T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

BURÇİN GÖKKURT ÖZDEMİR

DANIŞMAN
DOÇ. DR. SAMET ERDEN

BARTIN-2024

T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burçin GÖKKURT ÖZDEMİR

BARTIN-2024

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Samet ERDEN danışmanlığında hazırlamış olduğum " KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER " başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

22.01.2024

Burçin GÖKKURT ÖZDEMİR

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca zengin bilgi birikimiyle bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle tez çalışmamda eşsiz katkıları bulunan, düşünme yeteneğini aşılayan ve bu süreçte gösterdiği her türlü destek ve yardımlardan dolayı saygıdeğer hocam Doç. Dr. Samet ERDEN'e en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım. Tezin gelişmesinde katkı sağlayan sayın jüri üyelerine katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışmam sürecince yanımda olan değerli arkadaşlarım Sayın Canmert DEMİR'e, Sayın Rumeysa ERDEN'e teşekkür ederim. Akademik hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme, değerli eşim Soner ÖZDEMİR'e ve canım oğlum Yiğit Osman ÖZDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Burçin GÖKKURT ÖZDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Burçin GÖKKURT ÖZDEMİR

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Samet ERDEN

Bartın-2024, sayfa: 44

Son yıllarda, kesirli analiz teorisinin gelişim gösterdiği iyi bilinmektedir. Matematiğin pek çok uygulama alanında kullanılan kesirli integraller ve türevler, reel nesnel ve işlemlerin matematiksel modellemesinin yeterince sağladığını göstermektedir. Matematiksel problemlerde her zaman net sonuçlara ulaşılamaz. Bu durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gerekir. İşte bu noktada eşitsizlik teorisi ön plana çıkmaktadır. Örneğin, Riemann-Liouville kesirli integral ve türevin tanımları integrale bağlı olduğundan, birçok fonksiyonun kesirli integral ve türevlerini hesaplamak kolay değildir. Bir integralin tam değeri hesaplanamadığı zaman, eşitsizlikler yardımıyla integralin yaklaşık değeri tahmin edilebilir. Böyle durumlarda eşitsizliğe ihtiyaç duyulmaktadır. Bu doğrultuda, integral eşitsizlikleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte kullanılan en önemli araçlar arasında yerini almıştır. Bazı problemlerde integralin tam değeri hesaplanamaz. Böyle durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gereklidir. Bu yüzden, bazı matematikçiler fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikleri üzerine çalışmıştır. Örneğin, Hermite-Hadamard ve Ostrowski eşitsizlikleri, literatürdeki önemli eşitsizliklerden bazılarıdır.

Bu tez kapsamında, kesirli integral içeren eşitsizlikler üzerine yürütülen çalışmalar ışığında; yüksek mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için kesirli integral eşitsizlikleri ve uygulamaları sunulacaktır. İlk olarak, yüksek mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar kullanılarak Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren özdeşlikler verilecektir. Daha sonra, yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için kesirli integral eşitsizlikleri kurulacaktır. Ayrıca, bu eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan kuadratik formüllerin hata tahminleri incelenecektir. Son olarak, ele alınan yüksek mertebeden fonksiyonların en uyumlu formatlarından olan üstel fonksiyonlar için uygulamalar sunulacaktır.

Anahtar Kelimeler: İntegral eşitsizlikleri, nümerik integrasyon, Ostrowski eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integrali, yüksek mertebeden türevler

Bilim Alanı Kodu: 26D10, 26D15, 26A33, 26A46, 41A55.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRALS

Burçin GÖKKURT ÖZDEMİR

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Samet ERDEN

Bartın-2024, pp:44

It is well known that in recent years, the theory of fractional analysis has evolved. Fractional integrals and derivatives, which are used in many application areas of mathematics, show that mathematical modeling of real objects and processes is adequate. Clear results can not always be achieved in mathematical problems. In these cases, it is necessary to develop approach methods. At this point, inequality theory comes to the fore. For example, it is not easy to calculate fractional integrals and derivatives of many functions because the definitions of the Riemann-Liouville fractional integral and derivative depend on the integral. When the exact value of an integral cannot be calculated, the approximate value of the integral can be estimated with the help of inequalities. In such cases, inequality is needed. In this regard, integral inequalities have become among the most important tools used in both theoretical and applied mathematics. In some problems, the exact value of the integral cannot be calculated. In such cases, it is necessary to develop approach methods. Therefore, some mathematicians have studied integral inequalities for various classes of functions. Hermite-Hadamard and Ostrowski are some of the important inequalities in literature.

Within the scope of this thesis, in the light of the studies carried out on inequalities involving fractional integrals; Fractional integral inequalities for higher-order differentiable functions and their applications will be given. First of all, new identities involving Riemann-Liouville fractional integrals are presented by using higher-order differantiable functions. Afterwards, fractional integral inequalities for functions whose higher order derivatives are bounded are established. The error estimates of the quadratic formulas that arise when investigating these inequalities are also examined. Finally, applications for exponential functions, which are one of the most adaptive forms of the higher order functions considered, are presented

Keywords: Higher-order derivatives, integral inequalities, numerical integration,
Ostrowski's inequality, Riemann-Liouville fractional integral

Scientific Field Code: 26D10, 26D15, 26A33, 26A46, 41A55.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

J_a^α	: α. mertebeden kesirli integral
Γ	: Gamma fonksiyonu
β	: Beta fonksiyonu
N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
R^n	: n-boyutlu öklit uzayı
I	: R'de bir aralık
I^0	: I 'nın içi
[.,.]	: Kapalı aralık
(.,.)	: Açık aralık
Σ	: Toplam sembolü
sup	: Supremum
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f^n	: f fonksiyonunun n. mertebeden türevi
$J^\alpha f(x)$	: α. mertebeden fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali
$J_{a+}^\alpha f$	: f fonksiyonunun sağ taraflı Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali
$J_{b-}^\alpha f$	: f fonksiyonunun sol taraflı Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali
$\|f\|_1$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki mutlak değerinin integrali
$L_1[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_p[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_\infty[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrali sınırlı olan fonksiyonların kümesi
$\|f\|_\infty$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki maksimum değeri

1. GİRİŞ

Kesirli analiz, türev ve integral operatörlerinin gerçel veya karmaşık sayı kuvvetlerini tanımlayan bir matematiksel analiz dalıdır. Kesirli türev ve integral kavramları, diferansiyelleme ve integrallemenin tamsayı olmayan keyfi mertebeye genelleştirilmesidir (Ata, 2017). Kesirli türev ve integral kavramları, türev ve integral ifadelerinin sadece tam sayı mertebeleri mi vardır yoksa kesirli mertebeden türev ve integral hesaplanabilir mi sorusundan ortaya çıkmıştır. Bu kapsamda kesirli analizin başlangıcı, tamsayı mertebeden analizin başlangıcı gibi eskiye dayanmaktadır. Kesirli türev ve integraller, literatürde ilk kez 1965 yılında L'Hospital ile Leibniz arasındaki mektuplaşmalarda görülmektedir (Kilbas, Srivastava, & Trujillo, 2006). L'Hospital, 1695 yılında Leibniz'e yazdığı mektupta $f(x) = x$ lineer fonksiyonunun $n.$ türevi için $\frac{d^n y}{dx^n}$ ifadesini kullandığını ve eğer $n = \frac{1}{2}$ olursa nasıl bir sonuç vereceğini sormuştur. Bu soru karşısında Leibniz; "Bir gün çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran açık bir paradoksdur" şeklinde ifade ederek ($y = x$, $n = \frac{1}{2}$ için) $\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ olarak cevap vermiştir. Böylece, kesirli analizin temelleri ortaya atılmıştır (Leibniz, 1965). L'Hospital ve Leibniz'in araştırmalarının ardından kesirli analiz, birçok matematikçinin dikkatini çekmiş ve çalışma konusu olmuştur.

Kesirli türev ve integral kavramlarının gelişmesinde ise ilk adımı Riemann ve Liouville ortaya atmışlardır. Daha sonra devamında birçok matematikçi tarafından kesirli türev ve integral çalışmaları yapılmıştır. 1772 yılında Lagrange diferansiyeller operatörler için kuvvet alma kanunu ile kesir analizine önemli katkılar sağlamıştır. Laplace integraller yoluyla kesirli türevi 1812 yılında tanımlamış (akt. Laplace, 1820) ve bu tanım Lacroix'in (1819) eserlerinde yer almıştır. Tauchore problemi olarak adlandırılan integral denklemini çözmek için kesirli operatörler, N. H. Abel tarafından 1823 yılında kullanılmıştır. Ayrıca fizik, kimya, biyoloji ve mekanik uygulama alanlarında ortaya çıkan matematiksel problemleri çözmek için Abel'in integral denkleminden yararlanılmıştır. Son yıllarda kesirli analiz, matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça yaygın uygulama alanı bulmuştur. Bunun temel nedeni, viskoelastiklik ve sönüm, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, filtreleme ve tersinemezlik, kontrolör tasarımı gibi birçok olgunun kesirli analiz kullanılarak daha gerçeğe uygun modellenebilmesi ve açıklanabilmesidir (Karadeniz, 2008). Benzer şekilde kesirli analiz, fen ve mühendisliğin akışkan akışı, elektromanyetik teori ve olasılık, reoloji gibi pek çok alanda kullanılmıştır (dos Santos 2018; Fernandez, 2018; Sandev, 2017).

