T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS VE KOORDİNATLARA GÖRE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE İLGİLİ İNTEGRALLERİN HATA TAHMİNLERİ

NESLİHAN SÜMER

DANIŞMAN
DOÇ. DR. SAMET ERDEN

BARTIN-2023

T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONVEKS VE KOORDİNATLARA GÖRE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE İLGİLİ İNTEGRALLERİN HATA TAHMİNLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan SÜMER

BARTIN-2023

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Samet ERDEN danışmanlığında hazırlamış olduğum "KONVEKS VE KOORDİNATLARA GÖRE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE İLGİLİ İNTEGRALLERİN HATA TAHMİNLERİ" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

11.08.2023

Neslihan SÜMER

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Samet ERDEN' e teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Tezin gelişmesinde katkı sağlayan sayın jüri üyelerine, katkılarından dolayı teşekkür ederim. Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve tezi yazmamda her türlü yardımını esirgemeyen Fatih TAŞDELEN' e teşekkürlerimi sunarım.

Neslihan SÜMER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS VE KOORDİNATLARA GÖRE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE İLGİLİ İNTEGRALLERİN HATA TAHMİNLERİ

Neslihan SÜMER

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Samet ERDEN
Bartın-2023, sayfa: 40

İntegral eşitsizlikleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte kullanılan en önemli araçlardan biridir. Bazı problemlerde integralin tam değeri hesaplanamaz. Böyle durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gereklidir. Bu yüzden, bazı matematikçiler fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikleri üzerine çalışmıştır. Hermite-Hadamard, Ostrowski, Chebyshev, Grüss ve Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri, literatürdeki önemli eşitsizliklerden bazılarıdır.

Son zamanlarda, bir çok araştırmacı Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çok sayıda sonuç bulmuşlardır. Bu kapsamda klasik Hermite Hadamard eşitsizliğinin daha hassas sonuçları, eşdeğerleri ve genelleştirilmiş versiyonlarının yanı sıra fonksiyonların farklı kabulleri altında yeni Hermite Hadamard Tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Örneğin; koordinatlara göre tanımlı konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler Dragomir tarafından sunulmuştur (Dragomir, 2001).

Bu tezde genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, konveks fonksiyonları taban alan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler üzerine devam eden çalışmaların ışığında incelenecektir. İlk olarak bir integralin alt ve üst sınırlarını belirleyen klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmesi ile ana integrale daha yakın alt ve üst sınırlar sağlayan yeni bir eşitsizlik sunulacaktır. Bu sonucun elde edilmesinde konveks fonksiyonlar ve n parçadan oluşan bir çekirdek kullanılacaktır. Ayrıca, n' in farklı değerlerinde elde edilen alt ve üst sınırları daha kolay belirlemek için Matlab programı yardımıyla kodlar yazılacaktır. Bu sayede, özel konveks fonksiyonların integrallerinin hata tahminleri ve gerçek değerleri arasındaki farklar incelenecektir. Bu bağlamda, bir integrale alt ve üst sınırlar sağlayan yeni eşitsizlik yardımıyla integralleri hesaplanamayan veya hesaplanması çok zor olan fonksiyonlar için yaklaşık değerler sağlayan yeni formüller sunulacaktır.

Gerçek hayat problemlerini çözmek için kullanılan fonksiyonlar genelde birden fazla bağımsız değişken içeren fonksiyonlardır. Bu yüzden, bir bağımsız değişken içeren fonksiyonların yanı sıra iki bağımsız değişken içeren fonksiyonlar da bu tez konusu kapsamında incelenecektir. İki değişkenli fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmesinde koordinatlara göre konveks fonksiyonlar kullanılarak iki katlı integraller için Hermite-Hadamard tipli genelleştirilmiş eşitsizlikler sunulacaktır. Bu eşitsizlikler, Dragomirin (2001) koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için ispatladığı sonucun genelleştirilmiş versiyonlarıdır. Bu sayede, iki katlı integrallerin hata tahminlerini hesaplamak için daha etkili yaklaşım metotları incelenebilir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, hata tahminleri, konveks fonksiyon, koordinatlara göre konveks fonksiyon.

Bilim Alanı Kodu: 26D07, 26D10, 26D15, 26A33, 41A55.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

GENERALİZATİONS OF HERMİTE- HADAMARD TYPE INEQUALİTİES FOR CONVEX AND CO-ORDİNATED CONVEX FUNCTİONS AND ERROR ESTİMATİONS OF RELATED INTEGRALS

Neslihan SÜMER

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Samet ERDEN
Bartın-2023, pp: 40

The theory of integral inequalities is one of the most useful mathematical tools in both pure and applied mathematics. The exact value of an integral cannot be calculated in some problems. In these cases, it is necessary to develop opproximation methods. Therefore, some mathematicians worked on integral inequalities for various classes of functions. Hermite-Hadamard, Ostrowski, Chebyshev, Grüss and Ostrowski-Grüss are some of the important inequalities in literature.

In recent years, many authors have established a large number of inequalities connected to the Hermite-Hadamard's inequality. For recent results, refinements, counterparts and generalizations of classical Hermite-Hadamard inequality and new Hermite-Hadamard-type inequalities under various assumptions for the functions. For example, Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions on the co-ordinates defined in a rectangle from the plane are introduced by Dragomir (Dragomir, 2001).

Inspired and motivated by ongoing research on Hermite-Hadamard type inequalities based on convex functions, generalized Hermite-Hadamard type inequalities will be examined in this thesis. by using a generalization of classical Hermite-Hadamard inequality. By generalizing Hermite-Hadamard inequality, which determines the lower and upper bounds of an integral, a new inequality that provides lower and upper bounds closer to the main integral will be presented. In obtaining this result, convex functions and a kernel consisting of n parts will be used. In addition, somem codes will be written to determine lower and upper bounds which is obtained at different values of n in Matlab program. Herewith, the differences between error estimations and real values of the integrals of convex functions will be examined. As a result, with the help of a new inequality which provides lower and upper bounds to an integral, new formulas that give approximate integral values for functions whose integrals cannot be calculated or are very difficult to calculate will be presented.

Functions used to solve real-life problems contain usually more than one independent variable. Therefore, functions containing two independent variables as well as functions containing one independent variable will be examined within the scope of this thesis. In order to Hermite-Hadamard type inequalities for functions containing two independent variables, co-ordinated convex functions will be used. So, generalized Hermite-Hadamard type inequalities for double integrals will be presented. These inequalities are generalized versions of Hermite-Hadamard type inequalities which provided by Dragomir (2001) for co-ordinated convex funstions. Herewith, more effective approximation methods can be examined for error estimations of double integrals

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, error estimations, convex functions, co-ordinated convex Functions.

Scientific Field Code: 26D07, 26D10, 26D15, 26A33, 41A55.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo **Sayfa**

No **No**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$(.,.)$	: Açık aralık
$[.,.]$	: Kapalı aralık
N	: Doğal sayılar kümesi
N^+	: Pozitif doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
R^+	: Pozitif reel sayılar kümesi
R^2	: İki boyutlu reel sayılar düzlemi
I	: R ‘de bir aralık
I^0	: I ‘nın içi
$\|f\|$	: f fonksiyonunun mutlak değeri
$f'(x)$	: f fonksiyonunun birinci türevi
$f''(x)$	: f fonksiyonunun ikinci türevi
$f_x(x,y)$	: f fonksiyonunun x' e göre türevi
$f_y(x,y)$	: f fonksiyonunun y' ye göre türevi
$f_{xy}(x,y)$	: f fonksiyonunun önce y' ye sonra x' e göre türevi

1. GİRİŞ

Geometri, analiz, topoloji, lineer cebir alanlarında kullanılan konvekslik kavramının tarihi, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in π değerini hesaplamasına kadar uzanır. Buna karşın konvekslik kavramının terimsel olarak matematikte yer alması 19. yüzyılın sonu 20. yüzyılın başını bulmaktadır. İlk olarak 1881 yılında Hermite'nin sonucunun, 1883 yılında Mathesis dergisinde yayınlanmasıyla konvekslik kavramı ortaya çıkmış olur. Hadamard'n 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da asıl çalışmalar $1905 - 1906$ yıllarında J. L. W. V. Jensen ile başlamıştır.

