T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN SİMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

CANMERT DEMİR

DANIŞMAN

DOÇ. DR. SAMET ERDEN

BARTIN-2023

T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN SİMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canmert DEMİR

BARTIN-2023

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Samet ERDEN danışmanlığında hazırlamış olduğum "YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN SİMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

28.12.2023
Canmert DEMİR

ÖNSÖZ

Değerli Prof. Dr. Burçin GÖKKURT ÖZDEMİR ve Ahmethan SAVAR'a, ilham dolu yönlendirmeleri dolayı şükranı borç bilmekteyim. Bu süreçte, sizin yol gösterici sözleriniz ve motive edici tutumunuz, benim için son derece kıymetli olmuştur. Hayatın her kulvarında, her zaman yanımda olan ve her türlü zorlukta desteklerini esirgemeyen değerli annem Günay DEMİR'e ayrıca teşekkürlerimi sunmaktayım. Onun desteği, bu süreçteki en büyük dayanağım olmuştur. Tez sürecinin her aşamasında desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Samet ERDEN'e ve tezin jüri üyelerine içtenlikle şükranlarımı iletmekteyim. Değerli öneri ve rehberlikleri, çalışmamın kalitesini artırdı ve gelişmesine önemli katkılarda bulunmaktadır. Katkılarınızı bir kez daha vurgulayarak, zamanınızı ve desteklerinizi esirgemediğiniz için minnettarlığımı sunarım.

Saygılarımla,

Canmert DEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN SİMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Canmert DEMİR

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Samet ERDEN

Bartın-2023, sayfa: 67

İntegral eşitsizlikleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte kullanılan en önemli araçlardan biridir. Bazı problemlerde integralin tam değeri hesaplanamaz. Böyle durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gereklidir. Bu yüzden, bazı matematikçiler fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikleri üzerine çalışmıştır. Hermite-Hadamard, Simpson, Ostrowski, Chebyshev, Grüss ve Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri, literetürdeki önemli eşitsizliklerden bazılarıdır. Örneğin, Simpson tipi integral eşitsizlikleri, matematiksel analizde ve sayısal entegrasyon yöntemlerindeki kesinlik ve güvenilirlik sorunlarının çözümünde kritik bir rol oynamaktadır. Thomas Simpson tarafından ortaya konulan Simpson Kuralları, nümerik integrasyonda kullanılan önemli yaklaşım metotlarındandır. Bunların ilki Simpson 1/3 formulü olarak bilinen iki çekirdekli modeldir. Aynı zamanda Simpson'ın ikinci formula ya da Newton formulü olarak bilinen Simpson 3/8 kuralı ise Thomas Simpson tarafından ortaya konulan başka bir yaklaşım metodudur. Bu yaklaşım metotları bir integralin yaklaşık değerini vermektedir. Yaklaşım metotları ve integraller arasındaki farkın sınırlarını belirlemek için kullanılan yöntemlerden biri ise integral eşitsizlikleridir. Bu doğrultuda, Simpson kurallarını taban alarak üretilen integral eşitsizliklerine Simpson tipli eşitsizlikler denir. Son zamanlarda, bir çok araştırmacı Simpson eşitsiliği ile ilgili çok sayıda sonuç bulmuşlardır. Bu kapsamda klasik Simpson

eşitsizliğinin daha hassas sonuçları, eşdeğerleri ve genelleştirilmiş versiyonlarının yanı sıra fonksiyonların farklı kabulleri altında yeni Simpson tipli eşitsizlikler incelenmiştir.

Bu tez kapsamında, konveks fonksiyonları taban alan Simpson tipli eşitsizlikler üzerine devam eden çalışmaların ışığında,yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler incelenecektir. İlk olarak ikili çekirdek yardımıyla yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar içeren bir integral özdeşliği kurulacaktır. Daha sonra, bu özdeşlik ve konveks fonksiyon özellikleri kullanılarak Simpson tipli integral eşitsizlikleri bulunacaktır. Ek olarak, bu eşitsizlikleri ararken ortaya çıkan sonuçlar yardımıyla nümerik integrasyonda kullanılabilecek yeni Simpson tipli yaklaşım metotları geliştirilecektir. Ayrıca, ortaya çıkan Simpson tipli sonuçlardan elde edilen yaklaşık değerler ve integrallerin gerçek değerleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Simpson eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Sınırlı fonksiyonlar, Yüksek mertebeden türevler, Sayısal integrasyon

Bilim Alanı Kodu: 26D07, 26D10, 26D15, 26D20, 26A33, 41A55.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SIMPSON-TYPE INEQUALITIES FOR HIGHER ORDER DIFFERENTIABLE FUNCTIONS AND APPLICATIONS

Canmert DEMİR

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Samet ERDEN

Bartın-2023, pp: 67

Integral inequalities are one of the most important tools used in both theoretical and applied mathematics. In some problems, the exact value of the integral cannot be calculated. In such cases it is necessary to develop approximation methods. Therefore, some mathematicians have studied integral inequalities for various classes of functions. Hermite-Hadamard, Simpson, Ostrowski, Ostrowski, Chebyshev, Grüss and Ostrowski-Grüss inequalities are some of the important inequalities in the literature. For example, Simpson-type integral inequalities play a critical role in mathematical analysis and in solving precision and reliability problems in numerical integration methods. Simpson's Rules, introduced by Thomas Simpson, are important approximation methods used in numerical integration. The simplest of these is the two-core model known as the Simpson 1/3 formula. Simpson's 3/8 rule, also known as Simpson's second formula or Newton's formula, is another approximation method introduced by Thomas Simpson. These approximation methods give the approximate value of an integral. One of the most effective methods used to determine the boundaries of the difference between approximation methods and integrals is integral inequalities. Accordingly, integral inequalities based on Simpson's rules are called Simpson-type inequalities. Recently, many researchers have found many results related to Simpson's inequalities. In this context, more precise results, equivalents and generalised versions of the

classical Simpson inequality as well as new Simpson-type inequalities under different assumptions of functions have been studied.

In this thesis, in the light of the ongoing work on Simpson-type inequalities based on convex functions, Simpson-type inequalities for higher order differentiable functions will be studied. Firstly, an integral identity involving higher order differentiable functions will be established with the help of the dual kernel. Then, using this identity and convex function properties, Simpson-type integral inequalities will be found. In addition, new Simpson-type approximation methods that can be used in numerical integration will be developed with the help of the results obtained while searching for these inequalities. Furthermore, the relations between the approximations obtained from the Simpson-type results and the real values of the integrals will be analysed.

Keywords: Simpson’s inequality, Convex functions, Bounded functions, Higher-order derivative, Numerical integration

Scientific Field Code: 26D07, 26D10, 26D15, 26D20, 26A33, 41A55.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

No **No**

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo **Sayfa**

No **No**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$[.,.]$	: Kapalı aralık
$(.,.)$	: Açık aralık
$\|f\|_1$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki mutlak değerinin integrali
$\|f\|_p$	:f fonksiyonunun p.inci kuvvetinin normu
$\|f\|_\infty$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki maksimum değeri
$\lvert f\rvert$	:f fonksiyonunun mutlak değeri
$\lvert f\rvert^p$	: f fonksiyonunun mutlak değerinin p.inci kuvveti
$\|f\|_\infty$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki maksimum değeri
$L_1[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_p[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında $p.$ kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_\infty[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrali sınırlı olan fonksiyonların kümesi
$f'(x)$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta birinci türevi
$f''(x)$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta ikinci türevi
$f^{(n)}(x)$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta $n.$ türevi
N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
R^2	: İki boyutlu Reel sayılar kümesi
Z	: Tam sayılar kümesi
I°	: I'nın içi

1. GİRİŞ

İntegral eşitsizlikleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte kullanılan en önemli araçlardan biridir. Bazı problemlerde integralin tam değeri hesaplanamaz. Böyle durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gereklidir. Bu yüzden, bazı matematikçiler fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikleri üzerine çalışmıştır. Hermite-Hadamard, Simpson, Ostrowski, Chebyshev, Grüss ve Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri, literetürdeki önemli eşitsizliklerden bazılarıdır. Örneğin, Simpson tipi integral eşitsizlikleri, matematiksel analizde ve sayısal entegrasyon yöntemlerindeki kesinlik ve güvenilirlik sorunlarının çözümünde kritik bir rol oynamaktadır. Bu eşitsizlikler, belirli bir fonksiyonun integralini yaklaşık olarak hesaplarken veya sayısal entegrasyon yöntemlerini kullanırken elde edilen sonuçların ne kadar doğru ve güvenilir olduğunu değerlendirmek için kullanılmaktadır. Sayısal entegrasyon yöntemleri, karmaşık veya analitik olarak çözülemeyen integral değerlerini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılmaktadır. Bu tür hesaplamalar özellikle matematiksel modellemelerde, mühendislik uygulamalarında, fiziksel sistemlerin analizinde ve istatistiksel hesaplamalarda karşımıza çıkmaktadır.

Simpson kuralları, uygulamalı matematiğin birçok alanında kullanılmaktadır. Özellikle, basit ve karmaşık problemlerde yaklaşık değer hesaplamanın gerektiği durumlarda Simpson formülleri çözüme ulaşmak için kullanılabilecek metotlardandır. Ayrıca, hata sınırlarını belirleyen eşitsizlikler matematiksel çalışmaların önemli bir parçası haline gelmiştir. Yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonların eşitsizliklerinin genelleştirilmesi ve yaklaşık değerlerin hesaplanmasının etkinliği, birçok araştırmacı tarafından günümüzde aktif bir şekilde incelenmektedir.

Simpson Yöntemi, belirli integrallerin sayısal yaklaşımında kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, matematikçi Thomas Simpson tarafından Leicestershire, İngiltere'den geliştirilmiştir. Kepler, benzer formülleri Simpson'dan yüz yıldan fazla bir süre önce kullanmıştır. Bu nedenle, Almanca literatüründe bu yönteme bazen "Kepler Yöntemi" de denilmektedir.

Öte yandan, eşitsizlik teorisi, Cauchy, Cebyshev, Gauss ve diğer bilim insanlarının çalışmalarıyla temelleri atılan ve yaklaşım metotlarının önemli bir bileşeni haline gelen bir alandır. Bu eşitsizlikler arasında en önemlilerinden biri, Hermite tarafından 1881 yılında konveks fonksiyonlar kullanılarak elde edilen ve aynı zamanda Hadamard tarafından da bulunan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu sonuç, 1881 yılında Hermite tarafından Mathesis dergisine gönderilmiş ve 1883 yılında ispatsız bir şekilde Mathesis dergisinde yayınlanmıştır.

Ostrowski'nin birinci türevi sınırlı olan fonksiyonları taban alarak ürettiği ve daha sonra kendi adıyla anılan Ostrowski eşitsizliği, matematiksel uygulama alanlarında sıklıkla kullanılan bir diğer önemli integral eşitsizliğidir (Ostrowski, 1938). Ostrowski eşitsizliğinin öneminin anlaşılmasından sonra birçok matematikçi bu eşitsizliği taban alan çalışmalar yapmışlardır. Örneğin, bu alanda en temel çalışmalar olan birinci türevleri Lebesgue 1-normu ve Lebesgue p-normuna ait fonksiyonlar için üretilen Ostrowski tipli eşitsizlikler ve uygulamaları sırasıyla (Dragomir ve Wang, 1997) ve (Dragomir ve Wang, 1998) çalışmalarında sunulmuştur.

Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser, eşitsizlik alanını sistemli bir bilim dalı haline getirmiştir. Ardından, Beckenbach ve Bellman tarafından 1934-1960 yılları arasında yapılan çalışmalar, "Inequalities" ismiyle matematiksel analiz literatürüne girmiştir. 1970 yılında yayınlanan Mitrinovic'in "Analytic Inequalities" kitabında ise önceki kitaplardaki içeriklerden farklı olarak birçok yeni eşitsizlik literatüre sunulmuştur.

Eşitsizliklerin uygulama alanlarının genişlemesiyle birlikte Hermite-Hadamard ve Ostrowski gibi birçok integral eşitsizliği, araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Örneğin, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin keşfinden sonra Fejer (1906), bu sonucun ağırlıklı versiyonunu pozitif değerli bir fonksiyon yardımıyla ispatlamıştır.

Daha sonraları, Dragomir (2001), iki değişkenli fonksiyonları taban alan koordinatlara göre konveks fonksiyonları kullanarak Hermite-Hadamard tipi yeni eşitsizlikler elde etmiştir. Özellikle son 20 yılda, bu çalışmalara dayanan yüzlerce araştırma yapılmıştır. Konveks fonksiyonlar için Yamuk ve Orta Nokta eşitsizlikleri, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin önemli sonuçları arasındadır. Bu eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Yamuk Eşitsizliği'ni Dragomir ve Agarwal (1998) ispatlarken, Orta Nokta eşitsizliği Kırmacı (2004) tarafından ispatlanmıştır.

Bu çalışmaların yanı sıra, Hermite-Hadamard, Yamuk ve Orta Nokta eşitsizliklerinin yanı sıra farklı genelleştirmeler ve çeşitli fonksiyon sınıfları için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, konveks fonksiyonları taban alan Bullen tipi eşitsizliklerin genelleştirilmiş versiyonları İşcan vd., (2021) tarafından elde edilmiştir.