Liouville, kesirli analiz tanımlarını 1832 yılında teorik problemlere uygulamıştır. Aynı zamanda, Liouville sağ ve sol taraflı türev ve integrallerin varlığını ilk kez ortaya koyan araştırmacıdır. Diğer taraftan Riemann (1859) kesirli integral teorisini ortaya koymuş ve bu yöntem Liouville (1832) yöntemiyle beraber Riemann-Liouville çözüm yaklaşımı olarak adlandırılmıştır. Kesirli türev ve integraller üzerine bir diğer önemli çalışmalar 1867 yılında Grünwald tarafından yapılmıştır. Grünwald, 1867 yılında ise kesirli operatör üzerinde çalışmalarını yürütmüştür. Benzer şekilde Letnikov'un (1868) yaptığı araştırmalar da kesirli hesaplamaya farklı yaklaşım sunmuştur. Letnikov'un yürütmüş olduğu bu araştırmalar, Grünwald'ın (1867) çalışmalarıyla beraber alanyazında Grünwald-Letnikov çözüm yöntemi olarak bilinmektedir. Benzer şekilde birçok araştırmacı 1900 ile1990 yılları arasında kesirli hesaplama yöntemi üzerinde pek çok çalışma yürütmüştür (Miller & Ross, 1993).

Riemann (1892) yayımladığı bir çalışmasında, Taylor serisinin bir genelleştirmesini kullanarak kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. Ek olarak, Hardy, Samko, Riezs, Oldman, Ross, Kilbas, Bagley, Miller, Caputo gibi birçok matematikçi 1900'lerden günümüze kesirli hesaplamaların gelişmesinde büyük katkılar sağlamıştır. Diğer yandan eşitsizlik teorisi, yaklaşım metotlarının temelini oluşturmada önemli bir yere sahip olan Cauchy, Cebyshev, Gaus ve diğer bilim adamlarının çalışmalarından bu yana dikkat çeken bir alan haline gelmiştir.

Son zamanlarda eşitsizliklerin uygulama alanlarının artmasından dolayı Hermite-Hadamard ve Ostrowski başta olmak üzere birçok integral eşitsizliği araştırmacıların dikkatini çekmektedir. Bu eşitsizliklerden Hermite-Hadamard eşitsizliği; 1881 yılında Hermite tarafından konveks fonksiyonlar kullanılarak elde edilen ve eş zamanlı olarak Hadamard tarafından da bulunduğu için literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen sonuçtur. Bu sonuç 1881 yılında Hermite tarafından Mathesis dergisine gönderilmiş ve 1883 yılında aynı dergide basılmıştır (Akt Kılıçer, 2023). Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bulunmasından sonra Fejer (1906), pozitif değerli bir fonksiyon yardımıyla bu sonucun ağırlıklı versiyonunu ispatlamıştır. Bu çalışmaların ışığında, Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser eşitsizlik alanını sistematik bir bilim dalı haline getirmiştir (Akt. Hardy vd., 1952).

Bir diğer önemli integral eşitsizliği, Ostrowski (1938) tarafından birinci türevi sınırlı olan fonksiyonlar kullanılarak elde edilmiştir. Özellikle son 25 yılda Ostrowski eşitsizliğini temel alan binlerce çalışma yayımlanmıştır. Örneğin, birinci türevleri Lebesgue 1-normu ve Lebesgue p-normuna ait fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçlar Dragomir ve Wang'ın (1997, 1998) çalışmalarında sunulmuştur. İki değişkenli fonksiyonların kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuç Barnett ve Dragomir (2001) tarafından literature kazandırılmıştır. Bunun yanı sıra, iki değişkenli fonksiyonların kısmi türevleri, Lebesgue p-norma ait olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçlar ise Dragomir vd., (2003) tarafından ispatlanmıştır. Temel sonuçların ışığında, Ostrowski ve Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin birinci, ikinci ve yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için birçok sonucu elde edilmiştir.

Son 20 yılda, bu çalışmaları referans alan yüzlerce çalışma yapılmıştır. Bunlara ek olarak çalışma kapsamında gerçekleştirilecek kesirli integraller içeren eşitsizlikler üzerine de birçok çalışma bulunmaktadır. Örneğin, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin kesirli integraller içeren versiyonu, Sarıkaya (2014) tarafından sunulmuştur. Araştırmacılar aynı çalışmada Riemann Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli bazı sonuçlar vermiştir. İki değişkenli fonksiyonlarda, koordinatlara göre konveks olma durumu söz konusudur. Koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için iki katlı Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard eşitsizliği Sarıkaya tarafından ispatlanmıştır (Sarıkaya, 2014).

Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Montgomery tarzındaki özdeşlik ve bu eşitlik yardımıyla ortaya çıkan Ostrowski tipli kesirli integral eşitsizlikleri Aglić Aljinović (2014) tarafından sağlanmıştır. Ek olarak, Dragomir, sağ ve sol taraflı Riemann-Liouville integrallerinin toplamına karşılık elde ettiği bir özdeşlik ile sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar, Hölder sürekli fonksiyonlar, Lipschitzian fonksiyonlar ve çeşitli Lebesgue norm uzaylarına ait mutlak sürekli fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmiştir (Dragomir, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d). Erden vd., (2020), farklı Lebesgue uzaylarına ait iki değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraller içeren Ostrowski tipli bazı sonuçlar sunmuştur. İki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraller içeren Ostrowski tipli sonuçlar ise Erden, Budak ve Sarikaya (2020) çalışmasında sunulmuştur. Aynı zamanda, Dragomir (2020) sınırlı türevleri kullanarak mutlak sürekli fonksiyonların Riemann-Liouville kesirli integralleri için Ostrowski ve trapezoid tipli bazı eşitsizlikler sunmuştur.

Birinci ve ikinci mertebeden türevleri içeren problemlerin yanı sıra herhangi bir mertebeden türevin gerekli olduğu problemlerle de karşılaşılabilmektedir. Bu yüzden bazı araştırmacılar eşitsizliklerin yüksek mertebeden türevler içeren versiyonlarını da çalışmışlardır. Örneğin, yüksek mertebeden türevler içeren bazı Ostrowski tipli sonuçlar Cerone vd., (1999) tarafından elde edilmiştir. Aynı zamanda, koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için kesirli integraller içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler Latif ve arkadaşları (2012) tarafından incelenmiştir. Ek olarak, bazı araştırmacılar herhangi bir mertebeden türevleri p-norm ya da sonsuz norma ait olan fonksiyonlar için genelleştirilmiş eşitsizlikleri sağlamışlardır (Sofo, 2002; Wang & Zhao, 2009). Birkaç matematikçi daha yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için farklı tarzda Ostrowski tipli yeni sonuçlar elde etmişlerdir (Anastassiou, 1995; Fink, 1992). Erden vd., (2018), yüksek mertebeden türevler içeren eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonlarını geliştirmişler ve bu eşitsizlikler yardımıyla rassal değişkenleri momentleri için uygulamalar vermişlerdir. Bazı matematikçiler yüksek mertebeden türevler için eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan etkili kuadratik formüller ile bir integralin gerçek değeri ve yaklaşık değeri arasındaki ilişkiyi incelemiştir (Erden & Başkır, 2021; Kashif vd., 2016; Qayyum vd., 2017).

Bunlara ek olarak iki değişkenli fonksiyonların yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçlar da literatüre kazandırılmıştır (Changjian & Cheung, 2010; Hanna vd., 2002; Ujević, 2003). Hem yüksek mertebeden türevlerin hem de Riemann-Liouville kesirli integrallerinin kullanıldığı bir çalışma Qayyum ve diğerleri (2019) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Yazarlar yüksek mertebeden türevler için Riemann-Liouville kesirli integraller içeren genişletilmiş Ostrowski tipli eşitsizlikler ortaya çıkarmışlardır (Qayyum vd., 2019). Aynı zamanda, yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için iki değişkenli fonksiyonların Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren bazı kesirli integral eşitsizlikleri Erden ve arkadaşları (2024) tarafından literatüre kazandırılan en güncel çalışmalardandır. Bu bilgilere ek olarak, kesirli hesaplamalar ile ilgili integral eşitsizlikleri üzerine yapılan bazı örnek çalışmalar referanslara eklenmiştir (Farid, 2017; Lakoud & Aissaoui, 2013; Sarikaya & Filiz, 2014).

Bu kısımda bahsedilen çalışmalardan yola çıkılarak tez konusu kapsamında, yüksek mertebeden kısmi türevleri mutlak sürekli olan fonksiyonlar için kesirli integral eşitsizlikleri kurulacaktır. İlk olarak, yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar kullanılarak sağ ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren özdeşlikleri elde edilecektir. İkinci olarak, elde edilen özdeşlikler yardımıyla yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri oluşturulacaktır. Daha sonra, ortaya çıkan kesirli integral eşitsizlikleri için nümerik integrasyon uygulamaları hesaplanacak ve üstel fonksiyonlar için uygulamalardan örnekler sunulacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu kısımda; tez çalışmasında elde edilen ana sonuçların bulunmasında önem taşıyan temel kavramlardan bahsedilecektir. Tez kapsamında gerçekleştirilecek olan hedefler doğrultusunda gerekli olan ve temel teşkil eden tanım, teorem ve kavramlar verilecektir.

Tez çalışması kapsamında elde edilecek özdeşlikler yardımıyla farklı fonksiyon sınıfları için eşitsizlikler incelenecektir. İlk olarak; bu amaç doğrultusunda gerekli olan fonksiyon tanımları ve aralarındaki ilişkileri açıklayacak olan teoremler aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1 (Sınırlı Fonksiyon): $I \subset R$, $f : I \to R$ bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.2 (Süreklilik): $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - \varphi(k)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonu $k \in K$ noktasında süreklidir denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.3 (Süreklilik): $K \subset R$ olmak üzere $\varphi : K \to R$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun.

$$\lim_{x \to k} \varphi(x) = \varphi(k)$$

ise φ fonksiyonu k noktasında süreklidir denir. Eğer φ fonksiyonu K kümesinin bütün elemanlarında sürekli ise, o zaman φ fonksiyonu K kümesi üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.4 (Mutlak Sürekli Fonksiyon): I bir aralık olsun. $f : I \to R$ fonksiyonu I üzerinde mutlak süreklidir $\Leftrightarrow \{[a_i, b_i]: \ 1 \leq i \leq n\}$, I aralığındaki örtüşmeyen aralıkların sonlu birleşimi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır (Gordon, 2002).

