T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4–BOYUTTA $\Delta^{j}\mathbf{x}=\mathcal{A}\mathbf{x}$ ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN HİPERKÜRE

KÜBRA YILMAZ

DANIŞMAN

DOÇ. DR. ERHAN GÜLER

BARTIN-2022

T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

4–BOYUTTA $\Delta^{J}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN HİPERKÜRE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra YILMAZ

BARTIN-2022

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Erhan GÜLER danışmanlığında ve Prof. Dr. Yusuf KAYA eş danışmanlığında hazırlamış olduğum "4–BOYUTTA $\Delta^{J}\mathrm{x} = \mathcal{A}\mathrm{x}$ ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN HİPERKÜRE" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

17.05.2022

Kübra YILMAZ

ÖNSÖZ

Bu tezde, şahsıma faydalı olabilmek için değerli zamanını ayırıp sabırla ve ilgiyle kıymetli bilgilerini paylaşan; konu, kaynak ve yöntemler açısından yardımda bulunup yol gösteren, rehber olarak takip edeceğim, Bartın Üniversitesindeki kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Erhan GÜLER'e teşekkür ediyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Yüksek Lisans eğitimimin ders aşamasında değerli bilgilerini benimle paylaşan, eş danışmanım Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesindeki değerli hocam Prof. Dr. Yusuf KAYA'ya ve Bartın Üniversitesindeki değerli hocam Doç. Dr. Ömer KİŞİ'ye kıymetli zamanlarını ayırdığı için şükranlarımı sunuyorum.

Son olarak, bu çalışmamı hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını idrak edecek şekilde yetiştiren, bu hayattaki en büyük şansım olan rahmetli babam Mustafa YILMAZ'a ithaf ediyorum.

Kübra YILMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

4–BOYUTTA $\Delta^{j}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN HİPERKÜRE

Kübra YILMAZ

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erhan GÜLER
Tez Eş Danışmanı: Prof. Dr. Yusuf KAYA

Bartın-2022, sayfa: 43

Bu tezde, 3-boyutlu Öklid uzayında, $\Delta^{I}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(3,3)$, özelliğini sağlayan r yarıçaplı küre yüzeyi incelenecektir. Kürenin *I* temel formu ve Gauss tasviri elde edilecektir. Kürenin, *I* temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü bulunacaktır. Küre yüzeyine ait olan Laplace-Beltrami operatörü, Gauss tasviri ve ortalama eğrilik arasındaki ilişki verilecektir. Üstelik, kürenin *II* temel formu için Laplace-Beltrami operatörü hesaplanacaktır. Küre yüzeyi için yapılan işlemler, 3-boyutlu diferensiyel geometrideki ispat teknikleri ve formülleri 4-boyuta taşınarak hesaplamalar hiperküre üzerinde yapılacaktır. 4-boyutlu Öklid uzayında, $\Delta^{I}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(4,4)$, özelliğini sağlayan r yarıçaplı hiperküre çalışılacaktır. Hiperkürenin *I* temel formu ve Gauss tasviri elde edilecektir. Hiperkürenin *I* temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü bulunacaktır. Ayrıca, hiperküreye ait olan Laplace-Beltrami operatörü, Gauss tasviri ve ortalama eğrilik arasındaki ilişkiler araştırılacaktır. Daha sonra, hiperkürenin *II* temel formu için Laplace-Beltrami operatörü elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, hiper-küre, temel formlar, Gauss tasviri, Laplace-Beltrami operatörü.

Bilim Alanı Kodu: 20402

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

HYPERSPHERE SATISFYING $\Delta^{j}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ IN 4-SPACE

Kübra YILMAZ

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan GÜLER
Thesis Second Advisor: Prof. Dr. Yusuf KAYA

Bartın-2022, pp: 43

In this thesis, the sphere surface with radius r, which provides the property $\Delta^{I}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(3,3)$, in 3-dimensional Euclidean space will be examined. The fundamental form *I* of the sphere and the Gauss map will be obtained. The sphere will find the Laplace-Beltrami operator, which depends on the fundamental form *I*. The relations of the Laplace-Beltrami operator, Gauss map, and mean curvature of the sphere surface will be given. Moreover, the Laplace-Beltrami operator will be calculated for the fundamental form *II* of the sphere. The operations for the sphere surface, the proof techniques and formulas in 3-dimensional differential geometry will be carried to 4-dimensional and the calculations will be done on the hypersphere. In 4-dimensional Euclidean space, the hypersphere of radius r, which satisfies the property $\Delta^{I}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(4,4)$, will be studied. The fundamental form *I* and Gauss map of the hypersphere will be obtained. The Laplace-Beltrami operator of the hypersphere depending on the fundamental form *I* will be found. In addition, the relations of the Laplace-Beltrami operator, Gauss map, and mean curvature of the hypersphere will be investigated. Finally, the Laplace-Beltrami operator will be obtained for the fundamental form *II* of the hypersphere.

Keywords: Euclidean space, hyper-sphere, fundamental forms, Gauss map, Laplace-Beltrami operator.

Scientific Field Code: 20402

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{x}(u,v)$	: yüzey
$\mathbf{x}(u,v,w)$	: hiperyüzey
I	: birinci temel form
II	: ikinci temel form
E,F,G,A,B,C	: *I* temel form katsayıları
L,M,N,P,T,V	: *II* temel form katsayıları
e	: Gauss tasviri
K	: Gauss eğriliği
H	: ortalama eğrilik
$\gamma(u)$	: üreteç eğrisi
$\varphi(u)$	: üreteç eğrisindeki fonksiyon
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	: 4-boyutlu Öklid uzayı
Δ^I	: *I* temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü
Δ^{II}	: *II* temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü

1. GİRİŞ

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili olan ve literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilecektir.

1.1. Literatür Özeti

Küre; alanı, hacmi, eğrilikleri ve daha birçok özelliği ile yüzyıllardır insanoğlunu, özellikle de geometricileri hep cezbeden bir yüzey olmuştur. Kökeni çok öncelere dayanan, fakat 18. ve 19. yüzyılda Euler (1753, 1754, 1771, 1781, 1782, 1783, 1797, 1815) 'in çalışmaları ile önem kazanan küresel geometri üzerine pek çok çalışma, makale yapılmıştır. Küresel geometri, daha sonra yapılan çalışmalar ile birlikte diferensiyel geometrideki manifoldlar teorisinde yerini almıştır.

Bour (1862), $\mathbb{E}^3$ uzayında yüzeylerin deformasyon problemini; Moore (1919), $\mathbb{E}^4$ uzayında dönel yüzeyleri; ayrıca Moore (1920), $\mathbb{E}^4$ uzayında sabit eğrilikli dönel yüzeyleri; Levi-Civita (1937), Öklid uzayındaki izoparametrik yüzeyleri; Takahashi (1966), minimal immersiyonlar ve Riemannian manifoldları çalışmıştır.

Cheng ve Yau (1977), sabit skaler eğrilikli hiperyüzeyleri; Lawson (1980), kitabında minimal alt manifoldları vermiştir. Do Carmo ve Dajczer (1982), ortalama eğriliği sabit olan helikal yüzeyleri; Do Carmo ve Dajczer (1983), sabit eğrilikli dönel hiperyüzeyleri incelemişlerdir.

Sonlu tipten alt manifoldlar kavramı ise ilk defa Chen (1983) tarafından verilmiştir. Chen (1984, 1985), Chen ve Piccini (1987) 'nin makalelerinden sonra manifoldlar teorisindeki hiper-yüzey kavramı üzerine yapılan çalışmalarda da hızlı bir artış görülmektedir.

Dillen vd. (1990), $\mathbb{E}^3$ uzayında sonlu tipten yüzeyleri; Ferrandez vd. (1990), Öklidyen hiperyüzeyler için konformal olma şartlarını; Cheng ve Wan (1994), $\mathbb{E}^4$ uzayında sabit ortalama eğriliğe sahip tam hiperyüzeyleri vermiştir.

Verstraelen vd. (1994), Öklid uzayında minimal öteleme hiperyüzeyleri; Magid vd. (1994), $\mathbb{E}^4$ uzayında afin umbilik yüzeyleri araştırmışlardır.

Hasanis ve Vlachos (1995), harmonik ortalama eğriliğe sahip hiperyüzeyleri; Arslan vd. (1997), Weyl pseudosimetrik hiperyüzeyleri; Choi ve Kim (2001), noktasal 1-türünden Gauss tasvirli helisoidal ve düzgün yüzeyleri çalışmışlardır.