Benzer şekilde, çeşitli fonksiyon çekirdekleri kullanılarak Simpson yöntemi bağlamında konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler geliştirilmiştir. Alomari ve Darus (2009) Simpson tipi integral eşitsizliklerinin orijinaline dayanarak yeni bir integral eşitsizliği ortaya koymuşlardır. Sarıkaya vd., (2019) ise elde ettikleri yeni integral eşitsizliğini konveks fonksiyonlar için genelleştirmişlerdir. Erden (2020) yüksek mertebeden sürekli fonksiyonlar için Ostrowski tipi integral eşitsizliğinden yola çıkarak farklı bir fonksiyon çekirdeği ve Simpson eşitsizliği kullanarak yeni bir eşitsizlik elde etmiştir.

Konveks fonksiyonlar, matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve birçok farklı matematiksel alanlarda araştırmacılar tarafından doğrudan veya dolaylı olarak kullanılmaktadır. Bu fonksiyonlar kullanılarak literatürde birçok farklı eşitsizlik elde edilmiştir. Örneğin, konveks fonksiyonlar kullanılarak araştırmacılar, farklı fonksiyon çekirdeklerini kullanarak – orijinal konveks ve Simpson Yöntemi' ne dayalı olarak – birbirinden farklı integral eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Bu tez kapsamında, yüksek mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler incelenecektir. Öncelikle yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için Simpson tipli sonuçlar verebilecek bir özdeşlik oluşturulacaktır. Daha sonra, konveks fonksiyonlar ve sınırlı fonksiyonları taban alan Simpson tipli eşitsizlikler verilecektir. Son olarak, tez kapsamında elde edilen eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan numerik yaklaşım metotları uygulama olarak sunulacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

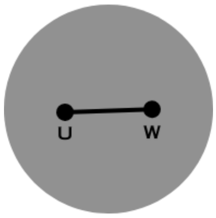
Bu bölümde, tez çalışmasının temel taşlarını oluşturan anahtar kavramlara odaklanılacaktır. Tezin hedefleri doğrultusunda gereken temel tanımlar, teoremler ve kavramlar bu bölümde sunulacaktır. Tezin ilerleyişi için hayati önem taşıyan bu matematiksel yapı taşları, çalışmanın temel çerçevesini oluşturacak ve ileri analiz için sağlam bir zemin sağlayacaktır.

2.1. Bazı Fonksiyon tanımları ve İlgili Teoremler

İlk olarak, çalışma kapsamında kullanılacak olan fonksiyon sınıflarının tanımları ve özelliklerini açıklayan temel teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Konveks Küme). X vektör uzayı ve bu uzayın bir alt kümesi A olsun. Keyfi bir $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha x + (1-\alpha)y$ şeklinde ifade edilebilen ve bu şekildeki bütün noktaların A kümesi içinde olduğu M kümesi,

$$M = \{ z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha)y \, , \, 0 \leq \alpha \leq 1 \} \subseteq A$$

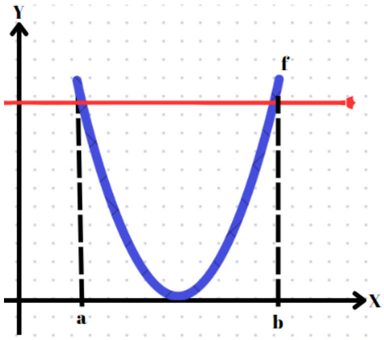


Şekil 2. 1: Konveks Küme

şeklindedir ve A kümesine konveks küme denir Kreyszig, E. (1991). Ancak $t \in B$ ise $t = \alpha x + (1-a)y$ eşitliğinde x ve y nin katsayıları için bağıntı her zaman doğrudur. Bundan dolayı konveks küme tanımındaki $(1-\alpha)$, α yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan negatif olmayan α, β sayıları yazabiliriz. Geometrik anlamda B kümesi uç noktalar x ve y olan bir doğru parçasını belirtmektedir. Sonuç olarak konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasına karşılık gelen kümedir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.2. (Konveks Fonksiyon). $I \subset R$, $f: I \rightarrow R$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$



Şekil 2. 2: Konveks Fonksiyon

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Niculescu ve Persson, 2006). Aşağıda bazı konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir (Bayraktar, 2000).

$i)\ e^{ax}$
$ii) - log(x)$
$iii)\ x^{a}$, $(R^{+}),\ a \leq 0 \leq 1$
$iv)\ |\ x\ |^{a}, a \geq 1$
$v)\ x\, log(x)$, (R^{+})

Tanım 2.3. (Sınırlı Fonksiyon). $I \subset R$, $f\ :\ I \rightarrow R$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in I$ için $|\ f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.4. (Mutlak Sürekli Fonksiyon). I bir aralık olsun. $f\ :\ I \rightarrow R$ fonksiyonu I üzerinde mutlak süreklidir $\Leftrightarrow$ $\{[a_i, b_i]:\ 1 \leq i \leq n\}$, I aralığında ki örtüşmeyen aralıkların sonlu birleşimi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır (Gordon, 2002).

Tanım 2.5. (Türev) $K \subset R$ olmak üzere $x_0 \in K$, x_0 K' nın yığılma noktası ve $\varphi \ : \ K \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

limiti ya da $x = x_0 + h$ alındığında ortaya çıkan

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

limiti varsa φ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevinin değeridir. Ayrıca, φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $\varphi'(x_0)$, $\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ ya da $D\varphi(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 2.6. (Süreklilik) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi \ : \ K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - \varphi(k)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonu $k \in K$ noktasında süreklidir denir (Balcı, 2012).

Süreklilik aynı zamanda aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

Tanım 2.7. (Süreklilik) $K \subset R$ olmak üzere $\varphi \ : \ K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun.

$$\lim_{x \to k} \varphi(x) = \varphi(k)$$

ise φ fonksiyonu k noktasında süreklidir denir. Eğer φ fonksiyonu K kümesinin bütün elemanlarında sürekli ise, o zaman φ fonksiyonu K kümesi üzerinde süreklidir denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.8. (Düzgün Süreklilik). $f: [a,b] \subseteq R \to R, x_0 \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in [a,b]$ ve $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için $|\ f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, $[a,b]$ de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2000).

Teorem 2.1. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$i)$ $f, (a,b)$ aralığında süreklidir,
$ii)$ $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Teorem 2.2. Bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve f' türevi var ve (a,b) aralığında sınırlı ise, bu kapsamda *f* fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir (Gordon, 2002).

Türevi sınırlı olmayan bir fonksiyon mutlak sürekli olabilir. Örneğin; [0,1] aralığında $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon mutlak sürekli bir fonksiyon olmasına rağmen türevi $f' = -\frac{1}{x^2}$ (0,1) aralığında sınırlı değildir.

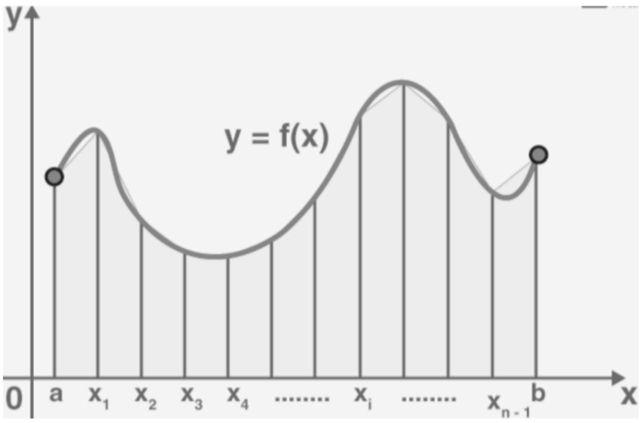
2.2. Trapezoid ve Simpson Kuralları

Tez çalışmasının temelini oluşturan Simpson kuralları, Thomas Simpson (1710–1761) tarafından ortaya konmuştur. Simpson kuralları bir fonksiyonun belirli bir aralıkta integralini hesaplamak için kullanılan yöntemlerdendir. Bu kurallar $f(x)$ fonksiyonu için belirli [a, b] aralığında integralini yaklaşık olarak hesaplanabileceğini belirtmektedir. Simpson $\frac{1}{3}$ ve $\frac{3}{8}$

kuralları, Trapez kuralını daha sık aralıklarda uygulamak yerine $f(x)$ fonksiyonunun bilinen noktalarını birleştiren bir polinom kullanma fikrine dayanmaktadır. Örneğin, $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonun $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri bilinmektedir, bunlara ek herhangi bir $x_0 \in [a, b]$ için $f(x_0)$ değeri de biliniyor ise bu üç nokta bir parabol ile birleştirilebilmektedir. Dolayısıyla, $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonun yaklaşık olarak integrali hesaplanabilmektedir.

Thomas Simpson kuralları ve Trapez kuralı aşağıda verilmiştir**.**

Tanım 2.9. (Trapez Kuralı). f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $[a, b]$ aralığı n eşit parçaya bölünmüş ve parçaların genişliği h olmak üzere



Şekil 2. 3: Trapez Kuralı

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots . < x_n = b, \qquad \Delta x = \frac{(b-a)}{n},\ x_i = a + i\Delta$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \lim_{n \to \infty}\left(\frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\right)$$

f fonksiyonu $[a, b]$ integralinin yaklaşık sonucunu vermektedir ve Trapez Kuralı olarak adlandırılır.

Örneğin, $f(x) = x^2$ fonksiyonun $[0, 4]$ süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ tanım aralığında integrallenebilirdir. [0,4] aralığı $n = 4$ eşit parçaya bölünmüş olsun. $f(x)$ fonksiyonu için verilen aralıkta değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	4	9	16

$$T_4 = \frac{\Delta x}{2}[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4))], \qquad \Delta x = 1$$

$$\int_0^4 f(x)dx \approx T_4 = 60$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç f fonksiyonun belirtilen aralıkta yaklaşık olarak belirli integralinin sonucuna eşittir. Belirli integralin gerçek değeri ile kıyaslamak adına hesaplanırsa

$$\int_0^4 x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

bulunmaktadır. Hata

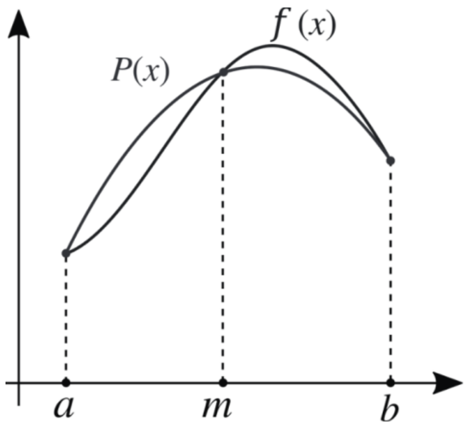
$$E = -38.66$$

civarında bulunmaktadır. Hatanın sıfıra yaklaşması beklenmektedir. Çalışmanın ilerleyen kısmında aynı işlemler Simpson Kuralları ile tekrardan gerçekleştirilerek hata değerleri karşılaştırılacaktır.

Trapez Kuralı, toplam alanı dikdörtgenler yerine daha küçük yamuklara bölerek eğrilerin altındaki alanı değerlendiren bir kuraldır. Bu yöntem, bir fonksiyonun grafiği altındaki bölgeyi bir yamuk olarak yaklaştırır ve bu alanı hesaplar. Bu kural, sol ve sağ toplamın ortalamasını almaktadır. Temelindeki fonksiyon düzgün olduğunda, Trapez Kuralı, Simpson Kuralı kadar doğru bir sonuç verememektedir. Bu farklılık, Simpson Kuralının doğrusal yaklaşımlar yerine ikinci dereceden yaklaşımları kullanmasından kaynaklanmaktadır. Her iki yöntem de integral için yaklaşık değerler sunmaktadır, ancak Simpson Kuralı, özellikle düzgün(smooth) fonksiyonlarla uğraşırken daha da kesin bir yaklaşım sağlamaktadır. Esasen, ikinci dereceden yaklaşımları kullanarak Simpson Kuralı, doğrusal yaklaşımlara dayanan Trapez Kuralından daha az hata oranı ile integralin yaklaşık değerini vermektedir. Simpson Kuralları aşağıda verilmiştir.

Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, Trapez kuralına ikinci dereceden interpolasyon uygulanarak elde edilmiştir.

Tanım 2.10. (Simpson $\frac{1}{3}$ Kuralı). f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere



Şekil 2. 4: Simpson 1/3 Kuralı

$$\int_a^b f\,(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında verilen integralin yaklaşık sonucudur. Bu kurala Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı denir.

Kıyas yapabilmek açısından Trapez Kuralında ele aldığımız örneği Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemi ile inceleyelim. $f(x) = x^2$ fonksiyonun $[0, 4]$ süreklidir, yani integrallenebilmektedir.

$2 \in [0, 4]$ noktasını gerekli bir diğer nokta olarak seçilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun verilen aralıkta değerleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

x	0	2	4
$f(x)$	0	4	16

$f(x)$ fonksiyonuna tanım aralığında Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı uygulanarak

$$\int_0^4 f\,(x)dx \approx \frac{64}{3}$$

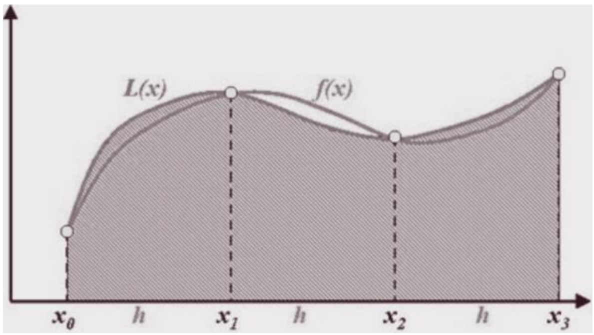
sonucuna ulaşılır. Bu durumda hata,

$$E = 0$$

olarak bulunmaktır. Trapez kuralında hata almamıza rağmen Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ile kesin sonuca eşit bir sonuç elde edilmektedir.