Eşitsizlik teorisinin gelişmesinde önemli rol oynayan konveks fonksiyon kavramı ile ilgili ilk monografi 1930'lu yıllarda yayınlanmıştır. Hardy, Littlewood, Polya, Beckenbach, Bellman, Mitrinòvic, Pachpatte, Pećarić ve Fink gibi matematikçiler eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonları bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy vd., 1952). Bu kitabın birçok baskısı olmakla birlikte bu gün hala yeni baskısı da bulunmaktadır. İkinci çalışma ise E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan $1934 - 1960$ yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren "Inequalities" adlı kitaptır. Bunu, Mitrinòvic (1970) yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" adlı isimli kitap takip eder. Bu kaynakların yanı sıra literatürde var olan bazı kaynaklar şunlardır: "Inequalities involving Functions and Their Integrals and Derivaties" (Mitrinòvic vd., 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinòvic vd., 1993), "Mathematical inequalities" (Pachpatte,2005) ve "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu ve Persson, 2006) dır.

Konveks fonksiyonlar teorisi ile ilişkili olan eşitsizlik teorisi C. F. Gauss, A. L. Cauchy ve P. L. Ćebyśev ile gelişmiştir. Eşitsizlikler teorisi ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki oldukça önemlidir. $19.-20.$ yy'da bulunan önemli eşitsizliklerin birçoğu konveks fonksiyonlar yardımı ile elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden biri, 1981 yılında Hermite tarafından ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Hermite, 1881 yılının ekim ayında, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı bir mektup ile aşağıdaki ifadeyi sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, sayfa 82) şu şekilde yayınlanmıştır;

"Sur deux limites d'une integrale define. Soit $f(x)$ une Function qui varie toujours dans le mĕme send de $x = a$, $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

on bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses".

Bu eşitsizlikler integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerinin ortalama değerine ilişkin olup fonksiyonun konvekslik veya konkavlık olması durumuna bağlıdır.

Daha sonra Hermite'nin sonuçlarının genelleştirilmesi olarak 1906 yılında Fejer trigonometrik fonksiyonlar ile çalışırken şu eşitsizliği elde etmiştir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx.$$

Burada $g(x) = 1$ ve $x \in (a,b)$ için Hermit'in eşitsizlikleri elde edilir. Fejer'in bu sonucu ile ilgili son yıllarda literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizliklerin yanı sıra 1937 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliği de mevcuttur. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların birçoğu S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitapta yer almıştır.

Özellikle son 20 yılda Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin genellemeleri ve farklı konveks fonksiyon sınıflarını taban alan sonuçları üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Dragomir ve Agarwal (1998) tarafından sunulan Yamuk (Trapezoid) tipli eşitsizlikler ve Kırmacı (2004) tarafından sunulan Orta nokta (Mid-point) tipli eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için sunulan temel eşitsizliklerdendir. Aynı zamanda, diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler üzerine yapılan çalışmalar da bulunmaktadır (Pearce vePečarić, 2000; Yang vd., 2004). Tseng ve diğerleri (2011) bir çalışmasında diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Fejer tipli ağırlıklı integral eşitsizliklerini incelemişlerdir. Referanslarda yer alan bazı çalışmalarda ise ikinci türevlerinin mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli sonuçlar ele alınmıştır (Erden ve Sarıkaya, 2016; Sarıkaya ve Yıldırım, 2010; Sarıkaya vd. 2012).

Güncel bir çalışmada Hermite-Hadamard, Yamuk ve Orta Nokta tipli eşitsizliklerin genelleştirilmiş versiyonlarına ek olarak yine konveks fonksiyonları taban alan Bullen tipli eşitsizliklerin genelleştirilmiş versiyonları İşcan ve diğerleri (2021) tarafından elde edilmiştir. Benzer bir genelleştirilmiş çekirdek yardımıyla s-konveks fonksiyonları taban alan Simpson Tipli eşitsizlikler ise Kashuri ve diğerleri (2020) tarafından sunulmuştur. Aritmetik-Harmonik konveks fonksiyonlar için ikinci tip Simpson eşitsizliğinin bir genellemesi Erden ve diğerleri (2020) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmaların doğrultusunda, klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir versiyonu incelenecektir. Tez konusu kapsamında, aynı zamanda Dragomir (2001) tarafından sunulan iki değişkenli koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğin genelleştirilmiş versiyonu da elde edilecektir. Dragomirin çalışmasından sonra koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için birçok integral eşitsizliği sunulmuştur. Örneğin, bazı yazarlar referanslarda yer alan makalelerde koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli sonuçlar geliştirmişlerdir (Erden ve Sarıkaya, 2010; Erden ve Sarıkaya, 2014; Sarıkaya vd., 2010; Sarıkaya vd. 2014).

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde, önceki çalışmalarda elde edilen ve tez konusu ile bağlantılı olan bazı önemli tanım ve teoremlerden bahsedilecektir. Bu tezin amacı tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmektir. Bu doğrultuda, ilk olarak bir bağımsız değişken içeren fonksiyonlar için gerekli olan tanım, kavram ve teoremler verilecektir. Sonrasında, iki bağımsız değişken içeren fonksiyonlar için temel tanım, kavram ve teoremlerden bahsedilecektir.

2.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda, tez çalışması kapsamında elde edilecek olan sonuçlar konveks fonksiyonları taban aldığından, bu kapsamda gerekli olan fonksiyon tanımları ve aralarındaki ilişkileri açıklayacak olan teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Sınırlı Fonksiyon) $I \subset R$, $f : I \to R$ bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.2. (Limit) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon ve k sayısı K kümesinin bir yığılma noktası olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - L| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonunun k noktasındaki limiti L sayısıdır denir ve bu durum

$$\lim_{x \to k} \varphi(x) = L$$

ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 2.3. (Süreklilik) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - \varphi(k)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonu $k \in K$ noktasında süreklidir denir (Balcı, 2012).

Süreklilik aynı zamanda aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

Tanım 2.4. (Süreklilik) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : \ K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun.

$$\lim_{x \to k} \varphi(x) = \varphi(k)$$

ise φ fonksiyonu k noktasında süreklidir denir. Eğer φ fonksiyonu K kümesinin bütün elemanlarında sürekli ise, o zaman φ fonksiyonu K kümesi üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.5. (Türev) $K \subset R$ olmak üzere $x_0 \in K,\ x_0$ K' nın yığılma noktası ve $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

limiti ya da $x = x_0 + h$ alındığında ortaya çıkan

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

limiti varsa φ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevinin değeridir. Ayrıca , φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $\varphi'(x_0)$, $\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ ya da $D\varphi(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 2.6. (Konveks Küme) V bir lineer uzay ve $A \subset V$ ve $x, y \in A$ olsun.

$$B = \{t \in V \ : \ t = \alpha x + (1 - \alpha)y, \ \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

şeklinde tanımlanabiliyorsa A kümesine konveks küme denir. Ancak $t \in B$ ise $t = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğinde x ve y nin katsayıları için bağıntı her zaman doğrudur.