Ikawa (2000), $\mathbb{E}^3$ uzayında Bour teoremini vermiştir. Aminov (2001), kitabında alt manifoldların geometrisini vermiştir. Yoon (2001), $\mathbb{E}^4$ uzayındaki sonlu tipteki Gauss tasvirli dönel yüzeyleri; Beneki vd. (2002), Minkowski 3-uzayında helisoidal yüzeyleri incelemişlerdir.

Yoon (2003), dönel yüzey olan Clifford torusunu; Güler ve Vanlı (2006); Minkowski 3-uzayında Bour teoremini; Alias ve Gürbüz (2006), en yüksek mertebeden ortalama eğriliğe sahip olan lineer operatörler için Takashi teoreminin genişletilmiş formunu; Güler (2007), Minkowski 3-uzayında lightlike üreteç eğrisi ve Bour teoremini; Dursun (2007), noktasal 1-türünde Gauss tasvirli hiperyüzeyleri; Scharlach (2007), $\mathbb{E}^4$ uzayında yüzeyler ve hiperyüzeylerin afin geometrisini; Arvanitoyeorgos vd. (2009), $\mathbb{E}^4_1$ Lorentz uzayında $\Delta H = \alpha H$ özelliğini sağlayan hiperyüzeyleri; Dillen vd. (2009), $S^n \times \mathbb{R}$ ve $H^n \times \mathbb{R}$ uzaylarındaki dönel hiperyüzeyleri; Dursun (2009), Lorentz-Minkowski uzayında noktasal 1-türünde Gauss tasvirli hiperyüzeyleri çalışmışlardır

Güler vd. (2010), $\mathbb{E}^4$ uzayında Bour teoremi ve Gauss tasvirini; Özkaldı ve Yaylı (2010), 4-boyuttaki tensor çarpım yüzeyleri ve Lie gruplarını; Stamatakis ve Al-Zoubi (2010), $\mathbb{E}^4$ uzayında $\Delta^{III}\mathrm{x} = A\mathrm{x}$ eşitliğini sağlayan dönel yüzeyleri; Arslan vd. (2011a), $\mathbb{E}^4$ uzayında noktasal 1-türünden Gauss tasvirli Vranceanu yüzeyleri; Arslan vd. (2011b), noktasal 1-türünden Gauss tasvirli tensör çarpım yüzeyleri; Arslan vd. (2012), $\mathbb{E}^4$ uzayında genel dönel yüzeyleri; Kim ve Turgay (2013), $\mathbb{E}^4$ deki L_1-noktasal 1-türünden Gauss tasvirli yüzeyleri çalışmışlardır.

Dursun ve Turgay (2013), $\mathbb{E}^4$ deki minimal ve pseudo-umbilik dönel yüzeyleri; Arslan vd. (2014), $\mathbb{E}^4$ uzayında noktasal 1-türünden Gauss tasvirli meridyen yüzeyleri; Ganchev ve Milousheva (2014), 4-boyutlu Minkowski uzayında genel dönel yüzeyleri vermişlerdir.

Turgay (2015), Minkowski uzayında sonlu türdeki Gauss tasvirli Lorentz yüzeyleri; Senoussi ve Bekkar (2015), $\mathbb{E}^3$ uzayında $\Delta^J r = Ar$ koşulunu sağlayan helisoidal yüzeyleri çalışmışlardır. Kühnel (2015), kitabında eğri, yüzey ve manifoldların diferensiyel geometrisini vermiştir.

Kahraman Aksoyak ve Yaylı (2015), $\mathbb{E}_2^4$ uzayında noktasal 1-türünden Gauss tasvirli genel dönel yüzeyleri; Kahraman Aksoyak ve Yaylı (2016), $\mathbb{E}^4$ uzayında noktasal 1-türünden Gauss tasvirli flat dönel yüzeyleri; Kim vd. (2016), $\mathbb{E}^3$ uzayında dönel yüzeylerin Cheng-Yau operatörü ve Gauss tasvirini çalışmışlardır.

Güler vd. (2016), $\mathbb{E}^4$ uzayında helisoidal hiperyüzeylerde Laplace-Beltrami operatörünü; Moruz ve Munteanu (2016), $\mathbb{E}^4$ uzayında minimal öteleme hiperyüzeyleri; Bektaş,vd. (2017a), 1-türünde pseudo-küresel Gauss tasvirli yüzeyleri; Bektaş vd. (2017b), 1-türünde pseudo-küresel Gauss tasvirli pseudo-küresel altmanifoldları incelemişlerdir.

Güler vd. (2018), $\mathbb{E}^4$ uzayında dönel hiperyüzeylerin Gauss tasviri ve III Laplace-Beltrami operatörünü; Güler ve Turgay (2019), $\mathbb{E}^4$ uzayında dönel hiperyüzeylerin Cheng-Yau operatörü ve Gauss tasvirini; Güler ve Kişi (2019), $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında Dini-türündeki timelike eksenli helisoidal hiperyüzeyleri çalışmışlardır.

Dursun ve Turgay (2019), $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında noktasal 1-türünde Gauss tasvirli space-like yüzeyleri; Güler (2020), $\mathbb{E}^4$ uzayında hiperkürenin IV temel formunu; Arslan vd. (2021), Öklid uzayında dönel λ-hiperyüzeyleri vermişlerdir.

Bu tezde, 3-boyutlu Öklid uzayında, $\Delta^I \mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(3,3)$, özelliğini sağlayan r yarıçaplı küre yüzeyi incelenecektir. Bunun için, kürenin birinci temel formu ve Gauss tasviri elde edilecektir. Kürenin, birinci temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü bulunacaktır. Kürenin, Laplace-Beltrami operatörü, Gauss tasviri ve ortalama eğriliği ile ilgili bulgular verilecektir. Ayrıca, kürenin ikinci temel formu için Laplace-Beltrami operatörü hesaplanacaktır

Daha sonra, küre için yapılan işlemler doğrultusunda, 3-boyutlu diferensiyel geometrideki ispat teknikleri ve formülleri 4-boyuta taşınarak hesaplamalar hiperküre üzerinde yapılacaktır.

4-boyutlu Öklid uzayında, $\Delta^I \mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(4,4)$, özelliğini sağlayan r yarıçaplı hiperküre çalışılacaktır. Hiperkürenin birinci temel formu ve Gauss tasviri elde edilecektir. Hiperkürenin birinci temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü bulunacaktır.

Bununla birlikte, hiperkürenin Laplace-Beltrami operatörü, Gauss tasviri ve ortalama eğriliği ile ilgili sonuçlar araştırılacaktır. Daha sonra, hiperkürenin ikinci temel formu için Laplace-Beltrami operatörü elde edilecektir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde yer alan temel tanım, açıklama, notasyon vb. verilmektedir. Tez boyunca bir vektör ile transpozu özdeş alınmıştır.

2.1 Tanım

Simetrik, bilineer, ve nondejenere özelliklerine sahip olan

$$g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

fonksiyonuna, $\mathcal{V}$ reel vektör uzayında *skalar çarpım*, $\mathcal{V}$ ye de *skalar çarpım uzayı* denir.

2.2 Tanım

$\mathcal{V}$ skalar çarpıma sahip olan bir uzay, $v \in \mathcal{V}$ bir vektör için

$$\|v\| = |g(v,v)|^{1/2}$$

ile tanımlanan $\|v\|$ sayısı v nin *normu* olur.

2.3 Tanım

$\mathbb{E}^3$ uzayında $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörlerinin skalar çarpımı

$$\begin{aligned} \langle .\,,. \rangle &: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \end{aligned}$$

ile tanımlıdır.

$\mathbb{E}^4$ uzayında $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ vektörlerinin skalar çarpımı

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \mathbb{E}^4 \times \mathbb{E}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4 \end{aligned}$$

ile belirlidir. Buradan

$$\|v\| = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{1/2} \in \mathbb{R}$$

v nin Öklidyen normu olur.

2.4 Tanım

n-boyutlu bir M Riemann manifoldu için $(n-1)$-boyutlu bir $\overline{M}$ altmanifoldu varsa bu altmanifold *Riemann hiperyüzeyi* olarak adlandırılır.

2.5 Tanım

M nin Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$, N de birim normal ise $\forall V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), N)$$

biçimindeki $(1,1)$-tipindeki tensör alanı S, $\overline{M}$ nin N ile belirlenmiş *şekil operatörü* olarak tanımlanır.