Trapez kuralındaki gibi, Simpson kuralı da integral aralığının bölünme sayısı artırılarak iyileştirilebilmektedir. Bölme sayısı arttıkça hata oranı sıfıra yakınsayacaktır. Trapez ve Simpson $\frac{1}{3}$ kurallarının çıkış noktasına benzer bir şekilde, üçüncü dereceden bir Lagrange polinomu kullanılarak dört noktadan geçen bir interpolasyon işlemi sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon için uygulanabilmektedir. Bu yaklaşım sonucu Simpson $\frac{1}{3}$ kuralının iyileştirilmiş versiyonu Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı elde edilmiştir.

Tanım 2.11. (Simpson $\frac{3}{8}$ Kuralı). f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, integrallenebilir bir fonksiyon



Şekil 2. 5: Simpson 3/8 Kuralı

$$I = \int_a^b f\,(x)dx \cong \int_a^b f_3\,(x)dx$$

ve

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

olmak üzere

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3)]$$

Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı denir.

Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı, belirli bir fonksiyonun değerlerini belirli noktalarda kullanarak integral hesaplamalarında daha verimli bir doğruluk sağlayan bir yöntemdir. Bu kural, Simpson'ın $\frac{1}{3}$ kuralındaki ikinci dereceden polinom yaklaşımını temel almaktadır ve klasik Simpson yaklaşımını dört noktayı kapsayacak şekilde genişleterek üçüncü dereceden polinomlarla hesaplama yapmaktadır. Böylece, daha geniş bir nokta setini dikkate alarak daha kesin sonuçlar elde etmektedir.

Aynı örnek üstünden giderek Simpson $\frac{3}{8}$ verimliliği incelenmiştir. $f(x) = x^2$ fonksiyonun $[0, 4]$ süreklidir, integrallenebilmektedir. Simpson $\frac{3}{8}$ kuralını uygulayabilmek için tanım aralığında dört nokta seçilmiştir. Bu noktalara ait $f(x)$ fonksiyonun değerleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

x	0	1	2	4
$f(x)$	0	1	4	16

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 f_3\,(x)dx \\ &= \frac{1}{2}[f(0) + 3f(1) + 3f(2) + 3f(4)] \\ &= \frac{63}{2}. \end{aligned}$$

Ortaya çıkan hata,

$$E = -10.16$$

olmaktadır. İncelenen örnek açısından Simpson $\frac{3}{8}$ kullanmak verimli değildir. Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ile hata sıfır olarak bulunmuştur. Tanım kümesinin geniş olduğu, Simpson $\frac{1}{3}$ yönteminin hata sonucunun yüksek olduğu durumlarda Simpson $\frac{3}{8}$ tercih edilmektedir.

2.3. Bazı Temel İntegral Eşitsizlikleri

Bunlara ek olarak, sonuca ulaşmak için kullanılacak olan temel integral özdeşlik ve eşitsizlikleri bu kısımda sunulacaktır.

Tanım 2.12. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu).f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f\,(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \ dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Balcı, 2012).

Tanım 2.13. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği). $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \; dx \leq \left(\int_a^b |\; f(x)|^p \; dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\; g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović, 1970; Mitrinović vd., 1993).

Sonuç 2.1. (Power Mean Eşitsizliği). $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^p$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \; dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović, 1970; Mitrinović vd., 1993).

Teorem 2.3. (Ostrowski Eşitsizliği). $\varphi : [\alpha, \beta] \to R$, (α, β) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun öyle ki $\varphi' : (\alpha, \beta) \to R$ aynı aralık üzerinde sınırlı olsun, yani $\|\varphi'\|_\infty = \sup_{\xi \in (\alpha, \beta)} |\varphi'(\xi)| < \infty$ şartı sağlansın. Bu bağlamda, her $x \in [\alpha, \beta]$ için

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi) \, d\xi\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2}{(\beta - \alpha)^2}\right] (\beta - \alpha) \|\varphi'\|_\infty \qquad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\frac{1}{4}$ elde edilebilecek en iyi sabittir.

İspat. $\varphi : [\alpha, \beta] \to R$ fonksiyonu (α, β) açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan, her $x \in (\alpha, \beta)$ için tanımlanan

$$\Delta(x,\xi) \ := \begin{cases} (\xi - \alpha) & , \alpha \leq \xi < x \\ (\xi - \beta) & , x \leq \xi \leq \beta \end{cases}$$

ifadesi için

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x,\xi)\, \varphi'(\xi) d\xi$$

eşitliği sağlanır. Bu özdeşlik aynı zamanda

$$\varphi(x) - \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x,\xi)\, \varphi'(\xi) d\xi \tag{2.2}$$

olarak ifade edilebilir. (2.2) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra integraller için üçgen eşitsizliği ve φ fonksiyonunun sınırlılık özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\left|\varphi(x) - \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi\right| \qquad (2.3) \\ &\leq \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{x} (\xi - \alpha)\left|\varphi'(\xi)\right| d\xi + \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{x}^{\beta} (\beta - \xi)\left|\varphi'(\xi)\right| d\xi \\ &\leq \frac{\left\|\varphi'\right\|_{\infty}}{\beta - \alpha}\left[\int_{\alpha}^{x} (\xi - \alpha) d\xi + \int_{x}^{\beta} (\beta - \xi) d\xi\right] \\ &= \frac{\left\|\varphi'\right\|_{\infty}}{\beta - \alpha}\left[\frac{(x - \alpha)^2 + (\beta - x)^2}{2}\right] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak,

$$(x-\alpha)^2+(\beta-x)^2=\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^2+\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)^2$$
$$=2(\beta-\alpha)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right]$$

özdeşliği (2.3) ifadesinin en sağında yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır (Ostrowski, 1938).

Ostrowski eşitsizliği, birçok alanda uygulamalara sahip olduğundan (2.1) eşitsizliği üzerine pek çok araştırmacı yoğunlaşmıştır. Ostrowski eşitsizliği, birinci türevleri sınırlı olan, yani birinci türevleri $L_\infty[a,b]$ uzayına ait olan fonksiyonlar için elde edilmiştir. Birinci türevleri $L_p[a,b]$ ve $L_1[a,b]$ uzaylarına ait fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler ise Dragomir ve Wang (1997; 1998) tarafından sunulmuştur.

Ostrowski eşitsizliği geniş bir uygulama alanına sahip olduğundan, farklı tipte fonksiyonlar ve genelleştirilmiş çekirdekler kullanılarak birçok Ostrowski tipli eşitsizlik ispatlanmıştır. Bu tarz çalışmaların sayısı çok fazla olduğundan, burada sadece emsal çalışmalardan bahsedilecektir. Örneğin, Dragomir (2015) mutlak sürekli fonksiyonlar için önemli Ostrowski tipli eşitsizlikler vermiştir. Aynı makalede, bu eşitsizliklerle bağlantılı olan çok sayıda uygulama da sunulmuştur. Bu çalışmalara ek olarak, klasik Ortalama değer teoremi ve Pompeiu ortalama değer teoremi kullanılarak elde edilen Ostrowski tipli sonuçlar da literatürde fazlasıyla bulunmaktadır.

Tez konusu kapsamında ele alınacak konveks fonksiyon türünün temel eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinin ve bir integrali alttan ve üstten sınırlayan ifadedir.

Teorem 2.4. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $f\ :[a,b]\to R$ konveks fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Hermite-Hadamard integral eşitsizliği, konveks fonksiyonların ortalama integrali ile belirli bir aralıktaki değerlerinin ortalaması arasındaki ilişkiyi belirtmektedir. Bu teorem, bir $[a,b]$ aralığında konveks olan bir f fonksiyonu için $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki ortalama integralinin, aralık uç noktalarındaki fonksiyon değerleri ile bu değerlerin ortalaması arasında olduğunu ifade etmektedir. Bu eşitsizlik, $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında ortalama değerinin, $\frac{a+b}{2}$ noktasındaki $f(x)$ değerinin ve uç noktalar olan a ve b üzerindeki fonksiyon değerlerinin ortalamasının arasında olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca, çeşitli klasik ortalama eşitsizlikleri, fonksiyon $f(x)$ uygun şekilde seçilerek bu teoremden türetilmiştir. Önemli bir nokta olarak, $f(x)$ konveks değilse (konkav), eşitsizlik yönü tersine dönmesi gerekmektedir.

Teorem 2.5. (Ağırlıklı Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $w:[a,b] \to R^+ = [0,\infty)$ fonksiyonu integrallenebilir ve $x = \frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik, ve $f\ :[a,b] \to R$ konveks fonksiyon olmak üzere ağırlıklı Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

sağlanır (Fejer, 1906).

Temel konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafına odaklanarak sonuçlar elde etmiştir. Bu çalışmalarda ulaşılan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.1. $f: I^{\circ} \subseteq R \to R$ fonksiyonu $a < b$ şartını sağlayan $a,b \in I^{\circ}$ aralığı üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Sonuç 2.1. $t\in[0,1]$ olmak üzere $x=ta+(1-t)b$ değişken dönüşümü Lemma 2.1. eşitliğe uygulanarak

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)dx.$$

olarak bulunur (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Lemma 2.1 de verilen özdeşlik yardımıyla mutlak değeri Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri sunulmuştur. Aynı zamanda, Sonuç 2.1'in bazı uygulamaları Dragomir ve Pearce (2000) tarafından sunulmuştur.

Teorem 2.6. $f\ :I^{\circ}\subseteq\ R\rightarrow R,I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm, $a,b\in I^{\circ}$ olmak üzere $a\ <\ b$ şartı sağlansın. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'|$ konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 2.7. $f\ :I^{\circ}\subseteq\ R\rightarrow R,I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm, $a,b\in I^{\circ}$ olmak üzere $a\ <\ b$ ve $p>1$ şartları sağlansın. Eğer $[a,b]$ aralığında $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Hermite-Hadamard eşitsizliği, farklı türevlenebilir konveks ve konkav fonksiyonlara ilişkin çeşitli eşitsizlikleri içerir. Ayrıca, gerçel sayıların özel ortalamaları üzerindeki bazı özel durumları da incelemekte ve orta nokta formülü için hata tahminleri sunulabilmektedir.

Kırmaci (2004) konveks fonksiyonlar için orta nokta tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Bu çalışma, türevlenebilir dönüşümler için eşitsizlikler üzerine odaklanmış ve gerçel sayıların özel ortalamalarına ve orta nokta formülüne uygulamalarını içermektedir. Bu çalışmalara yönelik eşitsizlikler aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.8. $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $p > 1$ için $f : I^{\circ} \subseteq R \to R$, I° üzerinde türevlenebilir bir dönüşüm, $[a, b]$ aralığında $|f'|$ konveks olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \left(\frac{b-a}{8}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

eşitsizliği sağlanır (Kırmacı, 2004).

Türevinin mutlak değerinin kuvvetleri konveks olan fonksiyonlar için orta nokta tipli sonuçlar Kırmacı (2004) tarafından aynı makalede sunulmuştur. Bulunan eşitsizlikler ile bağlantılı olarak Orta nokta formülü ve özel ortalama uygulamaları da verilmiştir (Kırmacı, 2004).

Hermite-Hadamard integral eşitsizliği, konveks fonksiyonlar için geçerli olduğunu göz önünde bulundurarak türevlenebilir konveks dönüşümler için bazı eşitsizlikler Kırmacı ve Özdemir (2004) tarafından sunulmuştur. Ayrıca, yazarlar gerçel sayıların özel ortalamalarına ilişkin bazı uygulamaları aynı çalışma içinde sunmuşlardır ve orta nokta formülü için bazı hata tahmin sonuçlarına ulaşmışlardır (Kırmacı ve Özdemir, 2004).

Pearce ve Pečarić (2000), Dragomir ve Agarwal'ın konvekslikle ilişkili hata tahminlerine yönelik geliştirmeler yapmıştır. Bu geliştirmeleri trapezoidal formülü üzerinde uygulamışlardır. Ortalama nokta formülü için benzer tahminler de geliştirmişlerdir. Aynı çalışmada, konveks fonksiyonlara uygulanan benzer metodları konkav fonksiyonlar için de kullanarak, literatüre farklı eşitsizlikler ve hata tahmini yaklaşımları sunmuşlardır.

İntegrallerin yaklaşık değerlerini incelemek incelemek için genellikle yüksek dereceden türevlenebilir fonksiyonlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu eşitsizlikler, belirli bir derecede türevlenebilir olan fonksiyonların özelliklerini incelemek için kullanılmaktadır. Özellikle, bazı Simpson tipi eşitsizliklere ulaşmak için, ikinci veya üçüncü dereceden türevlenebilme özelliği gerektirmektedir. Bu nedenle, bu eşitsizlikleri yüksek mertebeler için doğru bir şekilde uygulayabilmek için fonksiyonların yüksek mertebeden türevlenebilmesi durumuna ihtiyaç duyulmaktadır. Bu çalışmada doğrudan yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlarla ilişkilidir. Bahsedilen durumların her biri bu çalışmada kullanılmıştır.