Bundan dolayı konveks küme tanımındaki $(1 - \alpha)$, α yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan negatif olmayan α, β sayıları yazabiliriz. Geometrik anlamda B kümesi uç noktalar x ve y olan bir doğru parçasını belirtmektedir. Sonuç olarak konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasına karşılık gelen kümedir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.7. (Konveks Fonksiyon) $\forall\, \alpha, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha t+(1-t)b)\leq tf(\alpha)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliğini sağlayan $f: I\subset R\rightarrow R$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak $t\in(0,1)$ aralığında da seçilebilir.). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçtiği anlamına gelmektedir.

Aşağıda bazı konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir (Bayraktar, 2000).

$i)$ e^{ax}

$ii)$ $-log(x)$

$iii)$ x^a , $(R^+), a\geq 1$ ve $a\leq 0$

$iv)$ x^a , $(R^+), a\leq 0\leq 1$

$v)$ $|x|^a, a\geq 1$

$vi)$ $x\,log(x)$, (R^+)

Teorem 2.1. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise
$i)$ $f, (a,b)$ aralığında süreklidir.
$ii)$ $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Teorem 2.2. $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir (Bayraktar, 2000).

Teorem 2.3. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır (Bayraktar, 2000).

Teorem 2.4. $f: [a,b]\rightarrow R$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde ikinci türevi mevcut olsun. Eğer her $x\in(a,b)$ için $f''(x)>0$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konvekstir. (Bayraktar, 2000).

Teorem 2.5. $[a, b]$ kapalı aralığında konveks her fonksiyon integrallenebilirdir (Pecaric vd., 1992).

Tez kapsamında planlanan sonuçların elde edilmesi için gerekli olan bazı eşitsizlikler ise aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.6. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f\,(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| \; dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Balcı, 2012).

Teorem 2.7. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \; dx \leq \left(\int_a^b |\; f(x)|^p \; dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\; g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović, 1970; Mitrinović vd., 1993).

Sonuç 2.1. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^p, [a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \; dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Power Mean eşitsizliği benzer şekilde çift katlı integraller için

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\, dy = \left(\int_a^b |f(x,y)|\, dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x,y)|\,|\; g(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir (Mitrinović, 1970; Mitrinović vd., 1993).

Konveks fonksiyonlar için ispatlanmış klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 2.8. $f:[a,b]\to R$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği bir $f:[a,b]\to R$ fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar (Hadamard, 1893).

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, $t\in[0,1]$ için

$$f(\alpha t+(1-t)b)\leq tf(\alpha)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte iki tarafında $[0,1]$ aralığında t'ye göre integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(\alpha t+(1-t)b)dt\leq\int_0^1 tf(\alpha)dt+\int_0^1(1-t)f(b)dt=\frac{f(\alpha)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Diğer taraftan f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan , $t\in[0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{\alpha t+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+bt}{2}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}[f(\alpha t+(1-t)b)+(1-t)a+bt]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t' ye göre integrali alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\int_0^1\left[f(\alpha t+(1-t)b)+\big((1-t)a+bt\big)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(at+(1-t)b)dt+\int_0^1 f\big((1-t)a+bt\big)dt\right]$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafında ikinci integralde $1-t=k$ yazarsak sol taraftaki eşitsizlikte

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\,(at+(1-t)b)dt + \int_0^1 f(ka+(1-k)b)\,dk\right]$$

$$= \int_0^1 f(at+(1-t)b)\,dt$$

olur. Buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 f(at+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde ederiz. $\int_0^1 f(at+(1-t)b)dt$ integralinde $at+(1-t)b=x$ yazarsak,

$$\int_0^1 f(at+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

1998 yılında Dragomir ve Agarwal konveks fonksiyonları taban alan Yamuk (Trapezoid) Tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitsizliği kurmuştur.

Lemma 2.1. $f : I^0 \subset R \to R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a<b$ şartını sağlayan $a,b \in I^0$ elemanları için $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği geçerlidir (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 2.9. $f : I^0 \subset R \to R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a<b$ şartını sağlayan $a,b \in I^0$ elemanları için $|f'|^q$ ifadesi $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)[|f'(a)|+|f'(b)|]}{8}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 2.10. $f : I^0 \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a < b$ şartını sağlayan $a, b \in I^0$ elemanları ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ şartını sağlayan $p, q > 1$ değerleri için $|f'|^q$ ifadesi $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Sonrasında elde edilen önemli eşitsizliklerden Orta Nokta eşitsizliği ise aşağıdaki özdeşlik yardımıyla elde edilmiştir.

Lemma 2.2. $f : I^0 \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a < b$ şartını sağlayan $a, b \in I^0$ elemanları için $f' \in L[a, b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

eşitliği sağlanır (Kırmacı, 2004).

Türevinin mutlak değeri konveks olan Orta Nokta tipli eşitsizlik ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.11 $f : I^0 \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a < b$ şartını sağlayan $a, b \in I^0$elemanları için $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizliğin var olduğu bilinmektedir (Kırmacı, 2004).

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)}{8}(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

Konveks fonksiyonlar için verilen bu temel eşitsizlikleri genelleştirmek için İşcan ve diğerleri (2021) aşağıdaki özdeşliği geliştirmiştir.

Lemma 2.3. $f\ : I^0 \subset\ R \to R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a < b$ şartını sağlayan $a, b \in I^0$ elemanları için $f' \in L[a,b]$ ise

$$I_n(f, a, b)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n^2}\left[\int_0^1 (1-2t)\, f'\left(t\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+(1-t)\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)dt\right]$$

özdeşliği sağlanır (İşcan vd., 2021).

İspat. Keyfi bir $n \in N$ sayısı ele alındığında $i \in \{1,2, \dots..n-1\}$ değerleri için kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$I_i = \int_0^1 (1-2t)f'\left(t\frac{(n-i)a+ib}{n}+(1-t)\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)dt$$

$$= \frac{n}{a-b}(1-2t)f\left(t\frac{(n-i)a+ib}{n}+(1-t)\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\Big|_0^1$$

$$+\frac{2n}{a-b}\int_0^1 f\left(t\frac{(n-i)a+ib}{n}+(1-t)\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)dt$$

Sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki özdeşliğin sağ tarafındaki integralde

$$x = t\frac{(n-i)a+ib}{n}+(1-t)\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_i = -\frac{n}{a-b}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\right]$$

$$-\frac{2n^2}{(a-b)^2}\int_{\frac{(n-i)a+ib}{n}}^{\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}} f(x)dx$$

elde edilir. Daha sonra, bu integralin her iki tarafı $\frac{b-a}{2n^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{b-a}{2n^2}I_i=\frac{1}{2n}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$-\frac{1}{b-a}\int_{\frac{(n-i)a+ib}{n}}^{\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}} f(x)dx$$

ifadesi bulunur. Son olarak, (2.2) özdeşliğinin her iki tarafı i değerleri için 0 dan $n-1\,'$ e kadar toplanırsa

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{2n^2}I_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2n}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{(n-i)a+ib}{n}}^{\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}} f(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2n}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 2.2. Yukarıdaki lemmada verilen özdeşlikte $n=1$ alınırsa, o zaman Lemma 2.1' de verilen eşitlik elde edilir (İşcan vd., 2021).

Teorem 2.12. $f\,:\,I^0\subset\,R\to R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a<b$

şartını sağlayan $a, b \in I^0$ elemanları ve $q \geq 1$ değerleri için $|f'|^q$ ifadesi $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$|I_n f(a,b)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{4n^2} \left[\left(\frac{2n-2i-1}{2n} \right) |f'(a)^q| + \left(\frac{2i+1}{2n} \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (İşcan vd., 2021).