2.6 Tanım

$\mathbb{E}^3$ uzayında $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri ile elde edilen

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_3 w_2 - v_2 w_3, v_1 w_3 - v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne bu iki vektörün *vektörel çarpımı* denir.

$\mathbb{E}^4$ uzayında $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ vektörleri ile elde edilen

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

vektörü *üçlü vektörel çarpım* olarak tanımlanır.

2.7 Tanım

M, 4-boyutlu Öklid uzayı; $\overline{M}$ de

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v, w) &\longrightarrow \varphi(u, v, w) = \big(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w), \varphi_4(u, v, w)\big) \end{aligned}$$

olmak üzere (U, φ) ile belirli olan hiperyüzey olsun. Hiperyüzeyin vektör alanlarının bir tabanı $\left\{\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}$ olup $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ gösterimini φ_u olarak belirteceğiz. Hiperyüzeyin *I* temel formu için

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw$$

φ nin tam diferansiyeli olur. *I* temel form

$$I =< d\varphi, d\varphi >$$

$$= E\, du^2 + G\, dv^2 + C\, dw^2 + 2F\, dudv + 2A\, dudw + 2B\, dvdw$$

olarak elde edilir.

2.8 Tanım

$$L = \langle \varphi_{uu}, e \rangle, \;\; M = \langle \varphi_{uv}, e \rangle, \;\; N = \langle \varphi_{vv}, e \rangle$$

$$P = \langle \varphi_{uw}, e \rangle, \;\; T = \langle \varphi_{vw}, e \rangle, \;\; V = \langle \varphi_{ww}, e \rangle$$

katsayıları ile verilen

$$II = Ldu^2 + Ndv^2 + Vdw^2 + 2M\,dudv + 2P\,dudw + 2T\,dvdw$$

eşitliğe $\varphi(u, v, w)$ hiperyüzeyinin *II temel formu* olarak tanımlanır.

$$e = \frac{\varphi_u \times \varphi_v \times \varphi_w}{\|\varphi_u \times \varphi_v \times \varphi_w\|}$$

oranına da hiperyüzeyin *Gauss tasviri* denir.

2.9 Tanım

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey $\bar{M}$ ve şekil operatörü matrisi $S = I^{-1}II$ olmak üzere, $\forall p \in \bar{M}$ için

$$K(p) = \det(S_p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2.1}$$

oranına, p noktasında $\bar{M}$ yüzeyinin *Gauss eğriliği* denir. $\mathbb{E}^4$ de bir hiperyüzey ve $\forall p \in \bar{M}$ için

$$K(p) = \det(S_p) = \frac{(LN - M^2)V + 2MPT - P^2N - T^2L}{(EG - F^2)C + 2ABF - A^2G - B^2E} \tag{2.2}$$

oranına hiperyüzeyin *Gauss eğriliği* denir.

2.10 Tanım

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve şekil operatörü matrisi $S = I^{-1}II$ olsun. $\forall p \in \overline{M}$ için

$$H(p) = \frac{1}{2} iz(S_p) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \tag{2.3}$$

oranına $\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki *ortalama eğriliği* denir. $\mathbb{E}^4$ uzayında bir hiperyüzey $\overline{M}$ ve şekil operatörü matrisi S olsun. $\forall p \in \overline{M}$ için

$$H(p) = \frac{1}{3} iz(S_p) = \frac{\begin{Bmatrix} (EN + GL - 2FM)C + (EG - F^2)V - A^2N - B^2L \\ -2(APG + BTE - ABM - ATF - BPF) \end{Bmatrix}}{3[(EG - F^2)C + 2ABF - A^2G - B^2E]} \tag{2.4}$$

oranına hiperyüzeyin *ortalama eğriliği* denir.

2.11 Tanım

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir Π düzlemindeki bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Pi$, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralık olsun. Bu düzlemde γ yı (*üreteç eğrisi*) kesmeyen doğru ℓ (*eksen*) olsun. γ nın ℓ çevresinde dönerek oluşan yüzeye *dönel yüzey* denir.

x_3 dönme ekseni olduğunda; eksene olan uzaklık u, eksenden geçen düzlemle x_1x_3 düzlemi arasındaki açı v olmak üzere,

$$x_1(u, v) = u \cos v,$$

$$x_2(u, v) = u \sin v,$$

$$x_3(u, v) = \varphi(u)$$

dönel yüzeyi elde edilir.

2.12 Tanım

$\mathbb{E}^4$ uzayında bir Π düzlemindeki bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Pi$, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı ve bu düzlemde γ yı kesmeyen doğru ℓ olmak üzere; γ nın ℓ çevresinde dönmesiyle meydana gelen hiperyüzeye *dönel hiperyüzey* denir.

ℓ=$(0,0,0,1)^t$ olsun. $v, w \in \mathbb{R}$ için

$$Z = \begin{pmatrix} \cos v \cos w & -\sin v & -\cos v \sin w & 0 \\ \sin v \cos w & \cos v & -\sin v \sin w & 0 \\ \sin w & 0 & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonal matris olmak üzere, $\mathfrak{I}_4$ birim matrisi için

$$Z.\ell = \ell, \quad Z^t.Z = \mathfrak{I}_4, \quad \det(Z) = 1$$

eşitlikleri vardır.

$\mathbb{E}^4$ içinde dönme ekseni ℓ ve üreteç eğrisi de $\forall u \in I$ için $\varphi(u) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\gamma(u) = \big(u, 0, 0, \varphi(u)\big)$ ile belirli olsun. Böylece, $\ell = (0,0,0,1)$ vektörü ile meydana gelen dönel hiperyüzey

$$\mathbf{R} = Z.\gamma$$

olur. Burada, $\forall u \in I, v, w \in [0, 2\pi]$ biçimindedir. Kısaca, bu dönel hiperyüzey

$$\mathbf{R}(u,v,w) = \begin{pmatrix} u \cos v \cos w \\ u \sin v \cos w \\ u \sin w \\ \varphi(u) \end{pmatrix}$$

ile belirlidir.

2.13 Tanım

C^2 sınıfından bir düzgün $\phi = \phi(x^1, x^2)|_{D\subset\mathbb{R}^3}$ fonksiyonunun I temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta^I \phi = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\right)$$

olarak tanımlıdır. Buradaki, $g_{ij} = (g^{kl})^{-1}$ ve $g = \det(g_{ij})$ ile belirlidir.

2.14 Tanım

C^2 sınıfından bir düzgün $\phi = \phi(x^1, x^2)|_{D\subset\mathbb{R}^3}$ fonksiyonunun II temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta^{II} \phi = -\frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{h}\, h^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\right)$$

biçimindedir. Buradaki, $h_{ij} = (h^{kl})^{-1}$ ve $h = \det(h_{ij})$ ile tanımlıdır.

2.15 Tanım

$g = \det(g_{ij})$

$$= g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}g_{32} + g_{12}g_{31}g_{23} - g_{12}g_{21}g_{33} + g_{21}g_{13}g_{32} - g_{13}g_{22}g_{31}$$

olmak üzere

$$(g_{ij})_{3\times 3}$$

matrisinin tersi

$$\left(g^{ij}\right)=\frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22}g_{33}-g_{23}g_{32} & -g_{12}g_{33}+g_{13}g_{32} & g_{12}g_{23}-g_{13}g_{22} \\ -g_{21}g_{33}+g_{31}g_{23} & g_{11}g_{33}-g_{13}g_{31} & -g_{11}g_{23}+g_{21}g_{13} \\ g_{21}g_{32}-g_{22}g_{31} & -g_{11}g_{32}+g_{12}g_{31} & g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21} \end{pmatrix}$$

ile belirlidir. C^3 sınıfından bir düzgün $\phi=\phi(x^1,x^2,x^3)|_{D\subset\mathbb{R}^4}$ fonksiyonunun I temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta^I\phi=-\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$$

ile tanımlıdır. Buradaki, $g_{ij}=(g^{kl})^{-1}$ ve $g=\det\left(g_{ij}\right)$ biçimindedir.