Anastassiou (1995), Ostrowski eşitsizliğini kullanarak çeşitli sonuçlar ve eşitsizlikler elde etmiştir. $C^n([a,b])$ fonksiyon sınıfında, bir fonksiyonun ortalamalarından sapma için optimal üst sınırlar vermiştir. Bu çalışmada, Ostrowski'nin (1938) ve Fink'in (1992) çalışmalarından esinlenmiştir. Dragomir (2003), sınırlı varyasyona sahip fonksiyonlar ve mutlak sürekli fonksiyonlar için sonuçları tamamlayan, konveks fonksiyonlar için bir Ostrowski tipi eşitsizliği literatüre kazandırmıştır. Alomari vd., (2010) ikinci dereceden s-konveks mutlak değerli fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikleri oluşturmuşlardır. Bu çalışmada elde ettikleri ikinci dereceden s-konveks Ostrowski tipli eşitsizliklere orta nokta $(x=\frac{a+b}{2})$ ve $s=1$ durumlarını uygulayarak özel sonuçlara ulaşmışlardır. Aynı zamanda, çalışmada konveks fonksiyonlara uygulanan benzer yaklaşımlar s-konkav fonksiyonlar için de uygulanmıştır. İşcan (2016) yaptığı çalışmada yukarıda bahsedilen çalışmalara benzer olarak p-konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmiş. Yakın tarihte, Erden vd., (2020) bazı fonksiyon çeşitleri için Ostrowski tipi eşitsizlikleri literatüre kazandırmıştır.

Birinci ve ikinci mertebeden türevleri içeren problemlerin yanı sıra herhangi bir mertebeden türevin gerekli olduğu problemlerle de karşılaşılabilmektedir. Bu yüzden bazı araştırmacılar eşitsizliklerin yüksek mertebeden türevler içeren versiyonlarını da çalışmışlardır. Örneğin, yüksek mertebeden türevler içeren bazı Ostrowski tipli sonuçlar Cerone vd., (1999a) tarafından elde edilmiştir. Ek olarak, bazı araştırmacılar herhangi bir mertebeden türevleri p-norm ya da sonsuz norma ait olan fonksiyonlar için genelleştirilmiş eşitsizlikleri sağlamışlardır (Sofo, 2002; Wang ve Zhao, 2009). Birkaç matematikçi daha yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için farklı tarzda Ostrowski tipli yeni sonuçlar elde etmişlerdir (Anastassiou, 1995; Fink, 1992). Erden vd., (2018), yüksek mertebeden türevler içeren eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonlarını geliştirmişler ve bu eşitsizlikler yardımıyla rassal değişkenleri momentleri için uygulamalar vermişlerdir. Kechriniotis ve Theodorou (2008), n kez diferansiyellenebilir fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler geliştirmiş ve olasılık yoğunluk fonksiyonları için bazı uygulamalar vermişlerdir. Bazı matematikçiler yüksek mertebeden türevler için eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan etkili kuadratik formüller ile bir integralin gerçek değeri ve yaklaşık değeri arasındaki ilişkiyi incelemiştir (Kashif vd., 2016; Qayyum vd., 2017; Erden ve Başkır, 2021).

2.4. Simpson Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda literatürde yer alan temel Simpson tipli eşitsizliklerden bahsedilecektir. Simpson eşitsizliği bu çalışmanın temel yapı taşlarından biridir. Simpson eşitsizliği, bir fonksiyonun tanım aralığında Simpson integrali ile bu aralıktaki ortalama değerleri arasındaki ilişkiyi açıklar. Dragomir, Alomari, Darus, Sarıkaya ve Noor gibi birçok matematikçi Simpson eşitsizliği üzerine son dönemde çalışmalar yapmıştır. Dragomir vd., (1999) çalışmasının girişinde Simpson eşitsizliğinden ve Simpson kuadratik formülünden bahsetmişlerdir. İlk olarak, literatürde Simpson eşitsizliği olarak verilen aşağıdaki eşitsizlik verilecektir.

Teorem 2.11. (Simpson İntegral Eşitsizliği). $f\ :[a,b] \to R$ sürekli dönüşümü (a,b) açık aralığında dört kez türevlenebilir ve $\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty} = \sup_{(x)\in(a,b)} \left|f^{(4)}\right| < \infty$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty (b-a)^4.$$

eşitsizliği sağlanır.

Dragomir vd., (1999) dördüncü mertebeden daha düşük türevler için Simpson tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi sunmuşlardır.

Teorem 2.12. $f\ :[a,b]\to R$ sürekli dönüşümü (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. $f'\in L[a,b]$ yani

$$\|f'\|_1=\int_a^b |f(x)|dx$$

ise

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{b-a}{3}\|f'\|_1$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir vd., 1999).

Teorem 2.13. $f\ :[a,b]\to R$ mutlak sürekli bir dönüşümü olsun. $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ olmak üzere $f'\in L_p[a,b]$ ise, o zaman

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq\frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir vd., 1999).

Dragomir vd., (1999) f fonksiyonu dört kez sürekli türevlenebilir değil ise ya da dört kez türevlenebilir $f^{(4)}$, (a,b) aralığında sınırlı değil ise, klasik Simpson integral formülü uygulanamaz. Bu formül bu çalışmada da önemli bir role sahiptir ve pratikte sıkça kullanılmaktadır. Sınırlı varyasyona sahip fonksiyonlar kümesi için Simpson eşitsizliğinde kalan kısmın üst sınırını belirleme üzerine odaklanmıştır.

$L_1[a,b]$ için, gerçel sayıların keyfi bir alt uzayı olan I tanım kümesi içinde türevlenebilen ve birinci türevi sınırlı olan f fonksiyonu için Ostrowski eşitsizliğine, Grüss eşitsizliği uygulanarak fonksiyonun alt ve üst aralıklarıyla ilişkili bir eşitsizlik elde etmişlerdir (Dragomir vd., 1999). Lebesgue uzayı $L_p[a,b]$ 'deki türevlenebilir mutlak sürekli dönüşümler için paragrafın başında bahsedilen sorunu ele almışlardır ve bu duruma bağlı çeşitli eşitsizlikler bulmuşlardır (Dragomir vd., 1999).

Simpson eşitsizliğinin gelişim süreci, birinci türev baz alınarak, s-konvekslik ve konkavlık temelli bazı Simpson tipi eşitsizlikler tanıtılmıştır. Örneğin, Alomari ve Darus (2009) Orta nokta eşitsizliklerini taban alan birinci türevleri s −konveks olan fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikleri literatüre kazandırmıştır. Aynı çalışmada özel ortalamalar için hata tahminleri ve bazı sayısal integral yaklaşım kuralları da elde edilmiştir (Alomari vd., 2009).

Teorem 2.14. $a,b \in I$, $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq R \to R$ mutlak sürekli bir dönüşüm olsun.

$$q(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{6}, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ t - \frac{5}{6}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

fonksiyonu için

$$\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$= (b-a)\int_0^1 q(t)f'(tb + (1-t)a)dt$$

özdeşliği sağlanır (Alomari vd., 2009).

Sonuç 2.2. $a, b \in I,\ a < b$ olmak üzere $f\ : I \subseteq [0, \infty) \to R$ sürekli bir dönüşüm, $f' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ ifadesi $[a, b]$ üzerinde konveks ise, bu durumda

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{5(b-a)}{72}\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari vd., 2009).

Hermite-Hadamard integral eşitsizliği ile bağlantılı olan bazı türevlenebilir konveks fonksiyonlar için birçok eşitsizlik elde edilmiş ve aynı çalışma içerisinde konkav fonksiyonlar benzer teknik işlemler ile eşitsizlikler elde edilmiştir (Yang vd., 2004). Sarıkaya ve diğerler (2010a) mutlak değeri ve mutlak değerinin kuvvetleri konveks olan fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler sağlamıştır. Ayrıca aynı yazarlar s-konveks fonksiyonlar için Simpson tipli yeni eşitsizlikler bulunmuş ve Simpson eşitsizliği ile bağlantılı olan türevlenebilir konveks eşlemeler için eşitsizlikler literatüre kazandırılmıştır, ayrıca gerçel sayıların özel ortalamalarına yönelik bazı uygulamalar da sunulmuştur (Sarıkaya vd., 2010b). Ertuğral ve Sarıkaya (2018) farklı bir genelleme kullanarak birinci türevinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için genişletilmiş Simpson tipli eşitsizliklere ulaşmışlardır. Sarıkaya vd., (2013) ikinci mertebeden türevinin mutlak değeri ve mutlak değerinin kuvvetleri konveks olan fonksiyonlar için Simpson tipli sonuçlar elde etmişlerdir.

İlerleyen yıllarda mutlak değerli türevleri konveks olan fonksiyonların sınıfı için Simpson benzeri eşitsizliklerin yeni genelleştirmelerini oluşturulmuştur (Sarıkaya ve Bardak, 2019). Ayrıca, özel durumlarda elde edilen eşitsizlikler, daha önce bilinen sonuçların daha inceltilmiş ve geliştirilmiş halini sunmaktadır.

Sarıkaya vd., matematiksel eşitsizliklerin analizinde önemli olan Simpson tipi yeni eşitsizlikler elde etmek amacıyla konveksiteye dayalı özgün bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu çalışmada, gerçel sayıların özel ortalamaları için bu eşitsizliklerin pratik uygulamalarına da odaklanılmıştır. Özellikle, belirli gerçel sayıların farklı ortalamalarının arasında kurulan ilişkiler ve bu ilişkilerin matematiksel açıdan incelenmesi üzerinde durulmuştur. Birinci türevlerinin mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipi bir eşitsizliğini konveks fonksiyonlar kullanarak genişletilmiş ve yeni sonuçlar ortaya konulmuştur (Sarıkaya vd., 2014). İlerleyen süreçte türevlenebilir dönüşümler ve birinci türevlerinin mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için genel bir integral özdeşliği üretilmiştir, gerçel sayıların özel ortalamaları için bazı uygulamalar da sunulmuştur (Erden, 2017).

Çalışmanın temel taşlarından biri, yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için Simpson eşitsizlikleridir. Dragomir'in klasik Simpson integral eşitsizliği tanımından esinlenen Liu, yüksek mertebeden sürekli dönüşümler için Simpson eşitsizliğini bilim dünyasına sunmuştur (Liu, 2005).

Teorem 2.19 $f : [a,b] \to R$ üzerinde yüksek mertebeden türevlenebilir bir dönüşüm, $[a,b]$ aralığında $\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty} := sup_{x\in(a,b)} \left|f^{(n)}\right| < \infty$ için

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]} \frac{(k-1)(b-a)^{2k+1}}{3(2k+1)!\,2^{2k-1}} f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \left\|f^{(n)}\right\|_{\infty} \begin{cases} \dfrac{4n^n(b-a)^{n+1}}{(n+1)!\,6^{n+1}} - \dfrac{(n-2)(b-a)^{n+1}}{3(n+1)!\,2^n}, & n < 3, \\ \dfrac{(n-2)(b-a)^{n+1}}{3(n+1)!\,2^n}, & n \geq 3, \end{cases},$$

$\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]$ ifadesi, $\frac{n-1}{2}$ teriminin tam sayı kısmını ifade etmektedir ve eşitsizlik sağlanır (Liu, 2005).

Liu (2005) yaptığı çalışmasında yanı zamanda elde ettiği yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için Simpson tipi integral eşitsizliğini kullanarak $n = 1,2,3,4$ değerleri için özel durumları da sunmuştur. Bulunan bu Simpson integral eşitsizlikleri

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{5}{36}\|f'\|_\infty (b-a)^2,$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{1}{81}\|f''\|_\infty (b-a)^3,$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{1}{576}\|f'''\|_\infty (b-a)^4$$

olarak literatüre kazandırılmıştır.

Bu çalışmalar, Hermite-Hadamard ve Simpson eşitsizliklerinin geniş bir yelpazede genelleştirilmesi ve uygulama alanlarının incelenmesiyle, bu temel eşitsizliklerin matematiksel alandaki önemli gelişimlerini temsil etmektedir.

Bu kısımda verilenler doğrultusunda, tezin ana bölümünde yüksek mertebeden türevlenebilir konveks olan fonksiyonlar için kesirli integraller içeren Simpson tipi integral eşitsizlikleri, bazı özel durumlar ve sonuçlar incelenecektir.

3. YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Bu tezin ana sonuçları olan yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için Simpson tipi eşitsizlikler ve uygulamaları bu kısımda sunulacaktır. Sonuçlar daha anlaşılır ifade edilebilmesi için alt başlıklar halinde verilecektir.

3.1. Yüksek Mertebeden Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin İntegral Özdeşlikleri

Bu kısımda, yüksek mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar için integral özdeşlikleri kurulacak ve özel sonuçları verilecektir. Daha sonraki bölümlerde bu özdeşlikler yardımıyla Simpson tipli sonuçlar elde edilecektir.