Sonuç 2.3. Yukarıdaki teoremde verilen eşitsizlikte $n = 1$ ve $q = 1$ alınırsa, o zaman Teorem 2.9' da verilen eşitsizlik elde edilir (İşcan vd., 2021).

Teorem 2.13. $f : I^0 \subset R \to R$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a < b$ şartını sağlayan $a, b \in I^0$ elemanları ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ şartını sağlayan $p, q > 1$ değerleri için $|f'|^q$ ifadesi $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$|I_n f(a,b)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n^2 2^{1+\frac{1}{q}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{2n-2i-1}{n} \right) |f'(a)^q| + \right] \left(\frac{2i+1}{n} \right) |f'(b)^q|^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (İşcan vd., 2021).

Sonuç 2.4. Yukarıdaki teoremde verilen eşitsizlikte $n = 1$ alınırsa, o zaman teorem 2.10' da verilen eşitsizlik elde edilir (İşcan vd., 2021).

İşçan ve diğerlerinin (2021) çalışmasında kullanılan genelleştirme yöntemi bu tez çalışmasına ilham olmuştur. Bu tez çalışmasında, benzer yöntemler kullanılarak klasik Hermite-Hadamard eşitsizlikleri genelleştirilecek ve bu genelleme üzerinden hata tahmini hesaplamaları yapılacaktır.

2.2. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda, tez kapsamında kullanılacak bir diğer fonksiyon çeşidi olan koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için temel tanım ve teoremlerden bahsedilecektir.

Tanım 2.8. R^2 de $a < b$ ve $c < d$ şartları ile verilen $\Delta =: [a, b] \times [c, d]$ bölgesinde tanımlı $f\ :\ \Delta\ \to R$ fonksiyonu ele alınsın. Eğer f fonksiyonu her $(x,y),(z,w)\in\Delta$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)z,ty+(1-t)w)\leq tf(x,y)+(1-t)f(z,w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman f fonksiyonu Δ üzerinde konvekstir denir. Aynı zamanda, eğer her $x\in[a,b]$ için $f_y\ :\ [a,b]\to R$, $f_y(u)=f(u,y)$ ve her $y\in[c,d]$ $i$çin $f_x\ :\ [c,d]\to R$, $f_x(v)=f(x,v)$ kısmi türevleri konveks ise, o zaman $f\ :\ \Delta\to R$ fonksiyonu koordinatlara göre konveks fonksiyondur (Dragomir, 2001).

Tanım 2.9. Eğer $f\ :\ \Delta=:[a,b]\times[c,d]\to R$ fonksiyonu her $t,s\in[0,1]$ ve $(x,y),(u,v)\in\Delta$ için

$$\begin{aligned}&f(tx+(1-t)y,su+(1-s)v)\\ &\leq tsf(x,u)+s(1-t)f(y,u)+t(1-s)f(x,v)+(1-t)(1-s)f(y,v)\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa, o zaman $f\ :\ \Delta\ \to R$ fonksiyonu koordinatlara göre konvekstir (Latif ve Alamori, 2009).

Teorem 2.14. Her konveks fonksiyon aynı zamanda koordinatlara göre konvekstir fakat tersi her zaman doğru değildir (Dragomir, 2001).

Örneğin, $f_0(x,y)=xy$ şeklinde verilen $f_0:[0,1]\times[0,1]\to[0,\infty)$ fonksiyonu ele alınsın. f fonksiyonu $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde koordinatlara göre konvekstir. $(a,0),(0,b)\in[0,1]\times[0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(t(a,0)+(1-t)(0,b))=f(ta,(1-t)b)=t(1-t)ab$$

ve

$$tf(a,0)+(1-t)f(0,b)=0$$

olduğundan her $t\in(0,1)$ ve $a,b\in(0,1)$ için

$$(t(a,0)+(1-t)(0,b))>\ tf(a,0)+(1-t)f(0,b)$$

olur. Bu durumda f fonksiyonu $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde konveks değildir.

Koordinatlara göre konveks olan bir fonksiyonu belirlemek için aşağıdaki lemma da kullanılabilir

Lemma 2.4. f fonksiyonu $f\ :\ \Delta \to R^{+}$ şeklinde tanımlansın. İki kez diferansiyellenebilme şartını sağlayan f fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlara göre konveks olması için gerek yeter şart $f_y(u) = f(u, y)$ ile tanımlı $f_y : [a, b] \to R$ fonksiyonu için $f_x'' \geq 0$ ve $f_x(v) = f(x, v)$ ile tanımlı $f_x : [c, d] \to R$ fonksiyonu için $f_y'' \geq 0$ koşullarının sağlanmasıdır (Latif ve Alamori, 2009).

Bu doğrultuda koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için temel Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler Dragomir (2001) tarafından aşağıdaki gibi sunulmuştur.

Teorem 2.15. $f\ :\ \Delta =: [a, b] \times [c, d] \to R$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlara göre konveks olsun. O zaman f fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \qquad (2.3) \\
& \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)dx + \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)dy\right] \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \\
& \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x, c)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x, d)dx \right. \\
& \left. + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(a, y)dy + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(b, y)dy\right] \\
& \leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4}
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri sağlanır (Dragomir, 2001).

İspat. $f : \Delta \to R$ fonksiyonu koordinatlara göre konveks olduğundan $g_x(y) = f(x, y)$ şeklinde verilen $g_x : [c, d] \to R$ fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde her $x \in [a, b]$ için konvekstir. O zaman, $g_x(y)$ fonksiyonuna Hermite-Hadamard eşitsizliği uygulanırsa, her $x \in [a,b]$ için sağlanan

$$g_x\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d g_x\,(y)dy \leq \frac{g_x(c)+g_x(d)}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda, her $x \in [a,b]$ için

$$f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d f\,(x,y)dy \leq \frac{f(x,c)+f(x,d)}{2} \tag{2.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (2.4) eşitsizliklerinde $[a,b]$ aralığında x e göre integral alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)dx \tag{2.5}$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,c)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,d)dx\right]$$

olur. Benzer işlemler $g_y(x) \coloneqq f(x,y)$ şeklinde tanımlanan $g_y\colon [a,b] \to R$ fonksiyonu için uygulanırsa

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)dy \tag{2.6}$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d f(a,y)dy + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(b,y)dy\right]$$

Sonucu bulunur. (2.5) ve (2.6) eşitsizlikleri kendi aralarında taraf tarafa toplandıktan sonra 2 ile bölünürse, o zaman (2.3) eşitsizliklerinin ikinci üçüncü ve dördüncü kısımları elde edilir. Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin ilk kısımlarından aynı zamanda

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)dx$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \le \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)dy$$

ifadeleri de yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplandıktan sonra ikiye bölünürse, o zaman (2.3) eşitsizliklerinin ilki elde edilmiş olur. Son olarak, klasik Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin ikinci kısmı kullanılarak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,c)dx \le \frac{f(a,c)+f(b,c)}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,d)dx \le \frac{f(a,d)+f(b,d)}{2}$$

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f(a,y)dy \le \frac{f(a,c)+f(a,d)}{2}$$

ve

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f(b,y)dy \le \frac{f(b,c)+f(b,d)}{2}$$

Eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler de taraf tarafa toplandıktan sonra 4 ile bölünürse, (2.3) eşitsizliklerinin sonuncusu da elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki eşitsizlikler ile bağlantılı Yamuk (Trapezoid) tipli eşitsizlikler elde etmek için ispatlanan aşağıdaki özdeşlik Sarıkaya ve diğerleri (2010) tarafından sağlanmıştır.