Tanım 2.5 (Lipschtizian Fonksiyon): $f: I \to R$ bir fonksiyon ve $L > 0,\ L \in R$ olsun. Eğer her $a, b \in I$ için

$$|f(b) - f(a)| \le L|b - a|$$

oluyorsa f fonksiyonu L sabiti için Lipschitz koşulunu sağlar ve f fonksiyonuna Lipschitz fonksiyonu denir (Gordon, 2002).

Tanım 2.6: $\omega: [a, b] \to R$ fonksiyonu $r \in (0,1]$ ve $H > 0$ olmak üzere $t, s \in [a, b]$ için

$$\omega(t) - \omega(s) \le H|t - s|^r$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, ω fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde $r-$ Hölder süreklidir denir. Eğer $r = 1$ ve $H = L$ alınırsa ω fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde $L-$ Lipschitzian fonksiyon denir (Gordon, 2002).

Tanım 2.7 (Düzgün Süreklilik): $f: [a, b] \subseteq R \to R, x_0 \in [a, b]$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in [a, b]$ ve $|\ x_1 - x_2\ | < \delta$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için $|\ f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f, [a, b]$ de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2000).

Sonuç 1. $f, [a,b]$ Lipschitz şartını sağlıyorsa $f, [a,b]$ düzgün süreklidir (Gordon, 2002).

Teorem 2.1: $f: I \to R$ fonksiyonu L Lipschitz sabiti için Lipschitz fonksiyonu ise, bu durumda *f* fonksiyonu *I* aralığında mutlak süreklidir (Gordon, 2002).

Teorem 2.2: Bir *f* fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve f' türevi var ve (a,b) aralığında sınırlı ise, bu kapsamda *f* fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir (Gordon, 2002).
Türevi sınırlı olmayan bir fonksiyon mutlak sürekli olabilir. Örneğin; [0,1] aralığında $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon mutlak sürekli bir fonksiyondur. Ancak türevi $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, (0,1) aralığında sınırlı değildir.

Şimdi, tez konusu kapsamında elde edilecek eşitsizliklerin ortaya çıkarılmasında büyük önem arz eden temel integral eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 2.8 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Balcı, 2012).

Tanım 2.9: $\psi_1 = [a,b]$, $\psi_2 = [c,d] - \infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x,y), \psi_1 x \psi_2$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)dx \right) dy$$

şeklindeki eşitliğe $Dirichlet\ formülü$ denir (Samko vd., 1993).

Tanım 2.10 (Fubini Teoremi): $f(x,y)$ fonksiyonunun $a < x < b, c < y < d$ aralıklar üzerinde ölçülebilir olmak üzere

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

dir (Samko vd., 1993).

Tanım 2.11 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q, [a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović, 1970; Mitrinović vd., 1993).

Sonuç 2.2 (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^p, [a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Power Mean Eşitsizliği benzer şekilde çift katlı integraller için

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\, dy = \left(\int_a^b |f(x,y)|\, dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x,y)|\, |g(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir (Mitrinović, 1970; Mitrinović vd., 1993).

Teorem 2.3 : $f: [a,b] \to R$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Bura da f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği bir $f: [a,b] \to R$ fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar. (Hadamard, 1893).

Teorem 2.4 (Ostrowski Eşitsizliği): $f: I \subset [0,\infty) \to R,\ I^0$ da diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f' \in [a,b]$ olacak şekilde I sınırlı olsun. Burada $a < b$ ve $a, b \in I$ dır. Eğer $|\ f'(x)| \leq M$ ise

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(u)du\right| \leq M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir (Ostrowski, 1938).

Ostrowski tipi eşitsizlikler, bir fonksiyonun değerine yaklaşmada fonksiyonun ortalama değeri yardımıyla önemli hata tahminlerinin tespit edilmesini sağlar. Ostrowski eşitsizliği, pek çok alanda uygulamalara sahip olduğundan alanyazında birçok araştırmacı bu eşitsizlik üzerine odaklanmıştır. Birinci türevleri $L_\infty[a,b]$ uzayına ait olan fonksiyonlar için elde edilen Ostrowski eşitsizliği, farklı tipte fonksiyonlar ve genelleştirilmiş çekirdekler kullanılarak da ispatlanmıştır. Örneğin, Dragomir ve Wang (1997; 1998) tarafından birinci türevleri $L_p[a,b]$ ve $L_1[a,b]$ uzaylarına ait fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizliklere yer verilmiştir. Benzer şekilde mutlak sürekli fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler, Dragomir (2015) tarafından sunulmuştur. Alanyazın incelendiğinde, iki değişkenli fonksiyonlar için Ostrowski tipli bazı eşitsizliklere rastlamak mümkündür (Sarikaya, 2010). Lakoud ve Aissaoui (2013) ile Sarikaya ve Filiz (2014) araştırmalarında da Riemann-Liouville kesirli integraller içeren Ostrowski tipli sonuçlar incelenmiştir.

Tezin ana amaçlarından birisi de Riemann-Liouville kesirli integraline karşılık gelen bazı özdeşlikler elde edilmesidir. Bu doğrultuda Gamma fonksiyonu ile Riemann-Liouville kesirli integralin tanımı gerekmektedir.

Tanım 2.12 (Gamma Fonksiyonu): Bu fonksiyon $\alpha > 0$ için,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}. e^{-x}\, dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu integral $\alpha > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun önemli özellikleri aşağıdaki gibidir (Kilbas vd., 2006).

- **i.** $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
- **ii.** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.13: ω fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Mertebesi $\alpha > 0$ olan Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri (RLKİ) $J_{a+}^{\alpha}\omega$ ve $J_{b-}^{\alpha}\omega$ sırasıyla

$$J_{a+}^{\alpha}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\, \omega(\tau)d\tau, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (\tau-x)^{\alpha-1}\, \omega(\tau)d\tau, \quad x < b,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(\alpha)$ ifadesi Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir. Yani $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{\alpha-1}du$ eşitliğini vermektedir. $J_{a+}^{\alpha}\omega$ ve $J_{b-}^{\alpha}\omega$ integralleri sırasıyla sol taraflı ve sağ taraflı RLKİ olarak adlandırılır. Aynı zamanda, $x \in (a,b)$ için $J_{a+}^{0}\omega(x) = J_{b-}^{0}\omega(x) = \omega(x)$ özdeşliğinin sağlandığı da belirtilmelidir (Gorenflo & Mainardi, 1997; Ortigueira & Tenreiro Machado, 2015; Podlubni, 1999).

Dragomir (2017a) bu tanımları kullanarak üç farklı kesirli integral özdeşliği ispatlamış ve bu özdeşlikler yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integraller içeren eşitsizlikler elde etmiştir. Bu çalışmaların temelini oluşturan özdeşlikler aşağıdaki teoremde verildiği gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.5: $\omega : [a,b] \to C$ kompleks değerli fonksiyonu, $[a,b]$ reel aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda; her $x \in (a,b)$ için

$$J_{a+}^{\alpha}\omega(x) + J_{b-}^{\alpha}\omega(x) = \frac{\omega(x)}{\Gamma(\alpha+1)}[(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}]$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}[\omega(x)-\omega(\tau)]d\tau$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (\tau-x)^{\alpha-1}[\omega(\tau)-\omega(x)]d\tau$$

ve

$$J_{x+}^{\alpha}\omega(b) + J_{x-}^{\alpha}\omega(a) = \frac{\omega(x)}{\Gamma(\alpha+1)}[(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}]$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\tau-a)^{\alpha-1}[\omega(x)-\omega(\tau)]d\tau$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (b-\tau)^{\alpha-1}[\omega(\tau)-\omega(x)]d\tau$$

özdeşlikleri sağlanır. Aynı zamanda, her $x \in [a,b]$ için

$$\frac{J_{a+}^{\alpha}\omega(b) + J_{b-}^{\alpha}\omega(a)}{2}$$
$$= \frac{\omega(x)}{\Gamma(\alpha+1)}(b-a)^{\alpha}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{(b-\tau)^{\alpha-1} + (\tau-a)^{\alpha-1}}{2}[\omega(\tau)-\omega(x)]d\tau$$

eşitliği sağlanmaktadır (Dragomir, 2017a).

Dragomir'in elde ettiği özdeşlikler mutlak sürekli fonksiyonlar yardımıyla kurulmuştur. Dragomir aynı zamanda bu özdeşlikleri kullanarak farklı fonksiyon sınırları için

Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitsizlikler ortaya çıkarmıştır (Dragomir, 2017a; Dragomir, 2017b; Dragomir, 2017c).

Bu tez çalışma kapsamında gerçekleştirilmesi planlanan özdeşlikler ise yüksek mertebeden türevleri mevcut fonksiyonlar için elde edilecektir. Yüksek mertebeden türevler kullanıldığı için Taylor formülü yardımıyla kesirli integrallerin yaklaşık değerleri incelenebilir. Yüksek mertebeden türevleri mevcut fonksiyonlar için özdeşliklerin elde edilmesinde Taylor serisi formülünden yararlanılacağı için aşağıda buna yer verilmiştir.

Tanım 2.14 (Taylor Serisi): w fonksiyonu, a noktasını içeren bir açık aralıktaki x değerleri için

$$w\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-a)^n$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{\,(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \ w\,(a) + w^{\,'}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}w^{\,''}(a)\,(x-a)^2$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}w^{\,(n)}(a)\,(x-a)^n+\ldots$$

olur. Bu ifadeye, w fonksiyonunun a noktasındaki Taylor serisi veya açılımı denir. Eğer a=0 ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

ifadesine de Mclaurin serisi veya açılımı denir (Balcı, 2012).

Fink (1992) yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçları elde etmek için Taylor formülünden yararlanmıştır. Fink' in çalışmasından ilham aldığını söyleyen Anastassiou (1995) bir fonksiyonun ve belli bir aralıktaki integralinin farkına en uygun üst sınırları yine Taylor formülü yardımıyla belirlemiştir.