Lemma 3.1. $n \in N^{+}$ olmak üzere $f : [a, b] \to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun. Öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. O zaman, her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!}\int_a^b p(x,t)\, f^{(n)}(t)dt \qquad (3.1)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+k}}{(k+1)!}\left[\left(x-\frac{a+5b}{6}\right)^{k+1} - \left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{k+1}\right] f^{(k)}(x)\\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1} \left[f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)\right] + (-1)^n \int_a^b f(t)\, dt\\ &= S(f, n; x) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $p(x, t)$ ifadesi

$$p(x,t)=\begin{cases}\left(t-\dfrac{5a+b}{6}\right)^n, & t\in[a,x)\\ \left(t-\dfrac{a+5b}{6}\right)^n, & t\in[x,b]\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. $p(x,t)$ ifadesinin tanımı dikkate alınarak (3.1) in sol tarafındaki integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\int_a^x \frac{1}{n!}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^n f^{(n)}(t)dt+\int_x^b \frac{1}{n!}\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)^n f^{(n)}(t)dt\\ &=\frac{1}{n!}\left\{\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^n f^{(n-1)}(x)-\left(\frac{b-a}{6}\right)^n f^{(n-1}(a)\right.\\ &\left.+\left(\frac{b-a}{6}\right)^n f^{(n-1}(b)-\left(x-\frac{a+5b}{6}\right)^n f^{(n-1)}(x)\right\}\\ &-\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^{n-1} f^{(n-1)}(t)dt\\ &-\frac{1}{(n-1)!}\int_x^b\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)^{n-1} f^{(n-1)}(t)dt\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Daha sonra, $n-1$ kez daha kısmi integrasyon uygulanır ve ortaya çıkan ifadelerde birbiriyle bağlantılı olanlar aynı toplam sembolü içerisinde yazılırsa (3.1) özdeşliği elde edilir.

Sonuç 3.1. Lemma 3.1' in şartları altında $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}&\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{n!}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^n f^{(n)}(t)dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{n!}\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)^n f^{(n)}(t)dt\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+1}[1+(-1)^k]}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{3}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1}\left[f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)\right]+(-1)^n\int_a^b f(t)\,dt$$
$$=S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)$$

ifadesine ulaşılır.

Sonuç 3.2. Lemma 3.1' in şartları altında $n=1$ alınırsa

$$\int_a^x\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)f'(t)dt+\int_x^b\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)f'(t)dt \tag{3.3}$$
$$=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt$$

ifadesi bulunur.

Sonuç 3.3. (3.3) eşitliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ yazılırsa

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)f'(t)dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(t-\frac{a+5b}{6}\right)f'(t)dt$$
$$=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\int_a^b f(t)\,dt$$

özdeşliği sağlanır.

Benzer sonuçlar $n=2$ durumunda veya gerekli olan türev derecesinde elde edilip istenilen alanlara uygulanabilir.

3.2. Sınırlı Fonksiyonlar için İntegral Özdeşlikleri

Bu kısımda, yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan ya da p norma ait olan fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler incelenecektir. İlk olarak sınırlı fonksiyonları taban alan eşitsizlikler ve özel durumları incelecektir.

Teorem 3.1. $n \in N^+$ olmak üzere $f: [a,b] \to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n)} \in L_\infty\,[a,b]$, yani $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty := \sup_{t\in(a,b)} \left|f^{(n)}(t)\right| < \infty$ ise, o zaman her $x \in [a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&|S(f,n;x)| \\
&\le \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,x],\infty}}{(n+1)!}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1} + \left(x - \frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\right] \\
&+ \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{[x,b],\infty}}{(n+1)!}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{a+5b}{6} - x\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.1) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra mutlak değer için üçgen eşitsizliği ve $f^{(n)}$ fonksiyonunun verildiği aralıklar üzerinde sınırlılığı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&|S(f,n;x)| \\
&\le \int_a^x \frac{1}{n!}\left|t - \frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right| dt + \int_x^b \frac{1}{n!}\left|t - \frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right| dt \\
&\le \left\|f^{(n)}\right\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \frac{1}{n!}\left|t - \frac{5a+b}{6}\right|^n dt + \left\|f^{(n)}\right\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \frac{1}{n!}\left|t - \frac{a+5b}{6}\right|^n dt
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ifadesi elde edilir. Sonuca ulaşmak için (3.5) eşitsizliklerinin sağındaki iki integral hesaplanmalıdır. Bu durumda, ilk integral

$$\int_{a}^{x} \frac{1}{n!}\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^{n} dt \tag{3.6}$$
$$=\left(\frac{1}{n!}\int_{a}^{\frac{5a+b}{6}}\left(\frac{5a+b}{6}-t\right)^{n} dt+\int_{\frac{5a+b}{6}}^{x}\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^{n} dt\right)$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\right)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, ikinci integral sınırlara dikkat edilerek

$$\int_{x}^{b} \frac{1}{n!}\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^{n} dt \tag{3.7}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}\right)$$

şeklinde hesaplanır. (3.6) ve (3.7) sonuçları (3.5) ifadesinde yerine yazılırsa (3.4) elde edilir.

Sonuç 3.4. Eğer (3.4) eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ orta noktası kullanılırsa, o zaman yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için

$$\left|S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{2^{n+1}+1}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}\left[\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}+\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\right]$$
$$\leq \frac{2^{n+1}+1}{2^{n}\cdot 3^{n+1}\cdot (n+1)!}(b-a)^{n+1}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],\infty}$$

orta nokta eşitsizliğine ulaşılır. Burada $S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)$ ifadesi (3.2) de tanımlandığı gibi verilmiştir.

Sonuç 3.5. Teorem 3.1' in koşulları altında $n=1$ seçilerek işlem yapılırsa

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right| \tag{3.8}$$
$$\leq \frac{\|f'\|_{[a,x],\infty}}{2}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^2+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\|f'\|_{[x,b],\infty}}{2}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^2+\left(x-\frac{a+5b}{6}\right)^2\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.6. (3.8) eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{5}{72}(b-a)\left[\|f'\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}+\|f'\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\right]$$
$$\leq \frac{5}{36}(b-a)\|f'\|_{[a,b],\infty}$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitsizlik Dragomir vd., (2000) tarafından ispatlanmış ve Liu (2005) tarafından özel sonuç olarak verilmiştir.

Sonuç 3.7. Eğer (3.4) eşitsizliğinde $x=\frac{2a+b}{3}$ ve $x=\frac{a+2b}{3}$ ayrı ayrı yazıldıktan sonra ortaya çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve ikiye bölünürse

$$\left|S\left(f,n;\frac{2a+b}{3};\frac{a+2b}{3}\right)\right| \tag{3.9}$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{(-1)^{n+k+1}}{2\cdot(k+1)!}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}+(-1)^k\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[f^{(k)}\left(\frac{a+2b}{2}\right)+(-1)^k f^{(k)}\left(\frac{2a+b}{2}\right)\right]\right\}\right|$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1}\left[f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)\right]+(-1)^n\int_a^b f(t)\,dt\Bigg|$$

$$\leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{2a+b}{3}\right],\infty}+\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{a+2b}{3},b\right],\infty}}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}$$

$$+\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{2a+b}{3},b\right],\infty}+\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{a+2b}{3}\right],\infty}}{2\cdot(n+1)!}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[3\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\right]\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],\infty}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 3.8. (3.9) ifadesinde $n=1$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{72}(b-a)\left[\left\|f'\right\|_{\left[a,\frac{2a+b}{3}\right],\infty}+\left\|f'\right\|_{\left[\frac{a+2b}{3},b\right],\infty}\right]$$

$$+\frac{5}{72}(b-a)\left[\left\|f'\right\|_{\left[\frac{2a+b}{3},b\right],\infty}+\left\|f'\right\|_{\left[a,\frac{a+2b}{3}\right],\infty}\right]$$

$$\leq \frac{1}{6}(b-a)\left\|f'\right\|_{[a,b],\infty}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.2. $n\in N^+$ olmak üzere $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n)}\in L_p\ [a,b]$, yani

$$\left\|f^{(n)}\right\|_p=\left(\int_a^b\left|f^{(n)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ise, o zaman her $x\in[a,b]$ için

$$|S(f,n;x)| \tag{3.10}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(nq+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{nq+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,x],p}$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(nq+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1}+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{nq+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}\left\|f^{(n)}\right\|_{[x,b],p}$$

İspat. (3.1) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alındıktan sonra integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|S(f,n;x)| \tag{3.11}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt+\frac{1}{n!}\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

eşitsizliği bulunur. (3.11)' in sağındaki integrallere Hölder eşitsizliği uygulanırsa, ilk integral için

$$\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt \tag{3.12}$$
$$\leq \left(\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^{nq} dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^{nq} dt\right)^{\frac{1}{q}}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,x],p}$$
$$=\left\{\int_a^{\frac{5a+b}{6}}\left(\frac{5a+b}{6}-t\right)^{nq}dt+\int_{\frac{5a+b}{6}}^x\left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^{nq}dt\right\}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,x],p}$$
$$=\frac{1}{(nq+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{nq+1}\right]\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,x],p}$$

sonucu bulunur ve benzer şekilde

$$\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt \tag{3.13}$$

$$\leq \left(\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^{nq} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^b \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= \left\|f^{(n)}\right\|_{[x,b],p} \left(\frac{1}{(nq+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1} + \left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{nq+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

ifadesine ulaşılır. Bu bağlamda, (3.12) ve (3.13) ifadelerinin sonuçları (3.11)'de karşılık geldikleri yerlere yazılırsa istenilen (3.10) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 3.9. Eğer yukardaki teoremde verilen eşitsizlikte $x=\frac{a+b}{2}$ alınır ise

$$\left|S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{2^{nq+1}+1}{(nq+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],p} + \left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],p}\right]$$

sonucu bulunur. Burada $S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)$ ifadesi (3.2) de tanımlandığı gibi verilmiştir.

Sonuç 3.10. Eğer (3.10) eşitsizliğinde $n=1$ seçilirse

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)] - \int_a^b f(t)\,dt\right| \tag{3.14}$$

$$\leq \left(\frac{1}{(q+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{q+1} + \left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{q+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \left\|f'\right\|_{[a,x],p}$$

$$+\left(\frac{1}{(q+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{q+1} + \left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{q+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \left\|f'\right\|_{[x,b],p}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.11. Eğer (3.14) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ alınır ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{6}\left(\frac{2^{q+1}+1}{6(q+1)}\right)^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \left[\|f'\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],p} + \|f'\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],p}\right]$$

sonucu bulunur.

Teorem 3.3. $n \in N^+$ olmak üzere $f: [a, b] \to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n)} \in L_p[a, b]$, yani

$$\|f'\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ise, o zaman her $x \in [a, b]$ için

$$|S(f, n; x)| \tag{3.15}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\frac{1}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],p}$$
$$\times \left[2\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1} + \left(x - \frac{5a+b}{6}\right)^{nq+1} + \left(\frac{a+5b}{6} - x\right)^{nq+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.1) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alındıktan sonra ortaya çıkan eşitsizliğin sağ tarafında Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|S(f, n; x)|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\int_a^b |p(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_a^b |p(x,t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b \left|f^{(n)}(t)\right|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^{nq} dt + \int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^{nq} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],p}$$

ifadesi bulunur. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki integraller Teorem 3.2’nin ispatında hesaplandığı gibi hesaplanır ve yerine yazılırsa istenilen (3.15) eşitsizliği bulunur.

Sonuç 3.12. Eğer (3.15) eşitsizliğinde x yerine $\frac{a+b}{2}$ yazılırsa, o zaman yüksek mertebeden fonksiyonlar için orta nokta tarzında

$$\left|S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{n!}\frac{(b-a)^n}{6^n}\left[\frac{2^{nq+1}+1}{3(nq+1)}(b-a)\right]^{\frac{1}{q}}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],p}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.13. Eğer (3.15) eşitsizliğinde $n=1$ seçilirse, o zaman

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)] - \int_a^b f(t)dt\right| \tag{3.16}$$
$$\leq \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}}\left\|f'\right\|_{[a,b],p}$$
$$\times\left[2\left(\frac{b-a}{6}\right)^{q+1} + \left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{q+1} + \left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

sonucu bulunur.

Sonuç 3.14. Eğer (3.16) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}(b-a)\right]^{\frac{1}{q}} \|f'\|_{[a,b],p}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, Dragomir vd., (2000) tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Sonuç 3.15. Eğer (3.15) sonucunda $x = \frac{2a+b}{3}$ ve $x = \frac{a+2b}{3}$ yazıldıktan sonra ortaya çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve ikiye bölünürse

$$\left|S\left(f, n; \frac{2a+b}{3}; \frac{a+2b}{3}\right)\right| \tag{3.17}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\frac{(b-a)^n}{6^n}\left[\frac{3^{nq+1}+3}{6(nq+1)}(b-a)\right]^{\frac{1}{q}} \left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],p}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.16. (3.17) ifadesinde $n = 1$ yazılırsa, o zaman

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{6}\left[\frac{3^{q+1}+3}{6(q+1)}(b-a)\right]^{\frac{1}{q}} \|f'\|_{[a,b],p}$$

sonucu bulunur.

Bu sonuçlara ek olarak istenilen herhangi bir türev mertebesinde şartları sağlayan fonksiyonlar için üst sınırlar elde edilebilir. Aynı zamanda, bu bölümde değinilmeyen $x = \frac{3a+b}{4}$, $x = \frac{5a+b}{6}$,

$x = \frac{a+3b}{4}$ ve $x = \frac{a+5b}{6}$ özel değerleri ya da gerekli olan herhangi bir değer için sonuçlar incelenebilir.