Lemma 2.5. $a<b$ ve $c<d$ şartları ile verilen $\Delta \ =: [a,b]\times[c,d]$ bölgesinde kısmi türevlere sahip $f:\Delta \to R$ fonksiyonu ele alınsın. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ ise

$$\left|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right.$$

$$+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x,c)+f(x,d)]dx+\frac{1}{d-c}\int_c^d [f(a,y)+f(b,y)]dy\right\}\Bigg|$$

$$=\frac{(b-a)(d-c)}{4}\int_0^1\int_0^1 (1-2t)(1-2s)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(ta+(1-t)b,sc+(1-s)d)dtds$$

özdeşliği sağlanır (Sarıkaya vd., 2010).

Teorem 2.16. $a<b$ ve $c<d$ şartları ile verilen $\Delta\ =:[a,b]\times[c,d]$ bölgesinde kısmi türevlere sahip $f\ :\Delta\to R$ fonksiyonu ele alınsın. Eğer $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlara göre konveks ise

$$\Bigg|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}+\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x,c)+f(x,d)]dx+\frac{1}{d-c}\int_c^d [f(a,y)+f(b,y)]dy\right\}\Bigg|$$

$$\leq\frac{(b-a)(d-c)}{16}\left\{\frac{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|}{4}\right\}$$

sonucu sağlanır (Sarıkaya vd., 2010).

Koordinatlara göre konveks fonksiyonları taban alan Orta Nokta tipli eşitsizlikler elde etmek için ispatlanan aşağıdaki özdeşlik Latif ve Dragomir (2012) tarafından ispatlanmıştır.

Lemma 2.6. $a<b$ ve $c<d$ şartları ile verilen $\Delta\ =:[a,b]\times[c,d]$ bölgesinde kısmi türevlere sahip $f\ :\ \Delta\to R$ fonksiyonu ele alınsın. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\in L(\Delta)$ ise

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)dx-\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)dy$$

$$(b-a)(d-c)\int_0^1\int_0^1 U(t,s)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(ta+(1-t)b, sc+(1-s)d)dtds$$

özdeşliği sağlanır (Latif ve Dragomir, 2012). Burada $U(t,s)$ fonksiyonu

$$U(t,s)=\begin{cases} ts & (t,s)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ t(s-1) & (t,s)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left(\frac{1}{2},1\right] \\ (t-1)s & (t,s)\in\left(\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ (t-1)(s-1) & (t,s)\in\left(\frac{1}{2},1\right]\times\left(\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Teorem 2.17. $a<b$ ve $c<d$ şartları ile verilen $\Delta =: [a,b]\times[c,d]$ bölgesinde kısmi türevlere sahip $f : \Delta \to R$ fonksiyonu ele alınsın. Eğer $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlara göre konveks ise

$$\left|\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx + f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)dx - \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)dy\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{16}\left\{\frac{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|}{4}\right\}$$

sonucu sağlanır (Latif ve Dragomir, 2012).

Bu çalışmalar ışığında, iki değişkenli fonksiyonlar için verilen temel Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin genelleştirilmiş versiyonları incelenecektir. Özel durumlarda temel eşitsizlikleri sağlayan, farklı seçenekler için de daha iyi yaklaşım metotları sunan gelişmiş sonuçlar ile literatüre katkı sağlanacaktır. Ayrıca iki değişkenli fonksiyonların integrallerinin gerçek değerleri ve yaklaşım değerleri arasındaki farklar incelenecektir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde ilk olarak konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve uygulamaları incelenecektir. Daha sonra, konveks fonksiyonların iki değişkenli versiyonları olan koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecek ve yaklaşım metotları incelenecektir.

3.1.Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları

Bu kısımda, tek değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kurulacaktır.

Teorem 3.1. $f: I \subseteq R \to R,\ a < b$ olmak üzere $a, b \in I$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ve n keyfi bir pozitif doğal sayı olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2(n-i)a + 2ib + (b-a)}{2n}\right) \tag{3.1}$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{(n-i)a + ib}{n}\right) + f\left(\frac{(n-i-1)a + (i+1)b}{n}\right)\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. İlk olarak,

$$\frac{(n-i)a + ib}{n} + \frac{(n-i-1)a + (i+1)b}{n}$$

$$= t\frac{(n-i)a + ib}{n} + (1-t)\frac{(n-i-1)a + (i+1)b}{n}$$

$$+\frac{(n-i)a+ib}{n}(1-t)+t\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}$$

özdeşliği yazılabilir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan

$$f\left(\frac{2(n-i)a+2ib+(b-a)}{2n}\right)$$

$$=f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)t+(1-t)\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{2n}\right.$$

$$\left.+\frac{\big((n-i)a+ib\big)(1-t)+\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)t}{2n}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)t+(1-t)\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{n}\right)$$

$$+\frac{1}{2}f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)(1-t)+\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)t}{n}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$f\left(\frac{2(n-i)a+2ib+(b-a)}{2n}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)t+(1-t)\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{n}\right)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)(1-t)+\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)t}{n}\right)dt$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller hesaplanmalıdır. İlk integral için

$$\frac{\big((n-i)a+ib\big)t+(1-t)\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{n}=u$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{a-b}{n}dt=du$$

elde edilir ve

$$dt = \frac{-ndu}{b-a}$$

olarak yazılabilir. O zaman,

$$\int_0^1 f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)t+(1-t)\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{n}\right)dt$$

$$= \frac{-n}{b-a}\int_{\frac{((n-i-1)a+(i+1)b)}{n}}^{\frac{((n-i)a+ib)}{n}} f(u)du = \frac{n}{b-a}\int_{\frac{((n-i)a+ib)}{n}}^{\frac{((n-i-1)a+(i+1)b)}{n}} f(u)du$$

olur. İkinci integral için de benzer yöntem izlenirse

$$\int_0^1 f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)(1-t)+\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)t}{n}\right)dt$$

$$= \frac{n}{b-a}\int_{\frac{((n-i)a+ib)}{n}}^{\frac{((n-i-1)a+(i+1)b)}{n}} f(u)du$$

sonucuna ulaşılabilir. Bu durumda,

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{2(n-i)a+2ib+(b-a)}{2n}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{\frac{((n-i)a+ib)}{n}}^{\frac{((n-i-1)a+(i+1)b)}{n}} f(u)du \qquad (3.2)$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)t+(1-t)\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{n}\right)$$

$$+\frac{1}{2}f\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)(1-t)+\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)t}{n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}tf\left(\frac{\big((n-i)a+ib\big)}{n}\right)+(1-t)f\left(\frac{\big((n-i-1)a+(i+1)b\big)}{n}\right)$$

$$+\frac{1}{2}tf\left(\frac{\left((n-i-1)a+(i+1)b\right)}{n}\right)+(1-t)f\left(\frac{\left((n-i)a+ib\right)}{n}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında t ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_{\frac{((n-i)a+ib)}{n}}^{\frac{((n-i-1)a+(i+1)b)}{n}} f(u)du \tag{3.3}$$

$$\leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{\left((n-i)a+ib\right)}{n}\right)+f\left(\frac{\left((n-i-1)a+(i+1)b\right)}{n}\right)\right]$$

sonucu bulunur. (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{2(n-i)a+2ib+(b-a)}{2n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_{\frac{((n-i)a+ib)}{n}}^{\frac{((n-i-1)a+(i+1)b)}{n}} f(u)du$$

$$\leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{\left((n-i)a+ib\right)}{n}\right)+f\left(\frac{\left((n-i-1)a+(i+1)b\right)}{n}\right)\right]$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlik sisteminde i üzerinde 0 dan $n-1$' e kadar toplam uygulanırsa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2(n-i)a+2ib+(b-a)}{2n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{(n-i)a+ib}{n}}^{\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)}{2}$$

sonucu bulunur. i nin 0 dan $n-1$' e bütün integral sınırları yazılıp toplanırsa

$$\int_{a}^{\frac{(n-1)a+b}{n}} f(x)dx + \int_{\frac{(n-1)a+b}{n}}^{\frac{(n-2)a+2b}{n}} f(x)dx + \ldots + \int_{\frac{a+(n-1)b}{n}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

olduğundan, istenilen (3.1) eşitsizliklerine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1. Eğer (3.1) eşitsizliklerinde $n = 1$ alnrsa, klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.2. Eğer (3.1) eşitsizliklerinde $n = 2$ alınırsa, o zaman

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç aynı zamanda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olarak ifade edilebilir. Bu eşitsizlik, literatürde verilmiştir.