Bu kısımda verilenler doğrultusunda, tezin ana bölümünde yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için kesirli integraller içeren Ostrowski tipli sonuçlar incelenecektir. Aynı zamanda, elde edilen sonuçların Nümerik integrasyon uygulamaları ve üstel fonksiyon uygulamaları verilecektir.

3. KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKI TİPLİ SONUÇLAR VE UYGULAMALARI

Bu kısım; “Yüksek Mertebeden Türevlenebilir Fonksiyonlar için Kesirli İntegral Özdeşlikleri”, “Sınırlı Fonksiyonlar için Kesirli İntegral Eşitsizlikleri”, “Nümerik İntegrasyon Uygulamaları” ve “Üstel Fonksiyonların Kesirli İntegrallerini içeren eşitsizlik Uygulamalar” olmak üzere dört alt başlık altında sunulmuştur. İlk olarak yüksek mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için kesirli integral özdeşlikleri hesaplanmıştır. İkinci olarak, yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitsizlikler bulunmuştur. Üçüncü olarak kesirli integraller için nümerik integrasyon uygulamaları ortaya konmuş ve son olarak üstel fonksiyonlar için uygulamalara yer verilmiştir.

3.1. Yüksek Mertebeden Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegral Özdeşlikleri

Bu kısımda yüksek mertebeden türevleri mutlak sürekli olan fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri için özdeşlikler elde edilmiştir. Sonraki kısımlarda verilecek olan ana sonuçların elde edilmesinde aşağıdaki özdeşlik kullanılacaktır.

Lemma 3.1: $n \in N^{+}$ olmak üzere $f\colon [a,b] \to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $n.$ inci mertebeden türevleri $a \geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Bu durumda, her $\alpha > 0$ ve $x \in (a,b)$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \\
&\quad= J_{a+}^{\alpha} f(x) + (-1)^n J_{b-}^{\alpha} f(x) \\
&\quad-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+\alpha} f^{(k)}(a) + (-1)^{n+k}(b-x)^{k+\alpha} f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&\quad-\frac{(x-a)^{n+\alpha}+(b-x)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} f^{(n)}(x)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

özdeşliği sağlanır.

İspat: Temel analiz işlemleri kullanılır ve

$$\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x)$$

özdeşliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \\
&+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \\
&=\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt - \frac{f^{(n)}(x)}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1}dt \\
&+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt - (-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha-1}dt \\
&=\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \\
&-\frac{(x-a)^{n+\alpha}+(b-x)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} f^{(n)}(x)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Eğer (3.2) ifadesinin sağ tarafındaki integrallere n kez kısmi integrasyon uygulanırsa, o zaman

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= J_{a+}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+\alpha+1)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \tag{3.4}$$
$$= (-1)^n J_{b-}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+k}(b-x)^{k+\alpha} f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

sonuçları ortaya çıkacaktır. (3.3) ve (3.4) özdeşliklerinde elde edilen sonuçlar (3.2) ifadesinde karşılık geldiği yerlere yazılırsa, (3.1) sonucu bulunur.

Lemma 3.2: $n \in N^+$ olmak üzere $f: [a,b] \to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $n.$ inci mertebeden türevleri $a \geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Bu durumda, her $\alpha > 0$ ve $x \in (a,b)$ için

$$\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x (t-a)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \tag{3.5}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (b-t)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt$$
$$= (-1)^n J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}(x-a)^{k+\alpha} + (b-x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} f^{(k)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1’ in ispatında kullanılan yöntemler aynı sırada uygulanırsa, (3.5) ifadesi elde edilir.

Lemma 3.3: $n \in N^+$ olmak üzere $f: [a,b] \to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $n.$ inci mertebeden türevleri $a \geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Bu durumda, her $\alpha > 0$ ve $x \in (a,b)$ için

$$\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^b (t-a)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \tag{3.6}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^b (b-t)^{n+\alpha-1}\left(\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right)dt$$
$$=(-1)^n J_{b-}^{\alpha} f(a)+J_{a+}^{\alpha} f(b)-\frac{2(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} f^{(n)}(x)$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k} f^{(k)}(b)+f^{(k)}(a)\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3.1' in ispatında kullanılan yöntemler aynı sırada uygulanırsa, (3.6) ifadesi elde edilir.

3.2. Sınırlı Fonksiyonlar için Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Bu kısımda, yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler sunulacak ve bu sonuçların özel durumları verilecektir. Aynı zamanda, bu özel durumlar ve literatürde verilen eşitsizlikler arasındaki bağlantılar da incelenecektir.

Teorem 3.1: $n \in N^+$ olmak üzere $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $n.$ inci mertebeden türevleri $a \geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b]$, yani

$$\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty := \sup_{t\in(a,b)}\left|f^{(n+1)}(t)\right| < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa, her $\alpha > 0$ ve $x \in (a,b)$ için

$$\left| J_{a+}^{\alpha} f(x)+(-1)^n J_{b-}^{\alpha} f(x)-\frac{(x-a)^{n+\alpha}+(b-x)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} f^{(n)}(x) \right. \tag{3.7}$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+\alpha}f^{(k)}(a)+(-1)^{n+k}(b-x)^{k+\alpha}f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\Bigg|$$
$$\leq \frac{1}{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)}\left\{(x-a)^{n+\alpha+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}+(b-x)^{n+\alpha+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\right\}$$
$$\leq \frac{1}{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)}W\left(f^{(n+1)}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada verilen $W\left(f^{(n+1)}\right)$ ifadesi

$$W\left(f^{(n+1)}\right) \tag{3.8}$$
$$=\begin{cases} \left((x-a)^{n+\alpha+1}+(b-x)^{n+\alpha+1}\right)\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty} \\ \left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}^{p}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left((x-a)^{(n+\alpha+1)q}+(b-x)^{(n+\alpha+1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ p,q>1 \text{ ve } \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \\ \left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\right)\left[\dfrac{1}{2}(b-a)+\left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\right]^{n+\alpha+1} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat: (3.1) ifadesinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra $f^{(n+1)}\in L_{\infty}[a,b]$ kabulü dikkate alınırsa

$$\Bigg|J_{a+}^{\alpha}f(x)+(-1)^{n}J_{b-}^{\alpha}f(x)-\frac{(x-a)^{n+\alpha}+(b-x)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}f^{(n)}(x)$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+\alpha}f^{(k)}(a)+(-1)^{n+k}(b-x)^{k+\alpha}f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\Bigg|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n+\alpha-1}\left|\int_{x}^{t}f^{(n+1)}(s)ds\right|dt$$
$$+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{n+\alpha-1}\left|\int_{x}^{t}f^{(n+1)}(s)ds\right|dt$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n+\alpha}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[t,x],\infty}dt$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,t],\infty}dt \\
&=:\quad N(x)
\end{aligned}
$$

sonucu ortaya çıkar. Burada verilen ifadeler için $\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[t,x],\infty} \leq \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}$ $\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,t],\infty} \leq \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
N(x) &\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\left\{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}\int_a^x (x-t)^{n+\alpha}dt + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\int_x^b (t-x)^{n+\alpha}\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\left\{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}\frac{(x-a)^{n+\alpha+1}}{n+\alpha+1} + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\frac{(b-x)^{n+\alpha+1}}{n+\alpha+1}\right\}
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Böylece ilk eşitsizlik elde edilmiş olur. İkinci eşitsizliği elde etmek için $c, d, e, f \geq 0$ pozitif sayıları için geçerli olan Hölder tipindeki

$$
cd + ef \leq \begin{cases} \max\{c,e\}\,(d+f) \\ (c^p + e^p)^{\frac{1}{p}} + (d^q + f^q)^{\frac{1}{q}} \quad \text{for} \quad p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases} \tag{3.9}
$$

eşitsizliği kullanılacaktır. Bu bağlamda

$$
\begin{aligned}
&(x-a)^{n+\alpha+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty} + (b-x)^{n+\alpha+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty} \\
&\leq \begin{cases} \max\left\{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}, \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\right\}\left((x-a)^{n+\alpha+1} + (b-x)^{n+\alpha+1}\right) \\ \left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}^p + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left((x-a)^{(n+\alpha+1)q} + (b-x)^{(n+\alpha+1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty} + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\right)\max\left\{(x-a)^{n+\alpha+1}, (b-x)^{n+\alpha+1}\right\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1: Eğer (3.7) eşitsizliklerinde $n = 0$ durumu ele alınırsa, toplam sembolü yok olacağından ve kalan ifadelerde $n = 0$ yazılacağından

$$\left|J_{a+}^{\alpha}f(x)+J_{b-}^{\alpha}f(x)-\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\right|$$
$$\leq\frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\left\{(x-a)^{\alpha+1}\left\|f'\right\|_{[a,x],\infty}+(b-x)^{\alpha+1}\left\|f'\right\|_{[x,b],\infty}\right\}$$
$$\leq\frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}W(f')$$

sonucuna ulaşılır ki bu sonuç Dragomir (2017b) tarafından daha önce verilmiştir. Burada $W(f')$ ifadesi

$$W(f') \tag{3.10}$$
$$=\begin{cases}\left((x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}\right)\left\|f'\right\|_{[a,b],\infty}\\ \left(\left\|f'\right\|_{[a,x],\infty}^{p}+\left\|f'\right\|_{[x,b],\infty}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left((x-a)^{(\alpha+1)q}+(b-x)^{(\alpha+1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ p,q>1 \text{ ve } \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\\ \left(\left\|f'\right\|_{[a,x],\infty}+\left\|f'\right\|_{[x,b],\infty}\right)\left[\dfrac{1}{2}(b-a)+\left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\right]^{\alpha+1}.\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Sonuç 3.2: Teorem 3.1' in koşulları altında $x=\frac{a+b}{2}$ seçilerek işlem yapılırsa, o zaman

$$\left|J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(-1)^{n}J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[f^{(k)}(a)+(-1)^{n+k}f^{(k)}(b)\right]}{2^{k+\alpha}\Gamma(k+\alpha+1)}\right.$$
$$\left.-\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{2^{n+\alpha-1}\Gamma(n+\alpha+1)}f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)}\left\{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\right\}$$
$$\leq\frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}$$

özel durumuna ulaşılır. Bu özel durum yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için orta nokta tarzında kesirli integral eşitsizlikleridir.