3.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Simpson Tipi İntegral Eşitsizlikleri

Bu kısımda, yüksek mertebeden türevlerinin mutlak değerleri ve mutlak değerinin kuvvetleri konveks olan fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler incelenecektir. Ayrıca bulunan ana eşitsizliklerin özel durumları verilecek ve literatürde daha önceden sağlanan eşitsizlikler ile bağlantıları açıklanacaktır. İlk olarak, herhangi bir mertebeden türevinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için nasıl eşitsizlikler ortaya çıkacağı aşağıdaki teoremde incelenecektir.

Teorem 3.4. $n \in N^+$ olmak üzere $f: [a, b] \to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $|f^{(n)}|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise, o zaman her $x \in [a, b]$ için

$$
\begin{aligned}
&|S(f, n; x)| \qquad (3.18)\\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}\left[\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right]\\
&+\frac{1}{n!}\frac{1}{b-a}\frac{1}{(n+2)}\left[\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}-\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}\right]\left[(-1)^n\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right]\\
&+\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{6}\left[\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}+5\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}\right]\left[(-1)^{n+1}\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.1) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&|S(f, n; x)| \qquad (3.19)\\
&\leq \int_a^x \frac{1}{n!}\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b \frac{1}{n!}\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt
\end{aligned}
$$

sonucu bulunur. Burada $\left|f^{(n)}(t)\right|$, $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(t)\right| &= \left|f^{(n)}\left(\frac{t-a}{b-a}b+\frac{b-t}{b-a}a\right)\right| \\ &\le \frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|+\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|\end{aligned}$$

ifadesi geçerlidir. Bu bağlamda, (3.19) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned}&\int_a^x \frac{1}{n!}\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt+\int_x^b \frac{1}{n!}\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt \qquad (3.20)\\ &\le \frac{1}{n!}\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left(\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|+\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|\right)dt \\ &+\frac{1}{n!}\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left(\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|+\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|\right)dt \\ &=\frac{1}{n!}\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|}{b-a}\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n (t-a)dt+\frac{1}{n!}\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{b-a}\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n (b-t)dt \\ &+\frac{1}{n!}\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|}{b-a}\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n (t-a)dt+\frac{1}{n!}\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{b-a}\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n (b-t)dt\end{aligned}$$

ifadesini sağlar. Burada hesaplanması gereken dört integral vardır. Mutlak değerden dolayı integrallerin parçalanma noktalarına dikkat edilerek integraller hesaplanırsa birinci integral

$$\begin{aligned}&\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n (t-a)dt \\ &=\int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left(\frac{5a+b}{6}-t\right)^n (t-a)dt+\int_{\frac{5a+b}{6}}^x \left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^n (t-a)dt \\ &=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2} \\ &+\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde yukarıdaki integralin $(b-t)$ ile çarpılmış hali

$$\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n (b-t)dt$$
$$=\int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left(\frac{5a+b}{6}-t\right)^n (b-t)dt+\int_{\frac{5a+b}{6}}^x \left(t-\frac{5a+b}{6}\right)^n (b-t)dt$$
$$=\frac{5}{(n+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}$$
$$+\frac{5(b-a)}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2}$$

olarak bulunur. Sınırları farklı olan üçüncü integral için

$$\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n (t-a)dt$$
$$=\int_x^{\frac{a+5b}{6}} \left(\frac{a+5b}{6}-t\right)^n (t-a)dt+\int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left(t-\frac{a+5b}{6}\right)^n (t-a)dt$$
$$=\frac{1}{(n+1)}\frac{5(b-a)}{6}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}$$
$$+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{5}{(n+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}$$

sonucu bulunurken son integral

$$\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n (b-t)dt$$
$$=\int_x^{\frac{a+5b}{6}} \left(\frac{a+5b}{6}-t\right)^n (b-t)dt+\int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left(t-\frac{a+5b}{6}\right)^n (b-t)dt$$
$$=\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}$$

$$+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki dört integralin sonuçları (3.20) ifadesinde karşılık geldikleri yerlere yazılırsa

$$\int_a^x \frac{1}{n!}\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt+\int_x^b \frac{1}{n!}\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt$$
$$\leq \frac{1}{n!}\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|}{b-a}\left\{\frac{6}{n+1}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2}\right.$$
$$+\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}$$
$$\left.+\frac{1}{(n+1)}\frac{5(b-a)}{6}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}\right\}$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{b-a}\left\{\frac{6}{n+1}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{5a+b}{6}-x\right)^{n+2}\right.$$
$$+\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{5a+b}{6}-x\right)^{n+1}$$
$$\left.+\frac{1}{(n+1)}\frac{5(b-a)}{6}\left(x-\frac{a+5b}{6}\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{a+5b}{6}\right)^{n+2}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik $|S(f,n;x)|$ ifadesinin sağ tarafını kapsamaktadır. Temel analiz işlemleri kullanılarak ortak terimler parantezlere alınırsa, (3.18) sonucuna ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.17. Eğer (3.18) ifadesinde $x=\frac{a+b}{2}$ durumu dikkate alınırsa

$$\left|S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}\left\{\left[\left|f^{(n)}(a)\right|+\left|f^{(n)}(b)\right|\right]\right.$$
$$\left.+2^{n+1}\left[(-1)^{n+1}\left|f^{(n)}(a)\right|+\left|f^{(n)}(b)\right|\right]\right\}$$

sonucu bulunur.

Sonuç 3.18. Eğer (3.18) ifadesinde $n = 1$ durumu dikkate alınırsa, o zaman

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right| \tag{3.21}$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{6}\right)^2\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$
$$+\frac{1}{6}\frac{1}{b-a}\left[\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^3-\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^3\right]\left[\left|f'(b)\right|-\left|f'(a)\right|\right]$$
$$+\frac{1}{12}\left[\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^2+5\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^2\right]\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.19. (3.21) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ alınarak yeniden hesaplanırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{5}{72}(b-a)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

sonucu elde edilir ki bu eşitsizlik Alamori vd., (2009) tarafından sunulmuştur.

Sonuç 3.20. Eğer (3.18) ifadesinde $x = \frac{2a+b}{3}$ ve $x = \frac{a+2b}{3}$ durumları ayrı ayrı hesaplandıktan sonra ortaya çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve ikiye bölünürse

$$\left|S\left(f,n;\frac{2a+b}{3};\frac{a+2b}{3}\right)\right| \tag{3.22}$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}\left[\left|f^{(n)}(a)\right|+\left|f^{(n)}(b)\right|\right]$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\frac{3^{n+1}+1}{2}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}\left[(-1)^{n+1}\left|f^{(n)}(a)\right|+\left|f^{(n)}(b)\right|\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.21. Eğer (3.22) eşitsizliği $n=1$ alınarak yeniden hesaplanırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq\frac{1}{12}(b-a)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

sonucu ortaya çıkar. Bu eşitsizlik, Ertuğral ve Sarıkaya (2018) tarafından türevinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için verilen eşitsizlik ile sol tarafları aynı olsa da yeni bir üst sınır sunmaktadır.

Teorem 3.5. $n\in N^+$ olmak üzere $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $\left|f^{(n)}\right|^p$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise, o zaman her $x\in[a,b]$ için

$$|S(f,n;x)| \tag{3.23}$$
$$\leq\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(nq+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{nq+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{2}-\frac{(b-x)^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(nq+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{nq+1}+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{nq+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{2}-\frac{(x-a)^2}{2}\right)+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a}\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (3.1) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra ortaya çıkan ifadenin sağ tarafına integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&|S(f,n;x)| \qquad (3.24)\\
&\le \frac{1}{n!}\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt+\frac{1}{n!}\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt\\
&\le \frac{1}{n!}\left(\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^{nq} dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+\frac{1}{n!}\left(\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^{nq} dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_x^b \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Teoremin şartları gereği $\left|f^{(n)}\right|^p$ ifadesinin $[a,b]$ üzerinde konveks olduğu düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(t)\right|^p &= \left|f^{(n)}\left(\frac{t-a}{b-a}b+\frac{b-t}{b-a}a\right)\right|^p\\
&\le \frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^p+\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^p
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. O zaman, (3.24)'ün sağındaki iki integral yukarıdaki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_a^x \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt \qquad (3.25)$$

$$\leq \left|f^{(n)}(b)\right|^p \int_a^x \frac{t-a}{b-a} dt + \left|f^{(n)}(a)\right|^p \int_a^x \frac{b-t}{b-a} dt$$

$$= \frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a} \left(\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-x)^2}{2} \right)$$

ve

$$\int_x^b \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt \tag{3.26}$$

$$\leq \frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a} \left(\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(x-a)^2}{2} \right) + \frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a} \frac{(b-x)^2}{2}$$

şeklinde hesaplanabilir. Diğer yandan, daha önce hesaplandığı gibi

$$\int_a^x \left| t - \frac{5a+b}{6} \right|^{nq} dt = \frac{1}{(nq+1)} \left[\left(\frac{b-a}{6} \right)^{nq+1} + \left(x - \frac{5a+b}{6} \right)^{nq+1} \right] \tag{3.27}$$

ve

$$\int_x^b \left| t - \frac{a+5b}{6} \right|^{nq} dt = \frac{1}{(nq+1)} \left[\left(\frac{b-a}{6} \right)^{nq+1} + \left(\frac{a+5b}{6} - x \right)^{nq+1} \right] \tag{3.28}$$

integral karşılıkları yazılabilir. Burada elde edilen (3.25)-(3.26) eşitsizlikleri ve (3.27)-(3.28) integraller eşitlikleri (3.24) ifadesinde karşılık geldiği yerlere yazılırsa istenilen (3.23) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.22. Eğer (3.23) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ durumu hesaplanırsa

$$\left| S\left(f, n; \frac{a+b}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\cdot 6^n \cdot n!}\left[\frac{2^{nq+1}+1}{3(nq+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{n+1}$$

$$\times\left\{\left(\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p+3\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{4}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p+3\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{4}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.23. Eğer (3.23) ifadesinde $n=1$ alınır ise

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right| \tag{3.29}$$

$$\leq\left(\frac{1}{(q+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{q+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{q+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{\left|f'(b)\right|^p}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{\left|f'(a)\right|^p}{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{2}-\frac{(b-x)^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{(q+1)}\left[\left(\frac{b-a}{6}\right)^{q+1}+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{q+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{\left|f'(b)\right|^p}{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{2}-\frac{(x-a)^2}{2}\right)+\frac{\left|f'(a)\right|^p}{b-a}\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

sonucu bulunur.

Sonuç 3.24. Eğer (3.29) eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ durumu hesaplanırsa, o zaman

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{12}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(b-a)$$

$$\times\left\{\left(\frac{|f'(b)|^p+3|f'(a)|^p}{4}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{|f'(a)|^p+3|f'(b)|^p}{4}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

sonucuna ulaşılır. Özel sonuç olarak sunulan bu eşitsizlik Sarıkaya vd., (2010a) tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Sonuç 3.25. Eğer (3.29) ifadesinde $x=\frac{2a+b}{3}$ ve $x=\frac{a+2b}{3}$ durumları ayrı ayrı hesaplandıktan sonra ortaya çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve ikiye bölünürse

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{36}\left\{\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(b)|^p+5|f'(a)|^p}{6}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{|f'(a)|^p+5|f'(b)|^p}{6}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right.$$
$$\left.+2^{\frac{1}{p}}\left[\frac{3^{q+1}+1}{2(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(b)|^p+2|f'(a)|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{|f'(a)|^p+2|f'(b)|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right\}$$

sonucuna ulaşılır.

Son teoreme geçmeden önce, teoremin ifadesinin daha anlaşılır olması için bazı notasyonlar verilecektir.

$$N(f,n;x) \tag{3.30}$$
$$=\frac{|f^{(n)}(b)|^p}{b-a}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2}\right.$$
$$\left.+\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\right\}$$
$$+\frac{|f^{(n)}(a)|^p}{b-a}\left\{\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{5}{(n+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}\right.$$

$$+\frac{1}{(n+1)}\frac{5(b-a)}{6}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2}\Bigg\},$$

$$R(f,n;x) \tag{3.31}$$
$$=\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\Bigg\{\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{5}{(n+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}$$
$$+\frac{1}{(n+1)}\frac{5(b-a)}{6}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}\Bigg\}$$
$$+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a}\Bigg\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}$$
$$+\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}\Bigg\}.$$

Teorem 3.6. $n \in N^+$ olmak üzere $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $p \geq 1$ olmak üzere $\left|f^{(n)}\right|^p$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise, o zaman her $x \in [a,b]$ için

$$|S(f,n;x)| \tag{3.32}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}[N(f,n;x)]^{\frac{1}{p}}$$
$$+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}[R(f,n;x)]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $N(f,n;x)$ ve $R(f,n;x)$ ifadeleri sırasıyla (3.30) ve (3.31) de tanımlandığı gibidir.

