Conformable fractional semigroup operators. *Journal of Semigroup Theory and Applications*, Article ID 7.

Abu Hammad, M. ve Khalil, R. (2014). Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations. *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13 (3): 177-183.

Anderson, D. R. (2016). *Taylor's formula and integral inequalities for conformable fractional derivatives*. Contributions in mathematics and engineering. Springer, Cham, 25-43.

Balcı, M. (2012). *Matematik Analiz*. 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları.

Beckenbach, E. ve Bellman, R. (1965). *Inequalities*. Springer-Verlag, New York.

Cerone, P., Dragomir S. S. ve Roumeliotis, J. (1998). An inequality of Ostrowski type for mappings whose second derivatives are bounded and applications. *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications,* 1 (1): Article 4, 35-42.

Chen, G. S. (2013). Generalizations of Hölder's and some related integral inequalities on fractal space. *Journal of Function Spaces and Applications*, Article ID 198405, 1-9.

Dragomir, S. S. (2015). A functional generalization of Ostrowski inequality via Montgomery identity. *Acta Math. Univ. Comenian (N.S.),* 84(1): 63-78

Dragomir, S. S. ve Barnett, N. S. (1998). An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications. *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications,* 1 (2): 67-76.

Dragomir, S. S., Cerone, P. ve Roumeliotis, J. (2000). A new generalization of Ostrowski's integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means. *Applied Mathematics Letters,* 13: 19-25.

Dragomir, S. S. ve Sofo, A. (2000). An integral inequality for twice differentiable mappings and applications. *Tamkang Journal of Mathematics*, 31(4): 1-10.

Dragomir, S. S. ve Wang, S. (1997). A new inequality of Ostrowski's type in L_{p} - norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules. *Tamkang J. of Math.,* 28: 239-244.

Dragomir, S. S. ve Wang, S. (1998). A new inequality of Ostrowski's type in L_1 -norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules. *Indian*

Journal of Mathematics, 40 (3): 299-304.

Erden, S. (2020). Weighted inequalities involving Conformable integrals and its applications for Random variables and Numerical integration. *Filomat*, 34 (8): 2785-2796.

Erden, S., Budak, H. ve Sarikaya, M. Z. (2016). An Ostrowski type inequality for twice differentiable mappings and applications. *Mathematical Modelling and Analysis*, 21 (4): 522-532.

Gonska, H., Ioan, R. ve Rusu, M. G. (2012). Generalized Ostrowski–Grüss-type Inequalities. *Results. Math.*, 62: 311–318.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. ve Polya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge University Press, New York.

Iyiola, O. S. ve Nwaeze, E. R. (2016). Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2(2): 115-122.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh M. (2014). A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational Applied Mathematics*, 264: 65-70.

Khan, M. A., Begum, S., Khurshid, Y., ve Chu, Y. M. (2018). Ostrowski type inequalities involving conformable fractional integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1): 1-14.

Kolwankar, K. M. ve Gangal, A. D. (1996). Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 6 (4): 505–513.

Mitrinovic, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*. 1th ed., Berlin, Germany: Springer- Verlag, s. 27-196.

Mo, H., Sui, X. ve Yu, D. (2014). Generalized convex functions on fractal sets and two related inequalities, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 636751, 1-7.

Ostrowski, A. M. (1938). Über die absolutabweichung einer differentiebaren funktion von ihrem integralmitelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10: 226-227.

Qayyum, A., Shoaib, M. ve Latif, M. A. (2014). A generalized inequality of Ostrowski type for twice differentiable bounded mappings and applications. *Applied Mathematical Sciences*, 8 (38): 1889-1901.

Sarıkaya, M. Z. (2010). On the Ostrowski type integral inequality. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXXIX (1): 129-134.

Sarıkaya, M. Z. (2012). On the Ostrowski type integral inequality for double integrals. *Demonstratio Mathematica*, XLV (3): 533-540.

Sarıkaya, M. Z. ve Erden, S. (2014). On the weighted integral inequalities for convex functions. *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, 6 (2): 194-208.

Sarıkaya, M. Z., Budak, H. ve Erden, S. (2019). On new inequalities of Simpson's type for generalized convex functions, *Korean J. Math*., 27 (2): 279-295.

Sarıkaya, M. Z. ve Erden, S. (2016). New Weighted Integral Inequalities for Twice Differentiable Convex Functions. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 40 (1): 15-33.

Sarikaya, M. Z. ve Budak, H. (2016). Generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals. *Proceeding of the American Mathematical Society*, 145 (4): 1527-1538.

Sarikaya, M. Z., Erden, S. ve Budak, H. (2016). Some generalized Ostrowski type inequalities involving local fractional integrals and applications. *Advances in Inequalities and Applications*, 6: 1-16.

Tunç, M. (2013). Some Hadamard like inequalities via convex and s-convex functions and their applications for special means. *Mediterr. J. Math*., 11:1047-1059.

Usta, F., Budak, H., Tunc, T. ve Sarikaya, M. Z. (2018). New bounds for the Ostrowski type inequalities via conformable fractional calculus. *Arabian Journal of Matheamtics*, 7: 317-328.

Yang, X. J. (2011). *Local Fractional Functional Analysis and Its Applications*. Asian Academic publisher Limited, Hong Kong.

Yang, X. J. (2012a). *Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications*. World Science Publisher, New York

Yang, X. J. (2012b). Local fractional integral equations and their applications. *Advances in Computer Science and Its Applications*, 1 (4): .

Yang, X. J. (2012c). Generalized local fractional Taylor's formula with local fractional derivative. *Journal of Expert Systems*, 1 (1): 26-30.

Yang, J., Baleanu, D. ve Yang, X. J. (2013). Analysis of fractal wave equations by local fractional Fourier series method. *Advances in Mathematical Physics*, Article ID 632309.

Zafar, F. ve Mir, F. A. (2009). A generalized integral inequality for twice differentiable mappings. *Kragujevac J. Math.*, 32: 81-96.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:	Rumeysa ERDEN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Bursa, 08.09.1991

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi	:	Uludağ Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Devam ediyor
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce, Portekizce (Temel seviye), İspanyolca (Temel seviye)
Bilimsel Faaliyet/Yayınlar	:	1. Erden, S., **Erden, R.** ve Sarıkaya, M. Z. (2019). Grüss type inequalities involving conformable fractional moments. *2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences* (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum).
Aldığı Ödüller	:	

İş Deneyimi

Stajlar	:	
Projeler ve Kurs Belgeleri	:	Phyton (Temel seviye), Robotik ve kodlama (Temel seviye)
Çalıştığı Kurumlar	:	MEB, Matematik Öğretmeni (2014- …)

İletişim

E-Posta Adresi	:	raydin313@gmail.com

Tarih : 19/08/2021 (Tez Savunma Tarihi)