Teorem 3.2: $n \in N^+$ olmak üzere $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in n. inci mertebeden türevleri $a \geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b]$, yani

$$\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty := \sup_{t\in(a,b)} \left|f^{(n+1)}(t)\right| < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa, her $\alpha > 0$ ve $x \in (a,b)$ için

$$\left|(-1)^n J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}(x-a)^{k+\alpha} + (b-x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} f^{(k)}(x)\right| \quad (3.11)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+2)}\left\{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}(x-a)^{n+\alpha+1} + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}(b-x)^{n+\alpha+1}\right\}$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+2)} W\left(f^{(n+1)}\right)$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada verilen $W\left(f^{(n+1)}\right)$ ifadesi (3.8) de verildiği gibidir.

İspat: (3.5) ifadesinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra $f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b]$ kabulü dikkate alınırsa

$$\left|(-1)^n J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}(x-a)^{k+\alpha} + (b-x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} f^{(k)}(x)\right| \quad (3.12)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^x (t-a)^{n+\alpha-1} \left|\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right| dt$$
$$+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_x^b (b-t)^{n+\alpha-1} \left|\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right| dt$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \left\{\int_a^x (t-a)^{n+\alpha-1}(x-t)\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[t,x],\infty} dt\right.$$

$$+\int_x^b (b-t)^{n+\alpha-1}(t-x)\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,t],\infty} dt\Bigg\}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\Bigg\{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}\int_a^x (t-a)^{n+\alpha-1}(x-t)dt$$

$$+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\int_x^b (b-t)^{n+\alpha-1}(t-x)dt\Bigg\}$$

ifadesine ulaşılır. Şimdi yukarıdaki sonucun sağ tarafındaki integraller hesaplanmalıdır. Bu integrallerden birincisinin hesaplanması için $t=(1-u)a+ux$ değişken dönüşümünden faydalanılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^x (t-a)^{n+\alpha-1}(x-t)dt &= (x-a)^{n+\alpha+1}\int_0^1 u^{n+\alpha-1}(1-u)du \\ &= (x-a)^{n+\alpha+1}B(n+\alpha,2) \\ &= \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}(x-a)^{n+\alpha+1}\end{aligned} \tag{3.13}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $B(\,\cdot\,,\cdot\,)$ ifadesi literatürde bilinen Beta fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Benzer şekilde ikinci integral için $t=(1-u)x+ub$ değişken dönüşümü kullanılırsa

$$\int_x^b (b-t)^{n+\alpha-1}(t-x)dt = \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}(b-x)^{n+\alpha+1} \tag{3.14}$$

sonucu ortaya çıkar. (3.13) ve (3.14) özdeşlikleri (3.12) de karşılık geldiği yerlere yazıldıktan sonra elde edilen sonucun sağ tarafına pozitif sayılar için geçerli olan Hölder tipli (3.9) eşitsizliği uygulanırsa (3.11) eşitsizliklerine ulaşılır.

Sonuç 3.3: Eğer (3.11) eşitsizliklerinde n yerine 0 yazılarak işlem yapılırsa, o zaman

$$
\begin{aligned}
&\left| J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b) - \frac{(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \left\{ \|f'\|_{[a,x],\infty} (x-a)^{\alpha+1} + \|f'\|_{[x,b],\infty} (b-x)^{\alpha+1} \right\} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} W(f')
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır ki bu sonuç Dragomir (2017b) tarafından daha önce sunulmuştur. Burada $W(f')$ gösterimi (3.10) ifadesinde tanımlandığı gibi verilmektedir.

Sonuç 3.4: Teorem 3.2' in koşulları altında $x = \frac{a+b}{2}$ seçilerek işlem yapılırsa, o zaman

$$
\begin{aligned}
&\left| (-1)^n J_{\frac{a+b}{2}-}^{\alpha} f(a) + J_{\frac{a+b}{2}+}^{\alpha} f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}+1\right]}{2^{k+\alpha}\Gamma(k+\alpha+1)} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha+2)} \left\{ \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+2)} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}
\end{aligned}
$$

özel durumu sağlanır. Bu özel durum yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için orta nokta tarzında kesirli integral eşitsizlikleridir.

Teorem 3.3: $n \in N^{+}$ olmak üzere $f: [a,b] \to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $n.$ inci mertebeden türevleri $a \geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n+1)} \in L_{\infty}[a,b]$, yani

$$
\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty} := \sup_{t\in(a,b)} \left|f^{(n+1)}(t)\right| < \infty
$$

koşulu sağlanıyorsa, her $\alpha > 0$ ve $x \in (a,b)$ için

$$
\left| (-1)^n J_{b-}^{\alpha} f(a) + J_{a+}^{\alpha} f(b) - \frac{2(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} f^{(n)}(x) \right. \tag{3.15}
$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}f^{(k)}(b)+f^{(k)}(a)\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)}\Bigg|$$
$$\leq\frac{(b-x)^{n+\alpha+1}+(x-a)^{n+\alpha+1}-(b-a)^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha+2)}\left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\right)$$
$$+\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left((x-a)\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}+(b-x)\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}\right)$$
$$\leq\left\{2\frac{(b-x)^{n+\alpha+1}+(x-a)^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha+2)}+\frac{n+\alpha-1}{\Gamma(n+\alpha+2)}(b-a)^{n+\alpha+1}\right\}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}$$

eşitsizlikleri bulunur.

İspat: (3.6) ifadesinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra integraller için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\Bigg|(-1)^n J_{b-}^{\alpha}f(a)+J_{a+}^{\alpha}f(b)-\frac{2(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}f^{(n)}(x) \tag{3.16}$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}f^{(k)}(b)+f^{(k)}(a)\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)}\Bigg|$$
$$\leq\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^b(t-a)^{n+\alpha-1}\left|\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right|dt$$
$$+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^b(b-t)^{n+\alpha-1}\left|\int_x^t f^{(n+1)}(s)ds\right|dt$$
$$\leq\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty}}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^x\left[(t-a)^{n+\alpha-1}+(b-t)^{n+\alpha-1}\right](x-t)dt$$
$$+\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty}}{\Gamma(n+\alpha)}\int_x^b\left[(t-a)^{n+\alpha-1}+(b-t)^{n+\alpha-1}\right](t-x)dt$$

ifadesi sağlanır. (3.16) ifadesinin sağındaki integraller

$$\int_a^x\left[(t-a)^{n+\alpha-1}+(b-t)^{n+\alpha-1}\right](x-t)dt \tag{3.17}$$

$$= \frac{(x-a)^{n+\alpha+1}}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} + \int_a^x (b-t)^{n+\alpha}\,dt - (b-x)\int_a^x (b-t)^{n+\alpha-1}\,dt$$
$$= \frac{(b-x)^{n+\alpha+1} + (x-a)^{n+\alpha+1} - (b-a)^{n+\alpha+1}}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} + (x-a)\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{n+\alpha},$$

ve

$$\int_x^b [(t-a)^{n+\alpha-1} + (b-t)^{n+\alpha-1}]\,(t-x)dt \tag{3.18}$$
$$= \int_x^b (t-a)^{n+\alpha-1}\,(t-x)dt + \frac{(b-x)^{n+\alpha+1}}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}$$
$$= \frac{(b-x)^{n+\alpha+1} + (x-a)^{n+\alpha+1} - (b-a)^{n+\alpha+1}}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} + (b-x)\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{n+\alpha}$$

şeklinde hesaplanabilir. (3.17) ve (3.18) ifadelerinde bulunan sonuçlar (3.16) ifadesinde karşılık geldiği yerlere yazılırsa, (3.15) ifadesindeki ilk eşitsizlik elde edilir. Daha sonra, $\|f^{(n+1)}\|_{[a,x],\infty}$, $\|f^{(n+1)}\|_{[x,b],\infty} \le \|f^{(n+1)}\|_{[a,b],\infty}$ matematiksel gerçeği kullanılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5: Eğer (3.15) eşitsizliklerinde $n = 0$ durumu ele alınırsa, toplam sembolü yok olacağından ve kalan ifadelerde $n = 0$ yazılacağından

$$\left| J_{b-}^{\alpha} f(a) + J_{a+}^{\alpha} f(b) - \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right|$$
$$\le \frac{(b-x)^{\alpha+1} + (x-a)^{\alpha+1} - (b-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\|f'\|_{[a,x],\infty} + \|f'\|_{[x,b],\infty} \right)$$
$$+ \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left((x-a)\|f'\|_{[a,x],\infty} + (b-x)\|f'\|_{[x,b],\infty} \right)$$
$$\le \left\{ 2\frac{(b-x)^{\alpha+1} + (x-a)^{\alpha+1} -}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha+2)}(b-a)^{\alpha+1} \right\} \|f'\|_{[a,b],\infty}$$

sonucuna ulaşılır ki bu sonuç Dragomir (2017b) tarafından daha önce sağlanmıştır.