İspat. (3.1) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra ortaya çıkan ifadenin sağ tarafına integraller için mutlak değer eşitsizliği uygulanırsa

$$|S(f,n;x)| \tag{3.33}$$

$$\leq \frac{1}{n!}\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt+\frac{1}{n!}\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, (3.33) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadelere integraller için Kuvvet Ortalama (Power Mean) eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt \tag{3.34}$$
$$\leq \left(\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt \tag{3.35}$$
$$\leq \left(\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada sonuca ulaşabilmek için (3.34) ve (3.35) ifadelerindeki dört ana integralin hesaplanması gereklidir. İlk olarak, daha sade integrallerin sonuçları

$$\int_a^x \left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n dt \tag{3.36}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\right)$$

ve

$$\int_x^b \left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n dt \tag{3.37}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}\right)$$

olarak belirlenebilir. Daha sonra, $\left|f^{(n)}\right|^p$ ifadesi $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan dolayı ortaya çıkan

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(t)\right|^p &= \left|f^{(n)}\left(\frac{t-a}{b-a}b+\frac{b-t}{b-a}a\right)\right|^p \\ &\leq \frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^p+\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^p\end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}&\int_a^x\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n\left|f^{(n)}(t)\right|^p dt \qquad (3.38)\\ &\leq \frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\int_a^x\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n(t-a)dt+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a}\int_a^x\left|t-\frac{5a+b}{6}\right|^n(b-t)dt\\ &=\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2}\right.\\ &\left.+\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}\right\}\\ &+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a}\left\{\frac{5}{(n+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}\right.\\ &\left.+\frac{5(b-a)}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{n+2}\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\int_x^b\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n\left|f^{(n)}(t)\right|^p dt \qquad (3.39)\\ &\leq \frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\int_x^b\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n(t-a)dt+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^p}{b-a}\int_x^b\left|t-\frac{a+5b}{6}\right|^n(b-t)dt\\ &=\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^p}{b-a}\left\{\frac{1}{(n+1)}\frac{5(b-a)}{6}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}+\frac{5}{(n+1)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}\Bigg\}$$

$$+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^{p}}{b-a}\Bigg\{\frac{b-a}{6}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+1}+\frac{1}{(n+2)}\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^{n+2}$$

$$+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+2}\Bigg\}$$

sonuçlarına ulaşılabilir. (3.36) ve (3.38) ifadeleri (3.34) eşitsizliğinde, ve (3.37) ve (3.39) ifadeleri de (3.35) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuca kolaylıkla ulaşılabilir.

Sonuç 3.26. Eğer (3.32) eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ seçilerek işlem yapılırsa

$$\left|S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{n!}\left[\frac{2^{n+1}+1}{n+1}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{n+1}$$

$$\times\Bigg\{\left[\frac{2^{n+1}(3n+4)+1}{6(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}(b)\right|^{p}+\frac{6n+11+2^{n+1}(3n+8)}{6(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}(a)\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left[\frac{6n+11+2^{n+1}(3n+8)}{6(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}(b)\right|^{p}+\frac{2^{n+1}(3n+4)+1}{6(n+1)(n+2)}\left|f^{(n)}(a)\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\Bigg\}$$

sonucu bulunur. Burada $S\left(f,n;\frac{a+b}{2}\right)$ ifadesi (3.2) de tanımlandığı gibi verilmektedir.

Sonuç 3.27. Eğer (3.32) eşitsizliğinde $n=1$ seçilerek işlem yapılırsa

$$\left|\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(x)+f(b)]-\int_a^b f(t)\,dt\right| \tag{3.40}$$

$$\leq\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2}+\left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{2}\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}[N(f,1;x)]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{b-a}{6}\right)^2+\left(\frac{a+5b}{6}-x\right)^2\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}[R(f,1;x)]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $N(f,1;x)$ ve $R(f,1;x)$ ifadeleri sırasıyla (3.30) ve (3.31) de tanımlanan özdeşliklerde $n=1$ seçilerek elde edilebilir.

Sonuç 3.28. (3.40) eşitsizliğinde x yerine $\frac{a+b}{2}$ yazılırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq\left[\frac{5}{72}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left[\frac{29}{1296}\left|f^{(n)}(b)\right|^p+\frac{61}{1296}\left|f^{(n)}(a)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{61}{1296}\left|f^{(n)}(b)\right|^p+\frac{29}{1296}\left|f^{(n)}(a)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}(b-a)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik Alomari vd., (2009) tarafından $s=1$ özel sonucu olarak verilmiştir.

Sonuç 3.29. (3.32) eşitsizliğinde $p=1$ yazılırsa, o zaman Teorem 3.4'de verilen (3.18) eşitsizliği tekrar elde edilir. Böylece işlemlerin doğruluğu sağlanmış olur.

3.4. Nümerik İntegrasyon Uygulamaları ve Hata Tahminleri

Bu alt bölümde tez boyunca elde edilen eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan kuadratik formüllerin tahminlerini belirlemede yardımcı olacak yeni yaklaşımlar incelenecektir. Aynı zamanda, yüksek mertebeden türevlenebilen fonksiyonların sağladığı yaklaşık değerler ve fonksiyonların gerçek integral değerleri arasındaki ilişkiler incelenecektir. İlk olarak, tez kapsamında incelenen fonksiyon sınıflarından örnekler seçilerek bu çalışmada verilen yaklaşım metotları ile fonksiyonun integral değeri arasındaki hata tahminleri incelenecektir.

Tez konusu kapsamında ortaya çıkan ve türetilmeye müsait üç yaklaşım metodu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx Q_{n,1}(f;x)$$
$$:= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1} \left[f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)\right]$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\left[\left(x-\frac{a+5b}{6}\right)^{k+1} - \left(x-\frac{5a+b}{6}\right)^{k+1}\right] f^{(k)}(x)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx Q_{n,2}\left(f;\frac{a+b}{2}\right)$$
$$:= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[1+(-1)^k]}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{3}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1} \left[f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)\right]$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx Q_{n,3}\left(f;\frac{2a+b}{3},\frac{a+2b}{3}\right)$$
$$:= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{\frac{(-1)^k}{2\cdot(k+1)!}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1}\right]\right.$$
$$\left.\times\left[f^{(k)}\left(\frac{a+2b}{3}\right) + (-1)^k f^{(k)}\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right]\right\}$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{k+1} \left[f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)\right]$$

Bu formüller yardımıyla integrallerin yaklaşık değerleri ve gerçek değerleri arasındaki ilişkiler incelenebilir. Burada, ifadeleri daha açık yazabilmek için

$$Exact = \int_a^b f(x)dx$$

$$Q_{n,i}(Error) = \left|Q_{n,i} - Exact\right|, \quad i = 1,2,3 \text{ için}$$

gösterimleri yazılabilir. Burada $Q_{n,2}$ ve $Q_{n,3}$ hata tahminleri ile integralin gerçek değeri arasındaki ilişkiler incelenecektir. $Q_{n,1}$ ifadesi x değişkeni içerdiğinden özel değerlerde farklı sonuçlar sunmaktadır. Okuyucular bu durumu kullanarak gerekli olan özel durumlarda hesaplamalar yapabilme imkanı bulmaktadır. Burada, $Q_{n,2}$ ve $Q_{n,3}$ tarafından sunulan hata tahminleri incelenecektir.

$f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + 1$, $f_3(x) = xlnx$ ve $f_4(x) = sinx$ fonksiyonları tanımlandıkları aralıklarda dikkate alınarak farklı n değerleri için aşağıdaki tablolar elde edilecektir.

Tablo 3.1: $Q_{n,2}$ nümerik metodu ile f_1 ve f_2 fonksiyonlarının integralinin hata tahminleri

$f_1[0,1]$			$f_2[0,1]$		
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,2}(Error)}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,2}(Error)}$
5	3.1945280	0.0000260441	**3**	1.53333	0.00092593
10	3.1945280	7.901190×10^{-10}	**4**	1.53333	0.00169753
15	3.1945280	4.440892×10^{-16}	**5**	1.53333	0.

Tablo 3.2: $Q_{n,2}$ nümerik metodu ile f_3 ve f_4 fonksiyonlarının integralinin hata tahminleri

$f_3[1,e]$			$f_4[0,\pi]$		
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,2}(Error)}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,2}(Error)}$
10	2.097264	1.8418202×10^{-8}	**10**	2.0	$1.04351416 \times 10^{-10}$
20	2.097264	$1.6875390 \times 10^{-14}$	**20**	2.0	$2.22044604 \times 10^{-16}$
30	2.097264	$8.88178420 \times 10^{-16}$	**30**	2.0	2.22045×10^{-16}

Tablo 3.3: $Q_{n,3}$ nümerik metodu ile f_1 ve f_2 fonksiyonlarının integralinin hata tahminleri

$f_1[0,1]$			$f_2[0,1]$		
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,3}(Error)}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,3}(Error)}$
5	3.1945280	0.00036845	**3**	1.53333	0.00473251
10	3.1945280	$3.52222039 \times 10^{-8}$	**4**	1.53333	0.00632716
15	3.1945280	$1.77635684 \times 10^{-14}$	**5**	1.53333	0.

Tablo 3.4: $Q_{n,3}$ nümerik metodu ile f_3 ve f_4 fonksiyonlarının integralinin hata tahminleri

$f_3[1,e]$			$f_4[0,\pi]$		
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,3}(Error)}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Exact}$	$\boldsymbol{Q_{n,3}(Error)}$
10	2.097264	1.29055×10^{-6}	**10**	2.0	3.30037×10^{-6}
20	2.097264	$3.2424596 \times 10^{-10}$	**20**	2.0	$1.63713680 \times 10^{-16}$
30	2.097264	$2.2248870 \times 10^{-13}$	**30**	2.0	$3.6758708 \times 10^{-17}$

Tablolarda açık bir şekilde görülmektedir ki seçilen bütün fonksiyonlar için integrallerin gerçek değeri ve tahminsel hesaplamaları arasında çok düşük hatalar vardır. Bu durum, integralleri hesaplanamayan fakat yüksek mertebeden türevleri alınabilecek bütün fonksiyonlar için hata tahminlerinin kullanılabileceği anlamına gelmektedir. Ayrıca, seçilen n değeri arttıkça hata tahminleri integralin gerçek değerine yaklaşmaktadır. Bu doğrultuda geliştirilen yaklaşık değer hesaplama yöntemi n değeri arttıkça daha yakın sonuçlar vermektedir, çünkü n değeri arttıkça hata değeri sıfıra yaklaşmaktadır. Böylece, bu bölümde elde edilen yaklaşım değerlerinin tutarlılığı incelenmiş ve yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için farklı bir yaklaşım metotları geliştirilmiştir.

Şimdi, yüksek mertebeden türevleri sınırlı ya da konveks olan fonksiyonları taban alan eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan hata tahminlerinden bahsedilecektir. İlk olarak, kuadratik formüller içeren eşitsizlikleri daha kolay ifade etmek için bazı tanım ve notasyonlar verilecektir.

I_m : $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{m-1} < x_m = b$ ifadesi, $0 < a < b$ şartını sağlayan $[a, b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. Aynı zamanda, burada ortaya çıkan alt aralıklar için $i = 0, \ldots, m-1$ olmak üzere $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ve $h_i = x_{i+1} - x_i$ olsun. Bu kabullerden yola çıkarak yazılabilen

$$
\begin{aligned}
&Q_{n,1}(f,\xi,I_m) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{h_i}{6}\right)^{k+1}\left[f^{(k)}(x_i)+(-1)^k f^{(k)}(x_{i+1})\right] \\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\left[\left(\xi_i-\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right)^{k+1}-\left(\xi_i-\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right)^{k+1}\right]f^{(k)}(\xi_i)
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_{n,2}(f,I_m) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{[1+(-1)^k]}{(k+1)!}\left(\frac{h_i}{3}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{h_i}{6}\right)^{k+1}\left[f^{(k)}(x_i)+(-1)^k f^{(k)}(x_{i+1})\right]
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&Q_{n,3}(f,I_m) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{(-1)^k}{2\cdot(k+1)!}\left[\left(\frac{h_i}{2}\right)^{k+1}+(-1)^k\left(\frac{h_i}{6}\right)^{k+1}\right]\right. \\
&\left.\times\left[f^{(k)}\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right)+(-1)^k f^{(k)}\left(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3}\right)\right]\right\} \\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{h_i}{6}\right)^{k+1}\left[f^{(k)}(x_i)+(-1)^k f^{(k)}(x_{i+1})\right]
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

notasyonu aşağıdaki teorem ve sonuçların ifadesinde kolaylık sağlayacaktır.

Teorem 3.7. $n \in N^+$ olmak üzere $f: [a, b] \to R$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $(n-1)$. inci mertebeden türevleri $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n)} \in L_\infty\,[a, b]$, yani $\|f^{(n)}\|_\infty := \sup_{t\in(a,b)} |f^{(n)}(t)| < \infty$ ise, o zaman her $x \in [a, b]$ için

$$\int_a^b f(t)\,dt = Q_{n,1}(f, \xi, I_m) + R_{n,1}(f, \xi, I_m),$$

gösterimi ile yazılabilir. Burada, $Q_{n,1}(f, \xi, I_m)$ ifadesi (3.41) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve $i = 0, \ldots, m-1$ değerleri için $h_i = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere $R_{n,1}(f, \xi, I_m)$ kalan terimi

$$\begin{aligned} &|R_{n,1}(f, \xi, I_m)| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\left(\frac{h_i}{6}\right)^{n+1} + \left(\xi_i - \frac{5x_i + x_{i+1}}{6}\right)^{n+1}\right]\|f^{(n)}\|_{[x_i,\xi_i],\infty} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\left(\frac{h_i}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{x_i + 5x_{i+1}}{6} - \xi_i\right)^{n+1}\right]\|f^{(n)}\|_{[\xi_i,x_{i+1}],\infty} \end{aligned} \tag{3.44}$$

tahminlerini sağlar.