2.16 Tanım

$h=\det\left(h_{ij}\right)$

$$=h_{11}h_{22}h_{33}-h_{11}h_{23}h_{32}+h_{12}h_{31}h_{23}-h_{12}h_{21}h_{33}+h_{21}h_{13}h_{32}-h_{13}h_{22}h_{31}$$

olmak üzere,

$$\left(h_{ij}\right)_{3\times3}$$

matrisinin tersi

$$\left(h^{ij}\right)=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} h_{22}h_{33}-h_{23}h_{32} & -h_{12}h_{33}+h_{13}h_{32} & h_{12}h_{23}-h_{13}h_{22} \\ -h_{21}h_{33}+h_{31}h_{23} & h_{11}h_{33}-h_{13}h_{31} & -h_{11}h_{23}+h_{21}h_{13} \\ h_{21}h_{32}-h_{22}h_{31} & -h_{11}h_{32}+h_{12}h_{31} & h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21} \end{pmatrix}$$

ile belirlidir. C^3 sınıfından bir düzgün $\phi=\phi(x^1,x^2,x^3)|_{D\subset\mathbb{R}^4}$ fonksiyonunun II temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta^{II}\phi = -\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{h}\, h^{ij}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$$

ile tanımlıdır. Buradaki, $h_{ij} = (h^{kl})^{-1}$ ve $h = \det(h_{ij})$ biçimindedir.

3. 3–BOYUTTA $\Delta^{J}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN KÜRE

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid $\mathbb{E}^3$ uzayında $j = 1,2$ olmak üzere $\Delta^{j}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ özelliklerini sağlayan r yarıçaplı

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos u \sin v \\ r\sin u \sin v \\ r\cos v \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

küre yüzeyi incelenecektir.

3.1 $\Delta^{I}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ Özelliğini Sağlayan Küre

Bu kısımda, $\mathbb{E}^3$ uzayında $\Delta^{I}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ özelliğini sağlayan küre yüzeyi incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ uzayında (3.1) ile verilen küre yüzeyinin birinci temel form katsayılarını hesaplamak için yüzeyin u ve v ye göre birinci türevleri

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} -r\sin u \sin v \\ r\cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} r\cos u \cos v \\ r\sin u \cos v \\ -r\sin v \end{pmatrix}$$

olur. Böylece, birinci temel form katsayıları

$$E = r^2 \sin^2 v\,, \qquad F = 0, \qquad G = r^2$$

elde edilir. Birinci temel form matrisi

$$I = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Buradan

$$\det I = r^4 \sin^2 v$$

olarak bulunur. $\mathbf{x}(u, v)$ küre yüzeyinin Gauss tasvirini hesaplayalım. Türev vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sin u \sin v & r \cos u \sin v & 0 \\ r \cos u \cos v & r \sin u \cos v & -r \sin v \end{vmatrix}$$

$$= (-r^2 \cos u \sin^2 v)e_1 - (r^2 \sin u \sin^2 v)e_2 + ((-r^2 \sin^2 u - r^2 \cos^2 u) \sin v \cos v)e_3$$

$$= (-r^2 \cos u \sin^2 v \ , -r^2 \sin u \sin^2 v \ , -r^2 \sin v \cos v)$$

olarak bulunur. Bu vektörel çarpımın normu ise

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = (r^4 \cos^2 u \sin^4 v + r^4 \sin^2 u \sin^4 v + r^4 \sin^2 v \cos^2 v)^{1/2}$$

$$= r^2 \sin v$$

biçimindedir. Buradan, küre yüzeyinin Gauss tasviri

$$e = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

$$= \frac{(-r^2 \cos u \sin^2 v, \ -r^2 \sin u \sin^2 v, \ -r^2 \sin v \cos v)}{r^2 \sin v}$$

$$e = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos v \end{pmatrix}$$

olur. $\mathbf{x}(u, v)$ küre yüzeyinin ikinci temel form katsayılarını hesaplamak için yüzeyin u ve v ye göre ikinci türevleri

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} -r\cos u \sin v \\ -r\sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} -r\sin u \cos v \\ r\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

ve

$$\mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} -r\cos u \sin v \\ -r\sin u \sin v \\ -r\cos v \end{pmatrix}$$

olur. Böylece, iç çarpım yardımıyla ikinci temel form katsayıları

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, e\rangle = r\cos^2 u \sin^2 v + r\sin^2 u \sin^2 v$$

$$L = r\sin^2 v,$$

$$\langle \mathbf{x}_{uv}, e\rangle = r\sin u \cos u \sin v \cos v - r\sin u \cos u \sin v \cos v$$

$$M = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_{vv}, e\rangle = r\cos^2 u \sin^2 v + r\sin^2 u \sin^2 v + r\cos^2 v$$

$$N = r$$

bulunur. Buradan, ikinci temel form matrisi

$$II = \begin{pmatrix} r\sin^2 v & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca

$$\det II = r^2 \sin^2 v$$

olarak elde edilir. Yüzeyin şekil operatörü S olmak üzere $S = I^{-1}II$ ile hesaplanır. Küre yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \det S = \frac{1}{r^2}$$

olarak bulunur. r yarıçaplı küre yüzeyinin ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{1}{2}\, iz\, S = \frac{1}{r}$$

olur. Şimdi ise küre yüzeyinin birinci temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü hesaplanacaktır.

$$U = \frac{G\mathbf{x}_u - F\mathbf{x}_v}{\sqrt{|detI|}}$$

$$= \frac{1}{\sin v}\mathbf{x}_u$$

olup

$$U = \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix},$$

ve buradan

$$U_u = -\begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$V = \frac{F\mathbf{x}_u - E\mathbf{x}_v}{\sqrt{|detI|}}$$

olup

$$V = \begin{pmatrix} -r\cos u \sin v \cos v \\ -r \sin u \sin v \cos v \\ r\sin^2 v \end{pmatrix},$$

ve böylece

$$V_v = \begin{pmatrix} -r\cos u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -r\sin u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ 2r\sin v\cos v \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$\Delta^I \mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{|detI|}}(U_u - V_v)$$

yardımıyla

$$\Delta^I \mathbf{x} = -\frac{1}{r^2 \sin v}\left\{-\begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r\cos u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -r\sin u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ 2r\sin v\cos v \end{pmatrix}\right\}$$

$$= -\frac{r}{r^2 \sin v}\begin{pmatrix} -\cos u + \cos u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -\sin u + \sin u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -2\sin v\cos v \end{pmatrix}$$

olup

$$\Delta^I \mathbf{x} = \frac{2}{r}\begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçlarla aşağıdaki teoremi verilmektedir.

3.1 Teorem $\mathbb{E}^3$ uzayındaki (3.1) ile verilen küre yüzeyi için I temel form ile belirli olan Laplace-Beltrami operatörü, ortalama eğrilik ve Gauss tasviri arasında

$$\Delta^I \mathbf{x} = 2He$$

bağıntısı vardır.

3.2 $\Delta^{II}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ Özelliğini Sağlayan Küre

Bu kısımda, $\mathbb{E}^3$ uzayındaki (3.1) ile verilen küre yüzeyinin ikinci temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü hesaplanacaktır.

(3.1) ile verilen küre yüzeyinin ikinci temel form matrisi

$$II = \begin{pmatrix} r\sin^2 v & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

ve

$$\det II = r^2 \sin^2 v$$

olarak hesaplanmıştı. Bu sonuçlar ile

$$U = \frac{N\mathbf{x}_u - M\mathbf{x}_v}{\sqrt{|detII|}}$$

$$= \frac{1}{\sin v}\mathbf{x}_u$$

$$U = \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \frac{L\mathbf{x}_v - M\mathbf{x}_u}{\sqrt{|detII|}}$$

$$= \sin v\, \mathbf{x}_v$$

$$V = \begin{pmatrix} r\cos u \sin v \cos v \\ r \sin u \sin v \cos v \\ -r\sin^2 v \end{pmatrix}$$

$$U_u = -\begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$V_v = \begin{pmatrix} r\cos u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ r\sin u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -2r\sin v\cos v \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{|detII|}}(U_u + V_v)$$

eşitliğini ve bulunanları kullanarak

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = -\frac{1}{r\sin v}\left\{-\begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ r\sin u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -2r\sin v\cos v \end{pmatrix}\right\}$$

olur. Düzenlemeler sonrası

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = -\frac{r}{r\sin v}\begin{pmatrix} -\cos u + \cos u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -\sin u + \sin u\,(\cos^2 v - \sin^2 v) \\ -2\sin v\cos v \end{pmatrix}$$

bulunur. Sadeleşmeler ile

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece, aşağıdaki teorem ortaya çıkmaktadır.