Sonuç 3.3. Eğer (3.1) eşitsizliklerinde $n = 3$ alnrsa, o zaman

$$\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{5a+b}{6}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu sonuç aynı zamanda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olarak ifade edilebilir.

Sonuç olarak, n değeri arttıkça tanımlandığı aralıkta konveks olan herhangi bir fonksiyonun integralinin gerçek değerine daha yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Bu durum örnek konveks fonksiyonlar seçilerek incelenecek ve bir fonksiyonun integralinin gerçek değeri ile bu çalışmada verilen yaklaşım yöntemleri arasındaki hata tahminleri verilecektir.

İlk olarak, (3.1) eşitsizlikleri dikkate alındığında

$$Q_{n,1} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{2(n-i)a+2ib+(b-a)}{2n}\right)$$

$$Exact = \int_a^b f(x)dx$$

$$Q_{n,2} = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}\right)\right]$$

$$Q_n(Error) = \left|\frac{Q_{n,1}+Q_{n,2}}{2} - Exact\right|$$

ifadeleri yazılabilir. Burada $Q_{n,1}$ ana integralin alt sınırı, $Q_{n,2}$ ana integralin üst sınırı, $Q_n(Error)$ ise integralin gerçek değeri ile yaklaşım metodunun verdiği değer arasındaki farkı göstermektedir.

$f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + 1$, $f_3(x) = xlnx$ ve $f_4(x) = sinx$ fonksiyonları dikkate alındığında $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ değerleri için aşağıdaki tablo elde edilmektedir.

Tablo 3.1: f_1, f_2, f_3 ve f_4' ün integrallerinin alt-üst sınırları ve hata tahminleri

$f_1: [0,1]$					$f_2: [0,1]$				
n	$Q_{n,1}$	Exact	$Q_{n,2}$	$Q_n(Error)$	n	$Q_{n,1}$	Exact	$Q_{n,2}$	$Q_n(Error)$
10	6,33805	6,36185	6,40949	0,01192400	10	1,53084	1,53333	1,53833	0,001249790
20	6,35589	6,36185	6,37377	0,00298184	20	1,53271	1,53333	1,53458	0,000312487
30	6,35920	6,36185	6,36715	0,00132533	30	1,53306	1,53333	1,53389	0,000138886
$f_3: [1, e]$					$f_4: [\pi, 3\pi/2]$				
n	$Q_{n,1}$	Exact	$Q_{n,2}$	$Q_n(Error)$	n	$Q_{n,1}$	Exact	$Q_{n,2}$	$Q_n(Error)$
10	2,09603	2,09726	2,09972	0,000615037	10	-1,00103	-1	-0,997943	0,000514095
20	2,09696	2,09726	2,09788	0,000153772	20	-1,00026	-1	-0,999486	0,000128514
30	2,09713	2,09726	2,09754	6,83439E-05	30	-1,00011	-1	-0,999772	5,71164E-05

Tablo 3.1 de açık bir şekilde görülmektedir ki seçilen bütün konveks fonksiyonlar için integrallerin alt sınırları integralin gerçek değerinin altında kalmakta ve üst sınırları integralin gerçek değerinin üstünde kalmaktadır. Ayrıca, seçilen n değeri arttıkça alt ve üst sınırlar integralin gerçek değerine yaklaşmaktadır. Bu doğrultuda geliştirilen yaklaşık değer hesaplama yöntemi n değeri arttıkça daha yakın sonuçlar vermektedir, çünkü n değeri arttıkça hata değeri sıfıra yaklaşmaktadır. Böylece, bu bölümde elde edilen eşitsizliklerin tutarlılığı incelenmiş ve konveks fonksiyonlar için farklı bir yaklaşım metodu geliştirilmiştir.

3.2. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları

Bu kısımda, iki bağımsız değişken içeren fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve bazı özel sonuçları verilecektir. Burada sunulan ana sonuç Dragomir (2001) tarafından verilen (2.3) eşitsizliklerinin bir genellemesidir.

İlk olarak, eşitsizliklerin daha anlaşılır olması için bazı notasyonlar verilecektir.

$$P(x,y;n,m) \tag{3.4}$$

$$= \frac{1}{2m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1} \int_a^b f\left(x, \frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}\right)dx$$

$$+\frac{1}{2n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1} \int_c^d f\left(\frac{2(n-i)a+(2i+1)b-a}{2n}, y\right)dy$$

$$Q(x,y;n,m) \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{4m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_a^b f\left(x, \frac{(m-j)c+jd}{m}\right)dx\right.$$

$$\left.+\int_a^b f\left(x, \frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)dx\right]$$

$$+\frac{1}{4n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_c^d f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}, y\right)dy\right.$$

$$\left.+\int_a^b f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}, y\right)dy\right]$$

$$R(n,m) \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{4nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}, \frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right.$$

$$+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n}, \frac{(m-j)c+jd}{m}\right)$$

$$+f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}, \frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)$$

$$f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)\Bigg]$$

$$N=\frac{2(n-i)a+(2i+1)b-a}{2n}$$

$$M=\frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}$$

Teorem 3.2. $f:\Delta=:[a,b]\times[c,d]\to R$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlara göre konveks ve $n,m\in N^{+}$ olsun. O zaman f fonksiyonu için

$$\frac{1}{nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}f(N,M) \tag{3.7}$$

$$\leq P(x,y;n,m)$$

$$\leq\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\leq Q(x,y;n,m)$$

$$\leq R(n,m)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada, $P(x,y;n,m),Q(x,y;n,m)$ ve $R(n,m)$ ifadeleri sırasıyla (3.4), (3.5) ve (3.6) da verildiği gibi tanımlanmıştır.