İspat. Teorem 3.1' de verilen eşitsizlik $i = 0,1,\ldots, n-1$ olmak üzere $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı üzerinde tekrar ele alınır ve elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa (3.44) tahmini bulunur.

Sonuç 3.30. Eğer teorem 3.7'nin aynı şartları altında $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ durumu göz önünde bulundurularak işlem yapılırsa,

$$\int_a^b f(t)\,dt = Q_{n,2}(f, I_m) + R_{n,2}(f, I_m),$$

gösterimine ulaşılır. Burada, $Q_{n,2}(f, I_m)$ ifadesi (3.42) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve $i = 0, \ldots, m-1$ değerleri için $h_i = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere $R_{n,2}(f, I_m)$ kalan terimi

$$\begin{aligned}
&\left|R_{n,2}(f,I_m)\right| \\
&\leq \frac{2^{n+1}+1}{(n+1)!}\left[\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}+\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\right]\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{h_i}{6}\right)^{n+1} \\
&\leq \frac{2^{n+1}+1}{2^n\cdot 3^{n+1}\cdot(n+1)!}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],\infty}\sum_{i=0}^{m-1}(h_i)^{n+1}
\end{aligned}$$

tahminini sağlar.

Sonuç 3.31. Eğer teorem 3.7' nin aynı şartları altında $\xi_i=\frac{2x_i+x_{i+1}}{3}$ ve $\xi_i=\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}$ durumları göz önünde bulundurularak işlem yapılırsa,

$$\int_a^b f(t)\,dt = Q_{n,3}(f,I_m)+R_{n,3}(f,I_m),$$

gösterimine ulaşılır. Burada, $Q_{n,3}(f,I_m)$ ifadesi (3.43) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve $i=0,\dots,m-1$ değerleri için $h_i=x_{i+1}-x_i$ olmak üzere $R_{n,3}(f,I_m)$ kalan terimi

$$\begin{aligned}
&\left|R_{n,3}(f,I_m)\right| \\
&\leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{2a+b}{3}\right],\infty}+\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{a+2b}{3},b\right],\infty}}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{h_i}{6}\right)^{n+1} \\
&\quad+\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[\frac{2a+b}{3},b\right],\infty}+\left\|f^{(n)}\right\|_{\left[a,\frac{a+2b}{3}\right],\infty}}{2\cdot(n+1)!}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\left(\frac{h_i}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{h_i}{2}\right)^{n+1}\right] \\
&\leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b],\infty}}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{m-1}\left[3\left(\frac{h_i}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{h_i}{2}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

tahminini sağlar.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için Simpson tipi eşitsizliklerin ve uygulamalarının incelenmesini amaçlamıştır. Bu doğrultuda, ilk olarak yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonları taban alan bir integral özdeşliği kurulmuş ve farklı sınıflardaki fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra, elde edilen eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan nümerik integrasyon formülleri de uygulama olarak verilmiştir. Yüksek mertebeden fonksiyonların bir çıktısı olarak hata tahminleri üzerine incelemeler yapılmıştır.

Elde edilen sonuçlar, türevlenebilir olma mertebesi yüksek olan fonksiyonlar için integral eşitsizliklerini içermekte ve bu eşitsizliklerin pratik uygulamalarını vurgulamaktadır. Türetilen Simpson tipi eşitsizlikler, belirli fonksiyon sınıfları için önemli araçlar sunmakta ve bu tür fonksiyonlarla ilgili analizlerde kullanılabilir potansiyel taşımaktadır. Bu sonuçlar, yüksek dereceden türevlenebilirlik gerektiren matematiksel problemlerin çözümünde yeni açılımlar sunabilir ve ilgili alanda gelecekteki araştırmalara ışık tutabilir. Simpson tipli eşitsizlikler üzerine çalışan araştırmacılar burada uygulanan yöntemleri farklı fonksiyon sınıfları için kullanarak yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Aynı zamanda, daha geniş kapsamlı çekirdekler kullanılarak daha hassas sonuçlar verebilen yaklaşım metotları geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

Akdemir, A. O., ve Dragomir, S. S. (2013) Simpson type integral inequalities and applications. *RGMIA Research Group in Mathematical Inequalities and Application. Collection,* 16, Article 74, 1-11.

Alomari, M., & Darus, M. (2009). On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-13.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. S., ve Cerone, P. (2010). Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. *Applied mathematics letters*, 23(9), 1071-1076.

Alomari, M., Darus, M., ve Dragomir, S. S. (2009). New inequalities of Simpson's type for s-convex functions with applications. *Research report collection*, 12(4).

Anastassiou, G. (1995). Ostrowski type inequalities**.** *Proceeding of the American Mathematical. Society,* 123 (12)*,* 3775-378

Azpeitia, A. G. (1994). Convex functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 28(1), 7-12.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1.

Beckenbach, E. F., ve Bellman, R. (1961). Inequalities Springer-Verlag. *Berlin, Heidelberg, New York.*

Budaka, H., Sarikaya, M. Z., & Qayyum, A. (2017). Improvement in companion of Ostrowski type inequalities for mappings whose first derivatives are of bounded variation and applications. *Filomat*, 31(16), 5305-5314.

Cerone, P., Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. (2000). A generalized trapezoid inequality for functions of bounded variation. *Turkish Journal of Mathematics,* 24(2), 147-163.

Dragomir, S. S. (2001). On the Hadamard's inequlality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. *Taiwanese journal of mathematics*, 775-788.

Dragomir, S. S. (2003). An Ostrowski like inequality for convex functions and applications. *Revista Mathematica Complutense*, 16(2), 373-382.

Dragomir, S. S. (2015). Inequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on linear spaces. *Proyecciones (Antofagasta)*, 34(4), 323-341.

Dragomir, S. S., Agarwal, R. P., ve Cerone, P. (1999). On Simpson's inequality and applications. *RGMIA Research Report Collection*, 2(3).

Dragomir, S. S., Agarwal, R. P., ve Cerone, P. (1999). On Simpson's inequality and applications. *RGMIA Research Report Collection*, 2(3).

Dragomir, S. S., ve Agarwal, R. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied mathematics letters*, 11(5), 91-95.

Dragomir, S. S., ve Pearce, C. (2003). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. *Science direct working paper*, (S1574-0358), 04.

Dragomir, S. S., ve Wang, S. (1998). Applications of Ostrowski's inequality to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules. *Applied Mathematics Letters*, 11(1), 105-109.

Dragomir, S. S.,ve Wang, S. (1997). A New Inequality of Ostrowski's Type in L_1Norm and Applications to Some Special Means and to Some Numerical Quadrature Rules. *Tamkang Journal of Mathematics*, 28(3), 239-244.

Erden, S., & Başkır, B. M. (2021). Improved results of perturbed inequalities for higher-order differentiable functions and their various applications. *Filomat*, 35(10), 3475-3490.

Erden, S., Budak, H., ve Sarıkaya, M. Z. (2020). Some perturbed inequalities of Ostrowski type for twice differentiable functions. *Math. Clu*, 62.

Erden, S., Budak, H., Zeki Sarikaya, M., Iftikhar, S., ve Kumam, P. (2020). Fractional Ostrowski type inequalities for bounded functions. *Journal of inequalities and applications*, 1, 123.

Erden, S., Çelik, N., ve Khan, M. A. (2021). Refined inequalities of perturbed Ostrowski type for higher-order absolutely continuous functions and applications. *AIMS Mathematics*, 6(1): 362–377

Erden, S., Iftikhar, S., Kumam, P., ve Awan, M. U. (2020). Some Newton's like inequalities with applications. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 114, 1-13.

Erden, S., Iftikhar, S., Kumam, P., ve Thounthong, P. (2020). On error estimations of Simpson's second type quadrature formula. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.

Ertuğral F. ve Sarıkaya, M. Z. (2018). On the extended Simpson type integral inequalities. *Proceedings of The International Conference on Mathematical Studies and Applications 2018 4-6 October 2018*, 153.

Fejér, L. (1906). Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 131, 216-223.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., ve Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge University Press. ISBN-13: 9780521358804.

Hua, J., Xi, B. Y., ve Qi, F. (2015). Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions. *Afrika Matematika*, 26(5-6), 741-752.

Iftikhar, S., Erden, S., Ali, M. A., Baili, J., ve Ahmad, H. (2022). Simpson's second-type inequalities for co-ordinated convex functions and applications for cubature formulas. *Fractal and Fractional,* 6(1), 33

Iscan, I. (2016). Ostrowski type inequalities for p-convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3), 140-150.

Iscan, I., Tekin, T., ve Fatih, Y. (2021). Some new inequalities on generalization of Hermite–Hadamard and Bullen type inequalities, applications to trapezoidal and midpoint formula. *Kragujevac Journal of Mathematics* 45(4): 647–657

Kirmaci, U. S. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Applied mathematics and computation*, 147(1), 137-146.

Kirmaci, U. S., Bakula, M. K., Özdemir, M. E., ve Pečarić, J. (2007). Hadamard-type inequalities for s-convex functions. *Applied Mathematics and Computation*, 193(1), 26-35.

Kirmaci, U. S., ve Özdemir, M. E. (2004). On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Applied Mathematics and Computation*, 153(2), 361-368.

Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons.

Liu, Z. (2005). An inequality of Simpson type. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2059), 2155-2158.

M.Z. Sarikaya, E. Set, M.E. Özdemir, (2010a). On new inequalities of Simpson's type for convex functions, RGMIA *Research Report Collection* 13 (2), Article2.

Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., & Fink, A. M. (1993). More on Norm Inequalities. *Classical and New Inequalities in Analysis*, 559-594.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., ve Fink, A. M. (2013). *Classical and new inequalities in analysis* (Vol. 61). Springer Science & Business Media.

Mitrinovic, D. S., ve Vasic, P. M. (1970). Analytic inequalities (Vol. 1). Berlin: Springer-verlag.

Niculescu, C. P., Persson, L. E., Niculescu, C. P., ve Persson, L. E. (2006). Convex Functions on a Normed Linear Space. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*, 101-176.

Ostrowski, A., *Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert*, Comment. Math. Helv. 10 (1937), no. 1, 226–227 (German)

Pachpatte, B. G. (2005). Mathematical inequalities. Elsevier

Peajcariaac, J. E., ve Tong, Y. L. (1992). Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Academic Press

Pearce, C. E., ve Pečarić, J. (2000). Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae. *Applied Mathematics Letters*, 13(2), 51-55.

J. Pečarić (1987), *Konveksne funkcije: Nejednakosti* (Naučna knjiga, Beograd).

Qayyum, A., Kashif, A. R., Shoaib, M., & Faye, I. (2016). Derivation of New Efficient Quadrature Rules Using Ostrowski Type Integral Inequalities for n−Times Differentiable Mappings. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 7(3).

Roberts, A. W., ve Varberg, D. E. (1973). Convex Functions Academic Press. *New York*, *62*.

Sarıkaya, M. Z., Budak, H., ve Erden, S. (2015). On new inequalities of Simpson's type for generalized convex functions, RGMIA *Research Report Collection*, 18, 13.

Sarıkaya, M. Z., Budak, H., ve Erden, S. (2019). On new inequalities of Simpson's type for generalized convex functions. *Korean Journal of Mathematics*, *27*(2), 279-295.

Sarıkaya, M. Z., Set, E., ve Ozdemir, M. E. (2010b). On new inequalities of Simpson's type for s-convex functions. *Computers & Mathematics with Applications*, *60*(8), 2191-2199.

Sarıkaya, M. Z., ve Bardak, S. (2019). Generalized Simpson Type Integral Inequalities. *Konuralp Journal of Mathematics*, *7*(1), 186-191.

Sarikaya, M. Z., Erden, S., ve Budak, H. (2019). On The Generalized Integral Inequalities for Twice Differentiable Mappings. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 37(1), 187-205.

Sarikaya, M. Z., Set, E., ve Ozdemir, M. E. (2013). On new inequalities of Simpson's type for functions whose second derivatives absolute values are convex. *Journal of applied mathematics, statistics and informatics*, 9(1).

Set, E. (2010). Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri (Doctoral dissertation, *Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum).*

Set, E., Özdemir, M. E., ve Sarıkaya, M. Z. (2012). On new inequalities of Simpson's type for quasi-convex functions with applications. *Tamkang journal of mathematics*, 43(3), 357-364.

Set, E., Sarıkaya, M. Z., ve Uygun, N. (2016). On new inequalities of Simpson's type for generalized quasi convex functions. *Advance. Inequalities. Application., 2017*.

Set, E., Sarikaya, M. Z., Özdemir, M. E., & Yıldırım, H. (2014). The Hermite-Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, *10*(2), 69-83.

Siricharuanun, P., Erden, S., Ali, M. A., Budak, H., Chasreechai, S., ve Sitthiwirattham, T. (2021). Some new Simpson’s and Newton’s formulas type inequalities for convex functions in quantum calculus. *Mathematics*, 9(16), 1992. functions in quantum calculus. *Mathematics*, 9(16).

Xi, B. Y., ve Qi, F. (2012). Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications to means. *Journal of function spaces*.

Yang, G. S., Hwang, D. Y., ve Tseng, K. L. (2004). Some inequalities for differentiable convex and concave mappings. *Computers & Mathematics with Applications*, 47(2-3), 207-216.