3.2 Teorem $\mathbb{E}^3$ uzayındaki (3.1) ile verilen küre yüzeyi için ikinci temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü ve Gauss tasviri arasında

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = 2e$$

bağıntısı vardır.

4. 4–BOYUTTA $\Delta^j \mathbf{x} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{x}$ ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN HİPERKÜRE

Bu bölümde, 4-boyutlu Öklid $\mathbb{E}^4$ uzayında $j = I, II$ olmak üzere $\Delta^j \mathbf{x} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{x}$ özelliklerini sağlayan r yarıçaplı hiperküre incelenecektir.

$\mathbb{E}^4$ uzayında bir $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için bir Π düzlemdeki bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Pi$ ve düzlem içinde γ yı kesmeyen doğru ℓ olsun.

$$\gamma(w) = (r\cos w\,, 0, 0, r\sin w)$$

üreteç eğrisinin, $\mathfrak{I}_4$ birim matris olmak üzere

$$Z.\ell = \ell, \quad Z^t.Z = \mathfrak{I}_4, \quad \det Z = 1$$

özelliklerini sağlayan

$$Z = \begin{pmatrix} \cos u\cos v & -\sin u & -\cos u\sin v & 0 \\ \sin u\cos v & \cos u & -\sin u\sin v & 0 \\ \sin v & 0 & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi yardımıyla $\ell = (0,0,0,1)$ ekseni etrafında dönmesi ile oluşan bir dönel hiperyüzey, *hiperküre* olarak adlandırılır. $u, v \in \mathbb{R}$ için $(0,0,0,1)$ vektörü ile oluşan bir hiperküre

$$\mathbf{x}(u, v, w) = Z(u, v)\gamma(w)$$

olarak tanımlanır. Burada, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, $u, v, w \in [0, 2\pi]$ ile belirlidir. Daha açık şekilde yazılırsa, hiperkürenin parametrik denklemi

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \begin{pmatrix} r\cos u\cos v\cos w \\ r\sin u\cos v\cos w \\ r\sin v\cos w \\ r\sin w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

formundadır.

4.1 $\Delta^I \mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ Özelliğini Sağlayan Hiperküre

Bu kısımda, $\mathbb{E}^4$ uzayındaki (4.1) ile verilen hiperkürenin I temel forma bağlı olan Laplace-Beltrami operatörü hesaplanacaktır.

$\mathbb{E}^4$ uzayında r yarıçaplı $\mathbf{x}(u, v, w)$ hiperküresinin I temel form katsayıları bulunacaktır. Bunun için hiperkürenin u, v, w ya göre birinci türevleri

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \cos w \\ r \cos u \cos v \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -r \cos u \sin v \cos w \\ -r \sin u \sin v \cos w \\ r \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix},$$

ve

$$\mathbf{x}_w = \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \sin w \\ -r \sin u \cos v \sin w \\ -r \sin v \sin w \\ r \cos w \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu türevler ve iç çarpım yardımıyla

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2 \sin^2 u \cos^2 v \cos^2 w + r^2 \cos^2 u \cos^2 v \cos^2 w$$

$$E = r^2 \cos^2 v \cos^2 w,$$

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = r^2 \sin u \cos u \sin v \cos v \cos^2 w - r^2 \sin u \cos u \sin v \cos v \cos^2 w$$

$$F = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_w \rangle = r^2 \sin u \cos u \cos^2 v \sin w \cos w - r^2 \sin u \cos u \cos^2 v \sin w \cos w$$

$$A = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = r^2 \cos^2 u \sin^2 v \cos^2 w + r^2 \sin^2 u \sin^2 v \cos^2 w + r^2 \cos^2 v \cos^2 w$$

$$G = r^2 \cos^2 w,$$

$$\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w \rangle = r^2 \cos^2 u \sin v \cos v \sin w \cos w + r^2 \sin^2 u \sin v \cos v \sin w \cos w$$

$$-r^2 \sin v \cos v \sin w \cos w + 0$$

$$B = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_w, \mathbf{x}_w \rangle = r^2 \cos^2 u \cos^2 v \sin^2 w + r^2 \sin^2 u \cos^2 v \sin^2 w + r^2 \sin^2 v \sin^2 w$$

$$+r^2 \cos^2 w$$

$$C = r^2$$

katsayıları bulunur. O halde, birinci temel form matrisi

$$I = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v \cos^2 w & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 w & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

elde edilmiş oldu. Burada

$$\det I = r^6 \cos^2 v \cos^4 w$$

ile belirlidir. Hiperyüzey için

$$e = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_w}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_w\|}$$

Gauss tasviri formülünü kullanarak (4.1) ile verilen $\mathbf{x}(u, v, w)$ hiperküresinin Gauss tasvirini hesaplanacaktır.

Öncelikle, üçlü vektörel çarpım yardımıyla

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -r\sin u\cos v\cos w & r\cos u\cos v\cos w & 0 & 0 \\ -r\cos u\sin v\cos w & -r\sin u\sin v\cos w & r\cos v\ \cos w & 0 \\ -r\cos u\cos v\cos w & -r\sin u\cos v\sin w & -r\sin v\ \sin w & r\cos w \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r\cos u\cos v\cos w & 0 & 0 \\ -r\sin u\sin v\cos w & r\cos v\cos w & 0 \\ -r\sin u\cos v\sin w & -r\sin v\sin w & r\cos w \end{vmatrix} e_1$$

$$- \begin{vmatrix} -r\sin u\cos v\cos w & 0 & 0 \\ -r\cos u\sin v\cos w & r\cos v\cos w & 0 \\ -r\cos u\cos v\sin w & -r\sin v\sin w & r\cos w \end{vmatrix} e_2$$

$$+ \begin{vmatrix} -r\sin u\cos v\cos w & r\cos u\cos v\cos w & 0 \\ -r\cos u\sin v\cos w & -r\sin u\sin v\cos w & 0 \\ -r\cos u\cos v\sin w & -r\sin u\cos v\sin w & r\cos w \end{vmatrix} e_3$$

$$- \begin{vmatrix} -r\sin u\cos v\cos w & r\cos u\cos v\cos w & 0 \\ -r\cos u\sin v\cos w & -r\sin u\sin v\cos w & r\cos v\cos w \\ -r\cos u\cos v\sin w & -r\sin u\cos v\sin w & -r\sin v\sin w \end{vmatrix} e_4$$

olur. Determinantlar açıldığında

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_w = r^3\cos u\cos^2 v\cos^3 w\ e_1 + r^3\sin u\cos^2 v\cos^3 w\ e_2$$

$$+r^3\sin v\cos v\cos^3 w\, e_3 + r^3\cos v\sin w\cos^2 w\ e_4$$

elde edilir. Sadeleşmeler sonucunda hiperkürenin Gauss tasviri

$$e = (\cos u\cos v\cos w, \sin u\cos v\cos w, \sin v\cos w, \sin w)$$

olur.

(4.1) ile verilen hiperkürenin ikinci temel form katsayılarını hesaplayalım. Öncelikle, hiperkürenin u, v, w ya göre ikinci türevleri

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} -r\cos u \cos v \cos w \\ -r\sin u \cos v \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} r \sin u \sin v \cos w \\ -r \cos u \sin v \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{vu},$$

$$\mathbf{x}_{uw} = \begin{pmatrix} r \sin u \cos v \sin w \\ -r \cos u \cos v \sin w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{wu},$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \cos w \\ -r \sin u \cos v \cos w \\ -r \sin v \cos w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{vw} = \begin{pmatrix} r \cos u \sin v \sin w \\ r \sin u \sin v \sin w \\ -r \cos v \sin w \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{wv},$$

ve

$$\mathbf{x}_{ww} = \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \cos w \\ -r \sin u \cos v \cos w \\ -r \sin v \cos w \\ -r \sin w \end{pmatrix}$$

elde edilmiş oldu. Hiperkürenin bu türevleri ve Gauss tasviri yardımıyla aşağıdaki ikinci temel form katsayıları bulunur.