İspat. $f:\Delta=:[a,b]\times[c,d]\to R$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlara göre konveks olduğundan $h_x(y)=f(x,y)$ şeklinde tanımlanan $h_x:[c,d]\to R$ fonksiyonu her $x\in[a,b]$ için konvekstir. Bu durumda, $h_x(y)$ fonksiyonuna $[c,d]$ aralığı üzerinde her m pozitif doğal sayısı için (3.1) eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}h_x\left(\frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}\right)$$

$$\leq \frac{1}{d-c}\int_c^d h_x(y)dy$$

$$\leq \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f\left(\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)+f\left(\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $h_x(y) = f(x, y)$ olduğundan,

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f\left(x, \frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}\right) \tag{3.8}$$

$$\leq \frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,y)dy$$

$$\leq \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f\left(x, \frac{(m-j)c+jd}{m}\right)+f\left(x, \frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)}{2}$$

olarak yazılabilir. (3.8) eşitsizliklerinde $[a, b]$ aralığında x e göre integral alınırsa

$$\frac{1}{m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1} \int_a^b f\left(x, \frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}\right)dx \tag{3.9}$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\leq \frac{1}{2m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_a^b f\left(x, \frac{(m-j)c+jd}{m}\right)dx\right.$$

$$\left.+\int_a^b f\left(x, \frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)dx\right]$$

ifadesi elde edilir. Benzer süreçler $h_y(x) = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan $h_y: [a, b] \to R$ fonksiyonu ve $n \in N^+$ için uygulanırsa

$$\frac{1}{n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{c}^{d} f\left(\frac{2(n-i)a+(2i+1)b-a}{2n},y\right)dy \tag{3.10}$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dydx$$

$$\leq \frac{1}{2n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{c}^{d} f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},y\right)dy\right.$$

$$\left.+\int_{a}^{b} f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},y\right)dy\right]$$

sonucuna ulaşılır. (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri kendi aralarında taraf tarafa toplandıktan sonra 2 ile bölünürse, o zaman (3.7) eşitsizliklerinin ikinci üçüncü ve dördüncü kısımları elde edilir. Aynı zamanda, (3.1) ifadesinin ilk eşitsizliği $h_x(y)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(N,M) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f\left(x,\frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}\right)dx$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı m ile bölünür ve j üzerinde 0'dan $m-1$' e kadar toplamlar alınırsa,

$$\frac{1}{nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(N,M) \tag{3.11}$$

$$\leq \frac{1}{m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{a}^{b} f\left(x,\frac{2(m-j)c+(2j+1)d-c}{2m}\right)dx$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde, $h_y(x)$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(N,M) \tag{3.12}$$

$$\leq \frac{1}{n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{c}^{d} f\left(\frac{2(n-i)a+(2i+1)b-a}{2n},y\right)dy$$

ifadesi bulunur. (3.11) ve (3.12) eşitsizlikleri taraf tarafa toplandıktan sonra ikiye bölünürse, o zaman (3.7) eşitsizliklerinin ilki elde edilmiş olur.

Şimdi, (3.1) ifadesinin ikinci eşitsizliği $h_x(y)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)dx$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)}{2}$$

elde edilir ve bu eşitsizliğin her iki tarafı m ile bölünür ve j üzerinde 0 dan $m-1$' e kadar toplamlar alınırsa, o zaman

$$\frac{1}{m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1}\int_a^b f\left(x,\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)dx \tag{3.13}$$

$$\leq \frac{1}{2nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right]$$

sonucu bulunur. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{m}\frac{1}{b-a}\sum_{j=0}^{m-1}\int_a^b f\left(x,\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)dx \tag{3.14}$$

$$\leq \frac{1}{2nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)\right]$$

olur. Son olarak, (3.1) ifadesinin ikinci eşitsizliği $h_y(x)$ fonksiyonuna uygulanırsa, o zaman

$$\frac{1}{n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1}\int_c^d f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},y\right)dy \tag{3.15}$$

$$\leq \frac{1}{2nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{(n-i)a+ib}{n},\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)\right]$$

ve

$$\frac{1}{n}\frac{1}{d-c}\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^b f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},y\right)dy \tag{3.16}$$

$$\leq \frac{1}{2nm}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},\frac{(m-j)c+jd}{m}\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{(n-i-1)a+(i+1)b}{n},\frac{(m-j-1)c+(j+1)d}{m}\right)\right]$$

eşitsizlikleri bulunur. (3.13)-(3.16) eşitsizlikleri taraf tarafa toplandıktan sonra 4 ile bölünürse, (3.7) eşitsizliklerinin sonuncusu da elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4. Eğer (3.7) eşitsizliklerinde $n=m=1$ alınır ise, Dragomir (2001) tarafından sunulan (2.3) eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 3.5. Eğer (3.7) eşitsizliklerinde $n=1$ ve $m=2$ alınırsa, o zaman

$$2\left[f\left(\frac{a+b}{2},\frac{3c+d}{4}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+3d}{4}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f\left(x,\frac{3c+d}{4}\right)+f\left(x,\frac{c+3d}{4}\right)\right]dx+\frac{2}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)dy$$

$$\leq \frac{4}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f(x,c) + 2f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) + (x,d) \right] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a,y) + f(b,y)]dy$$

$$\leq \frac{1}{2} \{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)\} + f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)$$

sonucu bulunur.

Sonuç 3.6. Eğer (3.7) eşitsizliklerinde $n = 2$ ve $m = 1$ alınırsa, o zaman

$$2\left[f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, \frac{c+d}{2}\right) \right]$$

$$\leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d \left[f\left(\frac{3a+b}{4}, y\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}, y\right) \right] dy$$

$$\leq \frac{4}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x,c) + (x,d)]dx + \frac{\frac{1}{2}}{d-c} \int_c^d \left[f(a,y) + 2f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) + f(b,y) \right] dy$$

$$\leq \frac{1}{2} \{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)\} + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)$$

sonucu bulunur.

Sonuç 3.7. Eğer (3.7) eşitsizliklerinde $n = m = 2$ seçilirse, o zaman

$$\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{3c+d}{4}\right) + f\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) \right.$$

$$+\left(\frac{a+3b}{4},\frac{3c+d}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4},\frac{c+3d}{4}\right)\Bigg]$$

$$\leq P(x,y;2,2)$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\leq Q(x,y;2,2) \leq R(2,2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada, $P(x,y;2,2)$, $Q(x,y;2,2)$ ve $R(2,2)$ ifadeleri

$$P(x,y;2,2)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f\left(x,\frac{3c+d}{4}\right)+\left(x,\frac{c+3d}{4}\right)\right]dx$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{d-c}\int_c^d \left[f\left(\frac{3a+b}{4},y\right)+f\left(\frac{a+3b}{4},y\right)\right]dy$$

$$Q(x,y;2,2)$$

$$=\frac{1}{8}\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x,c)+2f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)+(x,d)\right]dx$$

$$+\frac{1}{8}\frac{1}{d-c}\int_c^d \left[f(a,y)+2f\left(\frac{a+b}{2},y\right)+f(b,y)\right]dy$$

ve

$$R(2,2)$$

$$= \frac{1}{16}\left\{2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + 2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)\right.$$

$$\left. +4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Son olarak, bu kısımda verilen ana eşitsizlikler koordinatlara göre konveks fonksiyonlar seçilerek incelenecek ve iki bağımsız değişken içeren bir fonksiyonun iki katlı integrallerinin gerçek değeri ile bu çalışmada verilen yaklaşım değerleri arasındaki hata tahminleri gözlemlenecektir.

İlk olarak, (3.7) eşitsizlikleri dikkate alındığında

$$Q_{n,3} = \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(N, M)$$

$$Exact = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$$Q_{n,4} = (b-a)(d-c)R(n,m)$$

$$Q_n(Error) = \left|\frac{Q_{n,3} + Q_{n,4}}{2} - Exact\right|$$

ifadeleri yazılabilir. Burada $Q_{n,3}$ ana integralin alt sınırı, $Q_{n,4}$ ana integralin üst sınırı, $Q_n(Error)$ ise integralin gerçek değeri ile yaklaşım metodunun verdiği değer arasındaki farkı göstermektedir.

$f_5(x,y) = e^{x+y}$ ve $f_6(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ fonksiyonları dikkate alındığında $n = m = 20$, $n = m = 40$ ve $n = m = 60$ değerleri için aşağıdaki tablo elde edilmektedir.