Sonuç 3.6: Teorem 3.3' ün koşulları altında $x = \frac{a+b}{2}$ seçilerek işlem yapılırsa, o zaman

$$\left| (-1)^n J_{b-}^{\alpha} f(a) + J_{a+}^{\alpha} f(b) - \frac{2(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right. \tag{3.19}$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k} f^{(k)}(b) + f^{(k)}(a)\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)} \right|$$

$$\leq \frac{(n+\alpha-1)2^{n+\alpha-1}+1}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+2)} (b-a)^{n+\alpha+1} \left(\left\| f^{(n+1)} \right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} + \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \right)$$

$$\leq \frac{(n+\alpha-1)2^{n+\alpha-1}+1}{2^{n+\alpha-1}\Gamma(n+\alpha+2)} (b-a)^{n+\alpha+1} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{[a,b],\infty}$$

ifadesi ortaya çıkar. Bu özel durum yüksek mertebeden kısmi türevleri sınırlı olan fonksiyonlar için orta nokta tarzında kesirli integral eşitsizlikleridir.

3.3. İntegral Eşitsizliklerinin Nümerik İntegrasyon Uygulamaları

Bu kısımda, yüksek mertebeden türevleri sınırlı olan fonksiyonları taban alan eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan hata tahminlerinden bahsedilecektir. Diğer bir ifadeyle, yüksek mertebeden türevleri $L_\infty[a,b]$ uzayına ait fonksiyonlar kullanılarak elde edilen kesirli integral eşitsizlikleri için kuadratik formül tahminlerine yeni yaklaşımlar geliştirilecektir. İlk olarak, kuadratik formüller içeren eşitsizlikleri daha kolay ifade etmek için bazı tanım ve notasyonlar verilecektir.

$I_m \; : \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ ifadesi, $0 < a < b$ şartını sağlayan $[a,b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. Aynı zamanda, burada ortaya çıkan alt aralıklar için $i = 0, \; \ldots, m-1$ olmak üzere $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ve $h_i = x_{i+1} - x_i$ olsun. Bu kabullerden yola çıkarak yazılabilen

$$Q_{n,1}(f,\xi,I_m) \tag{3.20}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\xi_i - x_i)^{k+\alpha} f^{(k)}(x_i) + (-1)^{n+k}(x_{i+1} - \xi_i)^{k+\alpha} f^{(k)}(x_{i+1})}{\Gamma(k+\alpha+1)}$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\xi_i-x_i)^{n+\alpha}+(x_{i+1}-\xi_i)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}f^{(n)}(\xi_i),$$

$$Q_{n,2}(f,\xi,I_m) \tag{3.21}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{n+k}(\xi_i-x_i)^{k+\alpha}+(x_{i+1}-\xi_i)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}f^{(k)}(\xi_i)$$

ve

$$Q_{n,3}(f,I_m) \tag{3.22}$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{2(h_i)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}f^{(n)}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(h_i)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}f^{(k)}(x_{i+1})+f^{(k)}(x_i)\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)}$$

notasyonları aşağıdaki teorem ve sonuçların ifadesinde kolaylık sağlayacaktır.

Teorem 3.4. $n\in N^+$ olmak üzere $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu $n+1$ kez diferansiyellenebilir olsun öyle ki f in $n.$ inci mertebeden türevleri $a\geq 0$ olmak şartıyla $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(n+1)}\in L_\infty[a,b]$, yani

$$\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \ :=\sup_{t\in(a,b)}\left|f^{(n+1)}(t)\right|<\infty$$

koşulu sağlanıyorsa, her $\alpha>0$ için

$$J_{a+}^{\alpha}f(x)+(-1)^nJ_{b-}^{\alpha}f(x)=Q_{n,1}(f,\xi,I_m)+R_{n,1}(f,\xi,I_m)$$

gösterimi verilir. Burada $Q_{n,1}(f,\xi,I_m)$ ifadesi (3.20) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve $i=0,\dots,m-1$ değerleri için $h_i=x_{i+1}-x_i$ olmak üzere $R_{n,1}(f,\xi,I_m)$ kalan terimi

$$
\begin{aligned}
&\left|R_{n,1}(f,\xi,I_m)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \\
&\times \sum_{i=0}^{m-1}\left\{(\xi_i-x_i)^{n+\alpha+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x_i,\xi_i],\infty}+(x_{i+1}-\xi_i)^{n+\alpha+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[\xi_i,x_{i+1}],\infty}\right\} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)}W\left(f^{(n+1)},\xi,I_m\right),
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

tahminini sağlar. Burada $W\left(f^{(n+1)},\xi,I_m\right)$ ifadesi

$$
\begin{aligned}
&W\left(f^{(n+1)},\xi,I_m\right) \\
&=\begin{cases}
\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\left((\xi_i-x_i)^{n+\alpha+1}+(x_{i+1}-\xi_i)^{n+\alpha+1}\right) \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x_i,\xi_i],\infty}^{p}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[\xi_i,x_{i+1}],\infty}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left((\xi_i-x_i)^{(n+\alpha+1)q}+(x_{i+1}-\xi_i)^{(n+\alpha+1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
p,q>1 \text{ ve } \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x_i,\xi_i],\infty}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[\xi_i,x_{i+1}],\infty}\right)\left[\frac{1}{2}(h_i)+\left|\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right|\right]^{n+\alpha+1}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. (3.7) ifadesinde verilen eşitsizlikler $i=0,1,\ldots,m-1$ olmak üzere $[x_i,x_{i+1}]$ aralığı üzerinde tekrar ele alınır ve elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa (3.23) tahminleri bulunur.

Sonuç 3.7. Eğer teorem 3.4' ün aynı şartları altında $\xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ durumu göz önünde bulundurularak hesaplamalar yapılırsa,

$$
J_{a+}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(-1)^n J_{b-}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)=Q_{n,1}(f,I_m)+R_{n,1}(f,I_m)
$$

gösterimi yazılabilir. Burada $R_{n,1}(f,I_m)$ kalan terimi

$$\begin{aligned}
&\left|R_{n,1}(f,I_m)\right| \\
&\leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{2^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{i=0}^{m-1} (h_i)^{n+\alpha+1} \\
&\leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{i=0}^{m-1} (h_i)^{n+\alpha+1}
\end{aligned}$$

tahminlerini sağlamaktadır.

Teorem 3.5. Teorem 3.2' de verilen bütün şartlar sağlandığı durum göz önüne alınarak

$$(-1)^n J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b) = Q_{n,2}(f,\xi,I_m) + R_{n,2}(f,\xi,I_m)$$

gösterimi verilsin. Burada $Q_{n,2}(f,\xi,I_m)$ ifadesi (3.21) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve $i=0,\ldots,m-1$ değerleri için $h_i = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere $R_{n,2}(f,\xi,I_m)$ kalan terimi

$$\begin{aligned}
&\left|R_{n,2}(f,\xi,I_m)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+2)} \\
&\times \sum_{i=0}^{m-1} \left\{(\xi_i - x_i)^{n+\alpha+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x_i,\xi_i],\infty} + (x_{i+1} - \xi_i)^{n+\alpha+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[\xi_i,x_{i+1}],\infty}\right\} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+2)} W\left(f^{(n+1)},\xi,I_m\right),
\end{aligned}$$

tahminlerini sağlamaktadır. Burada $W\left(f^{(n+1)},\xi,I_m\right)$ ifadesi (3.24) de verildiği gibidir.

İspat. Teorem 3.4' ün ispatında kullanılan yöntemler sırası bozulmaksızın aynı şeklide uygulanırsa istenilen sonuca ulaşılacaktır.

Sonuç 3.8. Eğer teorem 3.5' in aynı şartları altında $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ durumu göz önünde bulundurularak hesaplamalar yapılırsa,

$$(-1)^n J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-} f(a) + J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+} f(b) = Q_{n,2}(f, I_m) + R_{n,2}(f, I_m)$$

gösterimi yazılabilir. Burada $R_{n,1}(f, I_m)$ kalan terimi için

$$\begin{aligned}
&\left|R_{n,1}(f, I_m)\right| \\
&\leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} + \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{2^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha+2)} \sum_{i=0}^{m-1} (h_i)^{n+\alpha+1} \\
&\leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+2)} \sum_{i=0}^{m-1} (h_i)^{n+\alpha+1}
\end{aligned}$$

tahminlerini geçerli olacaktır.

Son olarak, (3.19) eşitsizliği kullanılarak alt aralıklarda elde edilen eşitsizliklerin birleşiminden oluşan kalan terim tahminleri verilecektir.

Sonuç 3.9. Eğer (3.19) ifadesinde verilen eşitsizlikler dikkate alınarak alt aralıklarda işlem yapılırsa, kalan terime tahminler elde etmek için ilk olarak

$$(-1)^n J^{\alpha}_{b-} f(a) + J^{\alpha}_{a+} f(b) = Q_{n,3}(f, I_m) + R_{n,3}(f, I_m)$$

gösterimi yazılabilir. Burada $Q_{n,3}(f, I_m)$ ifadesi (3.22) de tanımlandığı gibidir ve $i = 0, \dots, m-1$ değerleri için $h_i = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere $R_{n,3}(f, I_m)$ kalan terimi

$$\left|R_{n,3}(f, I_m)\right|$$
$$\leq \frac{(n+\alpha-1)2^{n+\alpha-1}+1}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+2)}\left(\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}+\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\right)\sum_{i=0}^{m-1}(h_i)^{n+\alpha+1}$$
$$\leq \frac{(n+\alpha-1)2^{n+\alpha-1}+1}{2^{n+\alpha-1}\Gamma(n+\alpha+2)}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty}\sum_{i=0}^{m-1}(h_i)^{n+\alpha+1}$$

tahminlerini sağlar.