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, e\rangle = -r\cos^2 u\cos^2 v\cos^2 w - r\sin^2 u\cos^2 v\cos^2 w$$

$$L = -r\cos^2 v\cos^2 w,$$

$$\langle \mathbf{x}_{uv}, e\rangle = r\sin u\cos u\sin v\cos v\cos^2 w - r\sin u\cos u\sin v\cos v\cos^2 w$$

$$M = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_{uw}, e\rangle = r\sin u\cos u\cos^2 v\sin w\cos w - r\sin u\cos u\cos^2 v\sin w\cos w$$

$$P = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_{vv}, e\rangle = -r\cos^2 u\cos^2 v\cos^2 w - r\sin^2 u\cos^2 v\cos^2 w - r\sin^2 v\cos^2 w$$

$$N = -r\cos^2 w,$$

$$\langle \mathbf{x}_{vw}, e\rangle = r\cos^2 u\sin v\cos v\sin w\cos w + r\sin^2 u\sin v\cos v\sin w\cos w$$

$$-r\sin v\cos v\sin w\cos w$$

$$T = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_{ww}, e\rangle = -r\cos^2 u\cos^2 v\cos^2 w - r\sin^2 u\cos^2 v\cos^2 w - r\sin^2 v\cos^2 w$$

$$-r\sin^2 w$$

$$V = -r.$$

Böylece, ikinci temel form matrisi

$$II = \begin{pmatrix} -r\cos^2 v\cos^2 w & 0 & 0 \\ 0 & -r\cos^2 w & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{pmatrix}$$

ile belirlenmiş oldu. Ayrıca

$$\det II = -r^3 \cos^2 v \cos^4 w$$

olur. Hiperyüzeyin şekil operatörü $S = I^{-1}II$ olmak üzere

$$S = \frac{1}{\det I}\begin{pmatrix} GC - B^2 & AB - FC & FB - AG \\ AB - FC & AC - A^2 & AF - EB \\ FB - AG & AF - EB & AG - F^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M & P \\ M & N & T \\ P & T & V \end{pmatrix}$$

matris çarpımıyla

$$S = \frac{1}{\det I}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

şekil operatörü bulunur. Buradaki matris bileşenleri hiperküre için hesaplanmış ve aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} s_{11} &= ABM - CFM - AGP + BFP + CGL - B^2L \\ &= -r^5 \cos^2 v \cos^4 w, \\ s_{12} &= ABN - CFN - AGT + BFT + CGM - B^2M \\ &= 0, \\ s_{13} &= ABT - CFT - AGV + BFV + CGP - B^2P \\ &= 0, \\ s_{21} &= ABL - CFL + AFP - BPE + CME - A^2M \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$s_{22} = ABM - CFM + AFT - BTE + CNE - A^2N$$

$$= -r^5 \cos^2 v \cos^4 w$$

$$s_{23} = ABP - CFP + AFV - BVE + CTE - A^2T$$

$$= 0,$$

$$s_{31} = -AGL + BFL + AFM - BME + GPE - F^2P$$

$$= 0,$$

$$s_{32} = -AGM + BFM + AFN - BNE + GTE - F^2T$$

$$= 0,$$

$$s_{33} = -AGP + BFP + AFT - BTE + GVE - F^2V$$

$$= -r^5 \cos^2 v \cos^4 w.$$

Bu sonuçlar matris formunda yazılırsa

$$S = \frac{1}{r^6 \cos^2 v \cos^4 w} \begin{pmatrix} -r^5 \cos^2 v \cos^4 w & 0 & 0 \\ 0 & -r^5 \cos^2 v \cos^4 w & 0 \\ 0 & 0 & -r^5 \cos^2 v \cos^4 w \end{pmatrix}$$

olur. Sadeleştirmeler sonrası hiperkürenin şekil operatörü

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Hiperkürenin Gauss eğriliği

$$K = \det(S) = -\frac{1}{r^3}$$

ve ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{3} iz(S) = -\frac{1}{r}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, bu sonuçlarla 4-boyuttaki Laplace-Beltrami operatörü hesaplarına geçilmektedir.

$$\mathcal{U} = \frac{CG}{\sqrt{|det\mathrm{I}|}} \mathbf{x}_u$$

$$= \frac{r^4 \cos^2 w}{r^3 \cos v \cos^2 w} \mathbf{x}_u$$

$$= r^2 \begin{pmatrix} -\sin u \cos w \\ \cos u \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \frac{-CE}{\sqrt{|det\mathrm{I}|}} \mathbf{x}_v$$

$$= \frac{-r^4 \cos^2 v \cos^2 w}{r^3 \cos v \cos^2 w} \mathbf{x}_v$$

$$= -r^2 \cos v \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \cos w \\ -\sin u \sin v \cos w \\ \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \frac{EG}{\sqrt{|det\mathrm{I}|}} \mathbf{x}_w$$

$$= \frac{r^4 \cos^2 v \cos^4 w}{r^3 \cos v \cos^2 w} \mathbf{x}_w$$

$$= r^2 \cos v \cos^2 w \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \sin w \\ -\sin u \cos v \sin w \\ -\sin v \sin w \\ cosw \end{pmatrix},$$

$$U_u = r^2 \begin{pmatrix} -\cos u \cos w \\ -\sin u \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$V_v = -r^2 \left\{ \begin{array}{l} -\sin v \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \cos w \\ -\sin u \sin v \cos w \\ \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ +\cos v \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \cos w \\ -sinu \cos v \cos w \\ -\sin v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= -r^2 \begin{pmatrix} \cos u \sin^2 v \cos w - \cos u \cos^2 v \cos w \\ \sin u \sin^2 v \cos w - \sin u \cos^2 v \cos w \\ -2 \sin v \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W_w = r^2 \left\{ \begin{array}{l} -2 \cos u \cos w \sin w \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \sin w \\ -\sin u \cos v \sin w \\ -\sin v \sin w \\ \cos w \end{pmatrix} \\ \\ +\cos v \cos^2 w \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \cos w \\ -\sin u \cos v \cos w \\ -\sin v \cos w \\ -\sin w \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$= r^2 \begin{pmatrix} 2 \cos u \cos^2 v \sin^2 w \cos w - \cos u \cos^2 v \cos^3 w \\ 2 \sin u \cos^2 v \sin^2 w \cos w - \sin u \cos^2 v \cos^3 w \\ 2 \sin v \cos v \sin^2 w \cos w - \sin v \cos v \cos^3 w \\ -2 \cos v \sin w \cos^2 w - \cos v \sin w \cos^2 w \end{pmatrix}$$

olur. Bulunan bu sonuçları

$$\Delta^I \mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{|detI|}}(U_u - V_v + W_w)$$

eşitliğinde yerine yazarak

$$\Delta^I \mathbf{x} = \frac{-1}{r^3 \cos v \cos^2 w} r^2 \left\{ \begin{pmatrix} -\cos u \cos w \\ -\sin u \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos u \sin^2 v \cos w - \cos u \cos^2 v \cos w \\ \sin u \sin^2 v \cos w - \sin u \cos^2 v \cos w \\ -2 \sin v \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos u \cos^2 v \sin^2 w \cos w - \cos u \cos^2 v \cos^3 w \\ 2 \sin u \cos^2 v \sin^2 w \cos w - \sin u \cos^2 v \cos^3 w \\ 2 \sin v \cos v \sin^2 w \cos w - \sin v \cos v \cos^3 w \\ -2 \cos v \sin w \cos^2 w - \cos v \sin w \cos^2 w \end{pmatrix} \right\}$$

olur. Düzenleme sonrası

$$= \frac{-1}{r \cos v \cos^2 w} \begin{pmatrix} \cos u \cos w \, (-1 + \sin^2 v - \cos^2 v + 2 \cos^2 v \sin^2 w - \cos^2 v \cos^2 w) \\ \sin u \cos v \, (-1 + \sin^2 v - \cos^2 v + 2 \cos^2 v \sin^2 w - \cos^2 v \cos^2 w) \\ \sin v \cos v \cos w (-1 - 1 + 2 \sin^2 w - \cos^2 w) \\ -3 \cos v \sin w \cos^2 w \end{pmatrix}$$

elde edilir. Sadeleştirme ile

$$\Delta^I \mathbf{x} = \frac{3}{r} \begin{pmatrix} \cos u \cos v \cos w \\ \sin u \cos v \cos w \\ \sin v \cos w \\ \sin w \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece, aşağıdaki teorem elde edilir.

4.1 Teorem $\mathbb{E}^4$ uzayındaki (4.1) ile verilen hiperkürenin I temel form ile belirli olan Laplace-Beltrami operatörü; ortalama eğrilik ve Gauss tasviri arasında

$$\Delta^I \mathbf{x} = -3He$$

bağıntısı vardır.

4.2 $\Delta^{II}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ Özelliğini Sağlayan Hiperküre

Bu kısımda, $\mathbb{E}^4$ uzayında (4.1) ile verilen hiperkürenin ikinci temel forma bağlı Laplace-Beltrami operatörü hesaplanacaktır.