Tablo 3.2: f_5 ve f_6' nın integrallerinin alt-üst sınırları ve hata tahminleri

$f_5: [1,2] \times [2,3]$					$f_6: [1,2] \times [0,1]$				
n=m	$Q_{n,3}$	Exact	$Q_{n,4}$	$Q_n(Error)$	n=m	$Q_{n,3}$	Exact	$Q_{n,4}$	$Q_n(Error)$
20	59,2900	59,3024	59,3271	0,006178880	20	4,66625	4,66667	4,66750	0,000208333
40	59,2993	59,3024	59,3086	0,001544430	40	4,66656	4,66667	4,66688	5,20833E-05
60	59,3010	59,3024	59,3051	0,000686389	60	4,66662	4,66667	4,66676	2,31481E-05

Tablo 3.2' de açık bir şekilde görülmektedir ki seçilen koordinatlara göre konveks fonksiyonların iki katlı integralleri için alt sınırlar integralin gerçek değerinin altında kalmakta ve üst sınırlar integralin gerçek değerinin üstünde kalmaktadır. Ayrıca, seçilen n ve m değeri arttıkça alt ve üst sınırlar iki katlı integralin gerçek değerine yaklaşmaktadır. Bu doğrultuda geliştirilen yaklaşık değer hesaplama yöntemi n ve m değeri arttıkça daha yakın sonuçlar vermektedir, çünkü n ve m değeri arttıkça hata değeri sıfıra yaklaşmaktadır. Böylece, bu bölümde elde edilen eşitsizliklerin tutarlılığı incelenmiş ve koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için farklı bir yaklaşım metodu geliştirilmiştir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli sonuçlar üzerinde çalışılmıştır. İlk olarak bir integralin alt ve üst sınırlarını belirleyen klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmesiyle ana integrale daha yakın alt ve üst sınırlar sağlayan yeni bir eşitsizlik elde edilmiş, daha sonra koordinatlara göre konveks fonksiyonları taban alan iki katlı integral eşitsizliklerinin genelleştirmeleri açıklanmıştır.

Bu tez çalışmasında geliştirilen eşitsizlikler yardımıyla integrallerin yaklaşık değerlerini bulmayı sağlayan, fonksiyonların gerçek integral değerleri ile tahmini değerleri arasındaki farkları neredeyse sıfıra yakın hesaplayan yöntemler geliştirilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca iki katlı integraller için Hermite-Hadamard tipli genelleştirilmiş eşitsizlikler sağlanmış, benzer şekilde iki değişkenli fonksiyonların integralleri için yaklaşık değerler ve bazı durumlarda tam değerlerine çok yakın sonuçlar elde edilmiştir. Böylece bir fonksiyonun integraline ihtiyaç duyulan problemlerde sonuca ulaşmak daha kolay hale getirilmiştir.

Bu doğrultuda, tez çalışması Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri genelleştirmenin yeni bir yöntemini sunmaktadır. Bu yöntemle, farklı türev dereceleri ve farklı sınıflardaki fonksiyon çeşitleri için araştırmalar yapılabilir. Aynı zamanda, tez kapsamında kullanılan yaklaşım metotları, hesaplanması zor tek katlı veya iki katlı integrallere yaklaşık değerler sunmaktadır. Sonuç olarak, bu tez çalışması hem yeni teorik çalışmaların geliştirilmesine ışık tutmakta hem de uygulamaya yönelik hesaplamalarda çözüm yöntemi olarak kullanılabilecek yaklaşım metotları sunmaktadır.

KAYNAKLAR

Azpeitia, A.G. (1994). Convexs functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matemāticas,* 28(1), 7-12.

Balcı, M. (2012). *Matematik Analiz*. 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları.

Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1.

Dragomir, S. S., & Agarwal, R. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied mathematics letters*, *11*(5), 91-95.

Dragomir, S. S. (2001). On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. *Taiwanese Journal of Mathematics, 5*(4). 775-788.

Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard inequalities and Applications. RGMIA Monographs, Victoria University, Melbourne.

Erden, S., & Sarikaya, M. Z. (2016). New Hermite Hadamard type inequalities for twice differentiable convex mappings via Green function and applications. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, 2, 1-12.

Erden, S., Iftikhar, S., Kumam, P., & Awan, M. U. (2020). Some Newton's like inequalities with applications. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, *114*(4), 1-13.

Erden, S., & Sarikaya, M. Z. (2017a). On the Hermite-Hadamard-type and Ostrowski-type inequalities for the co-ordinated convex functions. *Palestine Journal of Mathematics*, *6*(1), 257-270.

Erden, S., & Sarikaya, M. Z. (2017b). On the Hermite-Hadamard's and Ostrowski's inequalities for the co-ordinated convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, *5*(3), 33-45.

Fejer, L. (1906). Uber die Fourierreihen, II.*Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss., 24,*(369-390).

Hadamard, J. (1893). Etude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, *Journal de mathématiques pures et applliquées,* 9, 171-215.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.

Iscan, I., Toplu, T., & Yetgin, F. (2021). Some new inequalities on generalization of Hermite-Hadamard and Bullen type inequalities, applications to trapezoidal and midpoint formula. *Journal of Mathematics*, *45*(4) , 647-657.

Kashuri, A., Mohammed, P. O., Abdeljawad, T., Hamasalh, F., & Chu, Y. (2020). New Simpson type integral inequalities for s-convex functions and their applications. *Mathematical Problems in Engineering, 2020,* 1-12.

Kirmaci, U. S. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Applied mathematics and computation*, *147*(1), 137-146.

Latif, M. A., & Alomari, M. (2009). On Hadamard-type inequalities for h-convex functions on the co-ordinates. *Int. J. of Math. Analysis*, *3*(33), 1645-1656.

Latif, M. A., & Dragomir, S. S. (2012). On some new inequalities for differentiable co-ordinated convex functions. *Journal of Inequalities and Applications*,*2012*(1), 1-13.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., & Fink, A.M., (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mitrinović, D.S., & Vasic,P.M. (1970). *Analytic Inequalities*, Berlin: Springer-verlag.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A. M. (1991). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives* (Vol. 53). Springer Science & Business Media.

Niculescu,C. P. & Person, L. E. (2006). Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach,Springer Science+Busines Media, Inc.,

Ostrowski, A. M. (1937). Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10(1), 226-227.

Pearce, C. E., & Pečarić, J. (2000). Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae. *Applied Mathematics Letters*, *13*(2), 51-55.

Pecaric, J. E., Proshan F. & Tong, Y. L. (1992). *Convex functions, partial orderings, and Statististical Applications*. Academic Press Inc.

Pachpatte, B. G. (2005). *Mathematical inequalities*. Elsevier.

Sarikaya, M. Z., Set, E., Ozdemir, M. E., & Dragomir, S. S. (2012). New some Hadamard's type inequalities for Co-ordinated Convex Functions. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences,(TOJİMS),* 28 (2), 137-152.

Sarikaya, M. Z., & Yildirim, H. (2010). Some new integral inequalities for twice differentiable convex mappings. *arXiv preprint arXiv:1005.0453*.

Sarikaya, M. Z., Saglam, A., & Yildirim, H. (2012). New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics (IJOPCM)*, *5*(3).

Sarikaya, M. Z., Budak, H., & Yaldiz, H. (2014). Some new Ostrowski type inequalities for co-ordinated convex functions. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, *2*(5), 176-182.

Tseng, K. L., Yang, G. S., & Hsu, K. C. (2011). Some inequalities for differentiable mappings and applications to Fejér inequality and weighted trapezoidal formula. *Taiwanese journal of Mathematics*, *15*(4), 1737-1747.

Yang, G. S., Hwang, D. Y., & Tseng, K. L. (2004). Some inequalities for differentiable convex and concave mappings. *Computers & Mathematics with Applications*, *47*(2-3), 207-216.