3.4. Üstel Fonksiyonların Kesirli İntegrallerini İçeren Eşitsizlik Uygulamaları

Bu kısımda, bölüm 3.2 de verilen eşitsizliklerde özel olarak üstel fonksiyonlar dikkate alındığında nasıl eşitsizlikler ortaya çıkacağı incelenecektir. Burada, eşitsizliklerde yer alan kesirli integrallerin hesaplanmasında ortaya çıkan iki değişken için Gamma fonksiyonu da verilmelidir. $x, y \in C$ ve $Re(x), Re(y) > 0$ ise, o zaman iki değişken için Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x,y) = \int_0^\infty t^{x-1}.ye^{-t^y}\,dt$$

integrali ile tanımlanır (Islam vd., 2020). Bu fonksiyonun tek değişkenli Gamma fonksiyonu ile bağlantısını açıklamak için $\Gamma(x,y) = \Gamma\left(\frac{x}{y}\right)$ özelliğinin verilmesinde fayda vardır. Aynı zamanda, eşitsizliklerin daha anlaşılır ve okunabilir olması için bu alt bölüm boyunca kullanılacak olan $A_k(x)$, $B_k(x)$ ve $C_n(x)$ notasyonları

$$A_k(x) = \frac{(x-a)^{k+\alpha}e^a + (-1)^{n+k}(b-x)^{k+\alpha}e^b}{\Gamma(k+\alpha+1)}, \tag{3.25}$$

$$B_k(x) = \frac{(-1)^{n+k}(x-a)^{k+\alpha} + (b-x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} \tag{3.26}$$

ve

$$C_n(x) = \frac{(x-a)^{n+\alpha} + (b-x)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} \tag{3.27}$$

şeklinde verilmiştir.

Aynı zamanda, $t \in R$ olmak üzere $f(t) = e^t$ üstel fonksiyonu ele alındığında $a \leq x \leq b$ değerleri için

$$\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,x],\infty} = e^x \ , \ \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[x,b],\infty} = e^b \text{ ve } \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b],\infty} = e^b \tag{3.28}$$

sonuçları bulunur.

Bu durumda, (3.7) eşitsizliğinde özel olarak $f(t) = e^t$ üstel fonksiyonu seçilirse, (3.28) de verilen özdeşlikler yardımıyla her $x \in (a,b)$ ve $\alpha > 0$ değerleri için

$$\begin{aligned} &\left|[1+(-1)^{n-\alpha}]e^x - \frac{e^x}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha, x-a) + \Gamma(\alpha, x-b)] \right. \\ &\left. - C_n(x)e^x - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)}\left\{(x-a)^{n+\alpha+1}e^x + (b-x)^{n+\alpha+1}e^b\right\} \\ &\leq \frac{1}{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)} W(e) \end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada, $W(e)$ ifadesi

$$W(e) = \begin{cases} \left((x-a)^{n+\alpha+1} + (b-x)^{n+\alpha+1}\right)e^b \\ \left(e^{xp} + e^{bp}\right)^{\frac{1}{p}}\left((x-a)^{(n+\alpha+1)q} + (b-x)^{(n+\alpha+1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ \text{with } p, q > 1 \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \left(e^x + e^b\right)\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]^{n+\alpha+1} \end{cases} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanırken, $A_k(x)$ ve $C_n(x)$ ifadeleri de sırasıyla (3.25) ve (3.27)' de verildiği gibi tanımlanmıştır. Ayrıca, eşitsizliklerde kullanılan $\Gamma(\cdot\,,\cdot)$ ifadesi iki değişkenli Gamma fonksiyonudur. Özel olarak, (3.29) ifadesinde $x=\frac{a+b}{2}$ durumu ele alınırsa

$$\begin{aligned}&\Bigg|[1+(-1)^{n-\alpha}]e^{\frac{a+b}{2}}-\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left(\alpha,\frac{b-a}{2}\right)+\Gamma\left(\alpha,\frac{a-b}{2}\right)\right]\\&-\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{2^{n+\alpha-1}\Gamma(n+\alpha+1)}e^{\frac{a+b}{2}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[e^a+(-1)^{n+k}e^b\right]}{2^{k+\alpha}\Gamma(k+\alpha+1)}\Bigg|\\&\le\frac{(b-a)^{n+\alpha+1}\left(e^{\frac{a+b}{2}}+e^b\right)}{2^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)}\\&\le\frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha)(n+\alpha+1)}e^b\end{aligned}$$

sonuçları ortaya çıkacaktır. Burada, üstel fonksiyonlar için orta nokta tarzında bir eşitsizlik elde edilmiştir.

Bunlara ek olarak, (3.11) eşitsizliklerinde özel olarak $f(t)=e^t$ üstel fonksiyonu seçilirse, (3.28) de verilen özdeşlikler yardımıyla her $x\in(a,b)$ ve $\alpha>0$ değerleri için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(-1)^{n-\alpha}e^a}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha,a-x)]+\frac{e^b}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha,b-x)]-\sum_{k=0}^{n}e^xB_k(x)\right| \quad (3.31)\\&\le\frac{e^x(x-a)^{n+\alpha+1}+e^b(b-x)^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha+2)}\\&\le\frac{1}{\Gamma(n+\alpha+2)}W(e)\end{aligned}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Burada, $W(e)$ ve $B_k(x)$ ifadeleri sırasıyla (3.30) ve (3.26)' da tanımlandığı gibi verilmiştir. Ayrıca, eşitsizliklerde kullanılan $\Gamma(\cdot\,,\cdot)$ ifadesi iki değişkenli Gamma fonksiyonudur. Özel olarak, (3.31) eşitsizliklerinde x olan yerlere $\frac{a+b}{2}$ yazılarak yeniden hesaplanırsa

$$\left|\frac{(-1)^{n-\alpha}e^{a}}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha)+\Gamma\left(\alpha,\frac{a-b}{2}\right)\right]+\frac{e^{b}}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha)+\Gamma\left(\alpha,\frac{b-a}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}e^{b}+e^{a}\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)}-\frac{2(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}e^{\frac{a+b}{2}}\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha+1}\Gamma(n+\alpha+2)}\left\{e^{\frac{a+b}{2}}+e^{b}\right\}$$
$$\leq\frac{(b-a)^{n+\alpha+1}}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+2)}e^{b}$$

ifadesi bulunur. Böylece, üstel fonksiyonlar için kesirli integraller içeren orta nokta tarzında eşitsizlikler ortaya çıkmaktadır.

Son olarak, (3.15) ifadesinde özel olarak $f(t)=e^{t}$ üstel fonksiyonu seçilirse, (3.28) de verilen özdeşlikler yardımıyla her $x\in(a,b)$ ve $\alpha>0$ değerleri için

$$\left|\frac{(-1)^{n-\alpha}e^{a}}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha,a-b)]+\frac{e^{b}}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha,b-a)]\right. \tag{3.32}$$
$$\left.-\frac{2(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}e^{x}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}e^{b}+e^{a}\right]}{\Gamma(k+\alpha+1)}\right|$$
$$\leq\frac{(b-x)^{n+\alpha+1}+(x-a)^{n+\alpha+1}-(b-a)^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha+2)}\left(e^{x}+e^{b}\right)$$
$$+\frac{(b-a)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left((x-a)e^{x}+(b-x)e^{b}\right)$$
$$\leq\left\{2\frac{(b-x)^{n+\alpha+1}+(x-a)^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha+2)}+\frac{n+\alpha-1}{\Gamma(n+\alpha+2)}(b-a)^{n+\alpha+1}\right\}e^{b}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\Gamma(\cdot\,,\cdot)$ ifadesi iki değişkenli Gamma fonksiyonunu göstermektedir. Eğer (3.32) ifadesinde $x=\frac{a+b}{2}$ durumu dikkate alınarak hesaplamalar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(-1)^{n-\alpha}e^{a}}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha,a-b)]+\frac{e^{b}}{\Gamma(\alpha)}[\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha,b-a)]\right.\\
&\left.-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^{k+\alpha}\left[(-1)^{n+k}+1\right]}{2^{k+\alpha}\Gamma(k+\alpha+1)}e^{\frac{a+b}{2}}\right|\\
&\leq\frac{(n+\alpha-1)2^{n+\alpha-1}+1}{2^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+2)}(b-a)^{n+\alpha+1}\left\{e^{\frac{a+b}{2}}+e^{b}\right\}\\
&\leq\frac{(n+\alpha-1)2^{n+\alpha-1}+1}{2^{n+\alpha-1}\Gamma(n+\alpha+2)}(b-a)^{n+\alpha+1}e^{b}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması, yüksek mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için kesirli integral özdeşlikleri ile sınırlı fonksiyonlar için integral eşitsizliklerinin elde edilmesini ve nümerik integrasyon uygulamalarını hata tahminleriyle birlikte incelemeyi amaçlamaktadır. Literatür incelendiğinde, Riemann-Liouville kesirli integraline karşılık yüksek mertebeli klasik türev ve integrallerden oluşan bir özdeşlik-eşitsizlik üretildiği ve bu eşitsizlikle ilgili nümerik integrasyon uygulamalarının incelendiği araştırmaya rastlanamamıştır. Bu tez çalışmasında sunulacak kesirli integral eşitsizlikleri matematiksel problemlerde yaklaşık değerler vermeyi hedeflerken kesirli integrallerin nümerik yaklaşımları da hata tahmini gerektiren birçok matematiksel problemin çözümüne alternatif yollar sunmayı hedeflemektedir. Bu kapsamda elde edilen özdeşlikler ile eşitsizlikler literatüre yenilik getirecektir. Ayrıca bu tez çalışması kapsamında elde edilen eşitsizliklerin bazı uygulamaları verilerek sonuçların kullanılabilirliği gösterilmiştir.

Tez çalışmasında elde edilen eşitsizlikler farklı fonksiyon çeşitleri ele alınarak yeni eşitsizlikler ortaya çıkarılabilir. Aynı zamanda, farklı çekirdek modelleri için de daha genel ve yeni sonuçlar elde edilebilir. Bulanabilecek yeni sonuçlar için iki farklı uygulama yöntemi bu çalışmada sunulurken, seçilen fonksiyon tarzına göre yeni uygulamalar eklemek mümkün olabilir. Bu bağlamda, tez çalışmasının Riemann-Liouville kesirli türevlerini içeren yeni sonuçlar yapılabilecek birçok çalışma için araştırmacılara yol gösterici olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Abel N. H. (1823). Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définites, *Oeuvres Complètes, 1,* 16-18.