$\mathbb{E}^4$ uzayında r yarıçaplı $\mathbf{x}(u, v, w)$ hiperkürenin ikinci temel form katsayılarını kullanarak

$$\mathcal{U} = \frac{NV}{\sqrt{|det\mathrm{II}|}}\mathbf{x}_u$$

$$= \frac{r^2 \cos^2 w}{r^{3/2} \cos v \cos^2 w}\mathbf{x}_u$$

$$= r^{3/2}\begin{pmatrix} -\sin u \cos w \\ \cos u \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \frac{-LV}{\sqrt{|det\mathrm{II}|}}\mathbf{x}_v$$

$$= \frac{-r^2 \cos^2 v \cos^2 w}{r^{3/2} \cos v \cos^2 w}\mathbf{x}_v$$

$$= -r^{3/2} \cos v \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \cos w \\ -\sin u \sin v \cos w \\ \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \frac{LN}{\sqrt{|det\mathrm{II}|}}\mathbf{x}_w$$

$$= \frac{r^2 \cos^2 v \cos^4 w}{r^{3/2} \cos v \cos^2 w}\mathbf{x}_w$$

$$= r^{3/2}\cos^2 w \begin{pmatrix} -\cos u \cos^2 v \sin w \\ -\sin u \cos^2 v \sin w \\ -\sin v \cos v \sin w \\ \cos v \cos w \end{pmatrix},$$

$$U_u = r^{3/2} \begin{pmatrix} -\cos u \cos w \\ -\sin u \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$V_v = -r^{3/2}\left\{ -\sin v \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \cos w \\ -\sin u \sin v \cos w \\ \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} + \cos v \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \cos w \\ -\sin u \cos v \cos w \\ -\sin v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W_w = r^{3/2}\left\{ -2\sin w \cos w \begin{pmatrix} -\cos u \cos^2 v \sin w \\ -\sin u \cos^2 v \sin w \\ -\sin v \cos v \sin w \\ \cos v \cos w \end{pmatrix} + \cos^2 w \begin{pmatrix} -\cos u \cos^2 v \cos w \\ -\sin u \cos^2 v \cos w \\ -\sin v \cos v \cos w \\ -\cos v \sin w \end{pmatrix} \right\}$$

olur. Bu sonuçlar

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{|detII|}}(U_u - V_v + W_w)$$

denkleminde yerine yazıldığında

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = \frac{1}{r^{3/2}\cos v \cos^2 w} r^{3/2} \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\cos u \cos w \\ -\sin u \cos w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos u \sin^2 v \cos w \\ \sin u \sin^2 v \cos w \\ -\sin v \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -\cos u \cos^2 v \cos w \\ -\sin u \cos^2 v \cos w \\ -\sin v \cos v \cos w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos u \cos^2 v \sin^2 w \cos w \\ 2\sin u \cos^2 v \sin^2 w \cos w \\ 2\sin v \cos v \sin^2 w \cos w \\ -2\cos v \sin w \cos^2 w \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -\cos u \cos^2 v \cos^3 w \\ -\sin u \cos^2 v \cos^3 w \\ -\sin v \cos v \cos^3 w \\ -\cos v \sin w \cos^2 w \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

elde edilir. Düzenlemeler sonrası

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = \frac{1}{\cos v \cos^2 w}\begin{pmatrix} \cos u \cos w\,(-1+\sin^2 v-\cos^2 v+2\cos^2 v\sin^2 w-\cos^2 v\cos^2 w) \\ \sin u \cos v\,(-1+\sin^2 v-\cos^2 v+2\cos^2 v\sin^2 w-\cos^2 v\cos^2 w) \\ \sin v\cos v\cos w(-2+2\sin^2 w-\cos^2 w) \\ -3\cos v\sin w\cos^2 w \end{pmatrix}$$

olup, sadeleştirme ile

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = -3\begin{pmatrix} \cos u\cos v\cos w \\ \sin u\cos v\cos w \\ \sin v\cos w \\ \sin w \end{pmatrix}$$

sonucu bulunur. Böylece, aşağıdaki teorem ortaya çıkmaktadır.

4.2 Teorem $\mathbb{E}^4$ uzayındaki (4.1) ile verilen hiperküre için *II* temel formla ilgili olan Laplace-Beltrami operatörü ve Gauss tasviri arasında

$$\Delta^{II}\mathbf{x} = -3e$$

bağıntısı vardır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, öncelikle Öklid 3-uzayında, $\Delta^I \mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(3,3)$, özelliğini sağlayan r yarıçaplı küre yüzeyi incelenmiştir. Kürenin *I* temel formu ve Gauss tasviri elde edilmiştir. I temel forma bağlı olarak kürenin Laplace-Beltrami operatörü bulunmuştur. Kürenin Laplace-Beltrami operatörü, Gauss tasviri, ortalama eğriliğine ait bağıntılar verilmiştir. Ayrıca, kürenin *II* temel formu için Laplace-Beltrami operatörü hesaplanmıştır.

Küre için yapılan işlemler ışığında, 3-boyutlu diferensiyel geometrideki ispat teknikleri ve formülleri 4-boyuta taşınarak hesaplamalar hiperküre üzerinde yapılmıştır. 4-boyutlu Öklid uzayında, $\Delta^I \mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, $\mathcal{A} \in Mat(4,4)$, özelliğini sağlayan r yarıçaplı hiperküre çalışılmıştır. Hiperkürenin I temel formu ve Gauss tasviri hesaplanmıştır. I temel forma bağlı olarak hiperkürenin Laplace-Beltrami operatörü bulunmuştur. Ayrıca, hiperkürenin Laplace-Beltrami operatörü, Gauss tasviri ve ortalama eğriliği arasında oluşan bağıntılar araştırılmıştır.

Son olarak, hiperkürenin *II* temel formu için Laplace-Beltrami operatörü elde edilmiştir.

Tezden elde edilen bulgular ve sonuçlar, başka uzay formlarına da aktarılabilir. Ayrıca, tezin bu konuda çalışacak bilim insanlarına yol göstereceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Alias, L.J. ve Gürbüz, N. (2006). An extension of Takashi theorem for the linearized operators of the highest order mean curvatures. *Geom. Dedicata,* 121: 113–127.

Aminov, Y. (2001). *The Geometry of Submanifolds*. Gordon and Breach Sci. Pub., Amsterdam.

Arslan K., Bayram, B.K., Bulca, B., Kim Y.H., Murathan, C. ve Öztürk, G. (2011a). Vranceanu surface in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Indian J. Pure Appl. Math.,* 42 (1): 41–51.

Arslan, K., Bayram, B.K., Bulca, B. ve Öztürk, G. (2012). Generalized rotation surfaces in $\mathbb{E}^4$. *Results in Math.,* 61 (3): 315–327.

Arslan, K., Bulca, B., Kılıç B., Kim, Y.H., Murathan, C. ve Öztürk, G. (2011b). Tensor product surfaces with pointwıse 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.,* 48 (3): 601–609.

Arslan, K., Bulca, B. ve Milousheva, V. (2014). Meridian surfaces in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.,* 51: 911–922.

Arslan, K., Deszcz, R. ve Yaprak, Ş. (1997). On Weyl pseudosymmetric hypersurfaces. *Colloq. Math.,* 72: 353–361.

Arslan, K. ve Milousheva, V. (2016). Meridian surfaces of elliptic or hyperbolic type with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 4-space. *Taiwanese J. Math.,* 20 (2): 311–332.

Arslan K., Sütveren A. ve Bulca, B. (2021). Rotational λ-hypersurfaces in Euclidean spaces. *Creat. Math. Inform.,* 30 (1): 29–40.

Arvanitoyeorgos, A., Kaimakamis, G. ve Magid, M. (2009). Lorentz hypersurfaces in $\mathbb{E}_1^4$ satisfying $\Delta H = \alpha H$. *Illinois J. Math.,* 53 (2): 581–590.

Barros, M. ve Chen, B.Y. (1987). Stationary 2-type surfaces in a hypersphere. *J. Math. Soc. Japan,* 39 (4): 627–648.

Barros, M. ve Garay, O.J. (1987). 2-type surfaces in S^3. *Geom. Dedicata,* 24 (3): 329–336.

Bektaş B., Canfes E.Ö. ve Dursun U. (2017a). Classification of surfaces in a pseudo-sphere with 2-type pseudo-spherical Gauss map. *Math. Nachr.,* 290 (16): 2512–2523.

Bektaş, B., Canfes, E.Ö. ve Dursun, U. (2017b). Pseudo-spherical submanifolds with 1-type pseudospherical Gauss map. *Results in Math.,* 71 (3): 867–887.

Beneki, C.C., Kaimakamis, G. ve Papantoniou, B.J. (2002). Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space. *J. Math. Anal. Appl.,* 275: 586–614.

Bour, E. (1862). Theorie de la deformation des surfaces. *J. Ecole Imp. Polytech.* 22: 1–148.

Chen, B.Y. (1983). On submanifolds of finite type. *Soochow J. Math.*, 9: 65–81.

Chen, B.Y. (1984). *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*. World Scientific, Singapore.

Chen, B.Y. (1985). Finite type submanifolds in pseudo-Euclidean spaces and applications. *Kodai Math. J.*, 8 (3): 358–374.

Chen, B.Y. ve Piccinni, P. (1987). Submanifolds with finite type Gauss map. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 35: 161–186.

Cheng, Q.M. ve Wan, Q.R. (1994). Complete hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$ with constant mean curvature. *Monatsh. Math.*, 118: 171–204.

Cheng, S.Y. ve Yau, S.T. (1977). Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.*, 225: 195–204.

Choi, M. ve Kim, Y.H. (2001). Characterization of the helicoid as ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 38: 753–761.

Dillen, F., Pas, J. ve Verstraelen, L. (1990). On surfaces of finite type in Euclidean 3-space. *Kodai Math. J.*, 13: 10–21.

Dillen, F., Fastenakels, J. ve Van der Veken, J. (2009). Rotation hypersurfaces of $S^n \times \mathbb{R}$ and $H^n \times \mathbb{R}$. *Note Mater.*, 29: 41–54.

Do Carmo, M. ve Dajczer, M. (1982). Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J.*, 34: 351–367.

Do Carmo, M. ve Dajczer, M. (1983). Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277: 685–709.

Dursun, U. (2007). Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Taiwanese J. Math.*, 11 (5): 1407–1416.

Dursun, U. (2009). Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map in Lorentz-Minkowski space. *Proc. Est. Acad. Sci.*, 58: 146–161.

Dursun, U. ve Turgay, N.C. (2013). Minimal and pseudo-umbilical rotational surfaces in Euclidean space $\mathbb{E}^4$. *Mediterr. J. Math.*, 10: 497–506.

Dursun, U. ve Turgay, N.C. (2019). Space-like surfaces in Minkowski space $\mathbb{E}_1^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Ukrainian Math. J.*, 71 (1): 64–80.

Euler, L. (1753). Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 9: 277–308.

Euler, L. (1754). Eléments de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin,* 9: 258–293.

Euler, L. (1771). De curva rectificabili in superficie sphaerica. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae,* 15: 195–216.

Euler, L. (1781). De mensura angulorum solidorum. *Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitinae,* 2: 31–54.

Euler, L. (1782). Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata. *Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitinae,* 3: 72–86.

Euler, L. (1783). Problematis cuiusdam Pappi Alexandrini constructio. *Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitinae,* 4: 91–96.

Euler, L. (1797). Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum. *Nova Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitinae,* 10: 47–62.

Euler, L. (1815). Geometrica et sphaerica quaedam. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 5: 96–114.

Ferrandez, A., Garay, O.J. ve Lucas, P. (1990). On a certain class of conformally at Euclidean hypersurfaces. In *Global Analysis and Global Differential Geometry*, Springer, Berlin, Germany, 48–54.

Ganchev, G. ve Milousheva, V. (2014). General rotational surfaces in the 4-dimensional Minkowski space. *Turkish J. Math.,* 38: 883–895.

Garay, O.J. (1988). On a certain class of finite type surfaces of revolution. *Kodai Math. J.,* 11: 25–31.

Garay, O. (1990). An extension of Takahashi's theorem. *Geom. Dedicata,* 34: 105–112.

Güler, E. (2007). Bour’s theorem and lightlike profile curve. *Yokohama Math. J.,* 54: 55–77.

Güler, E. (2020). Fundamental form *IV* and curvature formulas of the hypersphere. *Malaya J. Mat.,* 8 (4): 2008–2011.

Güler, E., Hacısalihoğlu, H.H. ve Kim, Y.H. (2018). The Gauss map and the third Laplace-Beltrami operator of the rotational hypersurface in 4-space. *Symmetry,* 10 (9): 1–12.

Güler, E. ve Kişi, Ö. (2019). Dini-type helicoidal hypersurfaces with timelike axis in Minkowski 4-space. *Mathematics,* 7 (2): 1–8.

Güler, E., Magid, M. ve Yaylı, Y. (2016). Laplace-Beltrami operator of a helicoidal hypersurface in four-space. *J. Geom. Symm. Phys.,* 41: 77–95.

Güler, E. ve Turgay, N.C. (2019). Cheng-Yau operator and Gauss map of rotational hypersurfaces in 4-space. *Mediterr. J. Math.,* 16 (3): 1–16.

Güler, E. ve Vanlı, A. (2006). Bour 's theorem in Minkowski three-space. *J. Math. Kyoto Univ.,* 46: 47–63.

Hasanis, Th. ve Vlachos, Th. (1995). Hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector field. *Math. Nachr.,* 172: 145–169.

Kahraman Aksoyak, F. ve Yaylı, Y. (2015). General rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map in pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}^4_2$. *Indian J. Pure Appl. Math.,* 46 (1): 107–118.

Kahraman Aksoyak, F. ve Yaylı, Y. (2016). Flat rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map in $\mathbb{E}^4$. *Honam Math. J.,* 38 (2): 305–316.

Kim, D.S., Kim, J.R. ve Kim, Y.H. (2016). Cheng-Yau operator and Gauss map of surfaces of revolution. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* 39 (4): 1319–1327.

Kim, Y.H. ve Turgay, N.C. (2013). Surfaces in $\mathbb{E}^4$ with L_1-pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.,* 50 (3): 935–949.

Kühnel, W. (2015). *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*. Third ed., translated from the 2013 German ed. AMS, Providence, RI.

Lawson, H.B. (1980). *Lectures on Minimal Submanifolds*. 2nd ed.; Mathematics Lecture Series 9; Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE, USA.

Levi-Civita, T. (1937). Famiglie di superficie isoparametriche nellordinario spacio euclideo. *Rend. Acad. Lincei,* 26: 355–362.

Magid, M., Scharlach, C. ve Vrancken, L. (1995) Affine umbilical surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Manuscr. Math.,* 88: 275–289.

Moore, C. (1919). Surfaces of rotation in a space of four dimensions. *Ann. Math.,* 21: 81–93.

Moore, C. (1920). Rotation surfaces of constant curvature in space of four dimensions. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 26: 454–460.

Moruz, M. ve Munteanu, M.I. (2016). Minimal translation hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$. *J. Math. Anal. Appl.,* 6: 798–812.

Özkaldı, S. ve Yaylı, Y. (2010). Tensor product surfaces in and Lie groups. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* 2 (1): 69–77.

Scharlach, C. (2007). Affine geometry of surfaces and hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. In *Symposium on the Differential Geometry of Submanifolds*; Dillen, F., Simon, U., Vrancken, L., Eds.; University Valenciennes: Valenciennes, France, 124: 251–256.

Senoussi, B. ve Bekkar, M. (2015). Helicoidal surfaces with $\Delta^J r = Ar$ in 3-dimensional Euclidean space. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.,* 60 (3): 437–448.

Stamatakis, S. ve Zoubi, H. (2010). Surfaces of revolution satisfying $\Delta^{III}x = Ax$. *J. Geom. Graph.*, 14 (2): 181–186.

Takahashi, T. (1966). Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 18: 380–385.

Turgay, N.C. (2015). Some classifications of Lorentzian surfaces with finite type Gauss map in the Minkowski 4-space. *J. Aust. Math. Soc.*, 99 (3): 415–427.

Verstraelen, L., Valrave, J. ve Yaprak, Ş. (1994). The minimal translation surfaces in Euclidean space. *Soochow J. Math.*, 20: 77–82.

Yoon, D.W. (2001). Rotation Surfaces with finite type Gauss map in $\mathbb{E}^4$. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 32: 1803–1808.

Yoon, D.W. (2003). Some properties of the Clifford torus as rotation surfaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34 (6): 907–915.