Aglić Aljinović, A. (2014). Montgomery identity and Ostrowski type inequalities for Riemann-Liouville fractional integral. *Journal of Mathematics, Article ID 503195*, 1-6.

Anastassiou, G. (1995). Ostrowski type inequalities. *Proc. of the American Math. Soc*., *123* (12), 375-378.

Ata, A. (2017). *Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Nevşehir.

Balcı, M. (2012). *Matematik analiz 2* (10. Baskı). İstanbul:Sürat Üniversite Yayınları.

Barnett, N. S. & Dragomir, S. S. (2001). An Ostrowski type inequality for double integrals and applications for cubature formulae, *Soochow J. Math., 27(*1), 1-10.

Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel analiz,* ISBN 975-442-035-1.

Cerone, P., Dragomir, S.S., & Roumeliotis, J. (1999). Some Ostrowski type inequalities for n-time differentiable mappings and applications. *Demonstratio Math., 32*(4), 697- 712.

Changjian, Z., & Cheung, W.S. (2010). On Ostrowski-type inequalities for heigher-order partial derivatives. *Journal of Ineqaulities and Applications*, *Article ID 960672,* 1-8.

dos Santos, M. A. F. (2018). Non-gaussian distributions to random walk in the context of memory kernels. *Fractal and Fractional*, *2*(3), 1-15.

Dragomir, S. S. (2015). Some perturbed Ostrowski type inequalities for absolutely continuous functions (I). *Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics 23*, 71-86.

Dragomir, S. S. (2017a). Ostrowski type inequalities for generalized Riemann Liouville fractional integrals of bounded variation. Hölder and Lipschitzian functions. *RGMIA Research Report Collection, 20*(48), 1-14.

Dragomir, S. S. (2017b). Ostrowski type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions in terms of ∞-norm. *RGMIA Research Report Collection, 20*(49), 1-14.

Dragomir, S. S. (2017c). Ostrowski type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions in terms of p-norms. *RGMIA Research Report Collection, 20*(50), 1-14.

Dragomir, S. S. (2017d). Ostrowski and trapezoid type inequalities for Riemann--Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions with bounded derivatives. *RGMIA Res. Rep. Coll., 20, Art 53,* 1-12.

Dragomir, S. S., Barmett, N. S., & Cerone, P. (2003). An Ostrowski type inequality for double integrals in terms of Lp-norms and applications in numerical integration. *Anal. Num. Theor. Approx., 32*(2), 161-169.

Dragomir, S. S. (2020). Ostrowski and trapezoid type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions with bounded derivatives. *Fractional Differential Calculus, 10*(2), 307-320.

Dragomir, S. S. & Wang, A. (1998). A new inequality of Ostrowski's type in -norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules. *Indian Journal of Mathematics, 40*(3), 299-304.

Dragomir, S. S. & Wang, S. (1997). A new inequality of Ostrowski's type in -norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules. *Tamkang J. of Math., 28*(3), 239-244.

Erden, S., & Başkır, B. M. (2021). Improved results of perturbed inequalities for higher-order differentiable functions and their various applications. *Filomat*, *35*(10), 3475-3490.

Erden, S., Budak, H., Sarikaya, M. Z., Iftikhar, S., & Kumam, P. (2020). Fractional Ostrowski type inequalities for bounded functions. *Journal of Inequalities and Applications, 123,* 1-11.

Erden, S., Budak, H., & Sarikaya, M. Z. (2020). Fractional Ostrowski type inequalities for functions of bounded variaton with two variables. *Miskolc Mathematical Notes, 21*(1), 171-188.

Erden, S., Gökkurt-Özdemir, B., Kılıçer, S., & Demir, C. (2024) Ostrowski type inequalities including Riemann-Liouville fractional integrals for two variable functions. *Konuralp Journal of Mathematics* (basımda).

Erden, S., Sarikaya, M. Z., & Budak, H. (2018). New weighted inequalities for higher order derivatives and applications. *Filomat*, *32*(12), 4419-4433.

Farid, G. (2017). Some new Ostrowski type inequalities via fractional integrals. *International Journal of Analysis and Applications, 14*(1), 64-68.

Fejer, L. (1906). Uber die Fourierreihen, II. (In Hungarian). Math. Naturwiss. Anz Ungar. *Akad. Wiss., 24,* 369-390.

Fernandez, A. (2018). An elliptic regularity theorem for fractional partial differential operators. *Computational and Applied Mathematics, 37*(4), 5542–5553.

Fink, M. A. (1992). Bounds on the deviation of a function from its averages, *Czechoslovak Mathematical Journal*, *42*(117), 289-310.

Gordon, R. A. (2002). *Real analysis: A first course* (2nd Edition). Boston, USA: Pearson Education Inc..

Gorenflo R. & Mainardi, F. (1997). Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (pp. 223-276). Springer Vienna,

Grünwald, A. K. (1867). Ueber, begrenzte, derivationen und deren anwendung. *Z. Math. Phys, 12,* 441-480.

Hadamard, J. (1893). Etude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, Journal de mathématiques pures et applliquées, 9*, 171-215.

Hanna, G., Dragomir, S. S., & Cerone, P. (2002). A general Ostrowski type inequality for double integrals, *Tamkang Journal of Mathematics*, *33*(4), 319-333.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1952). *Inequalities.* New York: Cambridge university press.

Islam, M., Ali, A., Shehzadi, A.S., & Ain, H.U. (2020). Gamma function and k-gamma function for two variables. *Int. J. Math. Anal, 14,* 117–124,

Karadeniz, D. (2008). *Kesirli yayılım-dalga denklemlerinin silindirik koordinatlarda incelenmesi.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Kashif, A. R., Shoaib, M., & Latif, M. A. (2016). Improved version of perturbed Ostrowski type inequalities for n-times differentiable mappings with three-step kernel and its application. *J. Nonlinear Sci. Appl, 9*, 3319-3332.

Kılıçer, S. (2023). *İki katlı kesirli integraller için Ostrowski tipli eşitsizlikler ve uygulamaları.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Bartın Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Bartın.

Kilbas, A. A., Srivastava H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations, *North-Holland Mathematics Studies, 204,* Amsterdam: Elsevier Science

Lacroix, S. F. (1819). *Traite du calcul differential et du calcul integral.* (2nd Editon), Vol.3 Paris Courcier, pp. 409-410.

Lagrange, J.L. (1772). Essai sur le problème des trois corps. *Oeuvres de Lagrange, 6*, 229-292.

Lakoud, A. G. & Aissaoui, F. (2013). New fractional inequalities of Ostrowski type, Transylv. *J. Math. Mech., 5*(2), 103-106.

Laplace, P. S. (1820). *Théorie analytique des probabilités*. Vol. I. Part 2, Lerch, Paris.

Latif, M. A., Dragomir, S. S., & Matouk, A. E. (2012). New inequalities of Ostrowski type for co-ordinated convex functions via fractional integrals. *J. Fract. Calc. Appl, 2*(1), 1-15.

Leibniz, G. W. (1695). A letter from hanover, Germany to GFA L'Hospital, September 30, *Math. Schriften* (1849), 301-302.

Letnikov, A. V. (1868). Theory of differentiation of an arbitrary order. *Mat. Sb., 3,* 1-68.

Liouville , J . (1832). Mémoire sur quelques quéstions de géometrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces quéstions. *J. École Polytech, 13,* 1-69.

Miller, K.S. & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations* (1st Edition) John Wiley & Sons. Inc., New York: Wiley-Interscience.

Mitrinović, D.S. (1970). Analytic inequalities, Berlin: Springer-Verlag.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*, UK: Kluwer Academic Publishers.

Ortigueira M. D., & Tenreiro Machado J. A. (2015). What is a fractional derivative?, *Journal of Computational Physics*, *293,* 4-13.

Ostrowski, A. (1938). Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren funktion von ihrem integralmittelwert. *Comment. Math. Helv., 10,* 226-227.

Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations.* San Diego: Academic Press.

Qayyum, A., Shoaib, M., & Faye, I. (2017). On new refinements and applications of efficient quadrature rules using n-times differentiable mappings. *J. Comput. Anal. Appl*, *23*(4), 723-739.

Qayyum, A., Shoaib, M., & Erden, S. (2019). Generalized fractional Ostrowski type inequality for higher order derivatives. *NTMSCI 4,* No. 2, 111-124.

Riemann, B. (1859). Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse. *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß, 2*(145-155).

Riemann, B. (1892). *Foundations for a general theory of functions of a complex variable.* Collected Papers of Bernhard Riemann (translated by R.C. Baker, C. Christensen, H. Orde) (Kendrick Press, Heber City, 2004), pp. 1–41.

Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993*). Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications.* USA: Gordon and Breach Science Publishers.

Sandev, T. (2017). Generalized langevin equation and the prabhakar derivative. *Mathematics*, *5*(4), 1-11.

Sarıkaya, M. Z. (2014). On the Hermite-Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex function via fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions, 25*(2), 134-147.

Sarikaya, M. Z. (2010). On the Ostrowski type integral inequality. *Acta Math. Univ. Comen. 79*(1), 129–134

Sarikaya, M. Z., Set, E., Hatice, Y., & Nagihan, B. (2013). Hermite Hadamard s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, *57*(9–10), 2403–2407.

Sarikaya, M. Z. & Filiz, H. (2014). Note on the Ostrowski type inequalities for fractional integrals. *Vietnam J. Math., 42*(2), 187-190.

Sofo A. (2002). Integral inequalities for n- times differentiable mappings, with multiple branches, on the L_p norm. *Soochow Journal of Mathematics, 28*(2), 179-221.

Ujevic, N. (2003). Ostrowski-Grüss type inequalities in two dimensions. *J. Inequal. Pure and Appl. Math*, *4*(5), 1-12.

Wang M. & Zhao X. (2009). Ostrowski type inequalities for higher-order derivatives. *Journal of Inequalities and Applications, Article ID 162689,*1-8.