



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Z-BİLGİSİ ORTAMINDA DİFERANSİYEL GELİŞİM ALGORİTMASI
TABANLI REGRESYON MODELİ VE UYGULAMALARI

ERKAN KOCAKAYA

DANIŞMAN

DOÇ. DR. MÜKERREM BAHAR BAŞKIR

BARTIN-2024



T.C.

**BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Z-BİLGİSİ ORTAMINDA DİFERANSİYEL GELİŞİM ALGORİTMASI TABANLI
REGRESYON MODELİ VE UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erkan KOCAKAYA

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman : Doç. Dr. Mükerrerrem Bahar BAŞKIR
Üye : Doç. Dr. Samet ERDEN
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Elmas Burcu MAMAK EKİNCİ

BARTIN-2024

KABUL VE ONAY

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Mükerrerem Bahar BAŞKIR danışmanlığında hazırlamış olduğum “Z-BİLGİSİ ORTAMINDA DİFERANSİYEL GELİŞİM ALGORİTMASI TABANLI REGRESYON MODELİ VE UYGULAMALARI ” başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

26.07.2024

Erkan KOCAKAYA

ÖN SÖZ

Tez çalışmam boyunca engin bilgi ve tecrübeleri ile bana her daim yol gösteren, olumlu ve hoşgörölü tavrı ile cesaretlendiren, bilgi birikimi ve akademik yönü ile farklı bakış açısı kazandıran, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Mükerrrem Bahar BAŞKIR'a akademik gelişimime katkıları için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında desteklerini ve sevgilerini benden esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Erkan KOCAKAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Z-BİLGİSİ ORTAMINDA DİFERANSİYEL GELİŞİM ALGORİTMASI TABANLI REGRESYON MODELİ VE UYGULAMALARI

Erkan KOCAKAYA

Bartın Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mükerrerem Bahar BAŞKIR

Bartın-2024, sayfa: 62

Gerçek yaşama özgü karar problemleri temelde belirsizlikler içerir. Bu belirsizlikler yargı farklılığı, verinin kesin yapısı, hesaplama yaklaşımı gibi karar alma süreçlerinin tüm bileşenlerinde bulunur. Bulanık kümeler ve uzantıları, yukarıda belirtilen belirsizliklerin modellenmesi ve çıkarımı için güçlü problem çözme yaklaşımları sağlar. Bulanık küme uzantılarından biri olan Z-sayısı, güvenilir bilgiyi ölçebilme özelliği ile karar alma süreçlerinde bilgi ve algıya dayalı belirsizlikleri ortadan kaldırır. Bir Z-sayısı rastgele değişken üzerindeki kısıtlama ve bunun güvenilirliği sıralı ikilisinden oluşur. Z-değerlemesi bir rastgele değişkenin değerini belirli olasılıkla aldığını ifade eder. Z-değerlemesinin sunduğu Z-bilgisi ortamı rastgele değişkenin değeri hakkında bilgi sağlar. Güvenilir bir bilgi ortamında karar verebilmek için Z-sayıları içeren karma yaklaşımlar geliştirmek gerekir.

Bu tez çalışmasında, karar problemlerine özgü bir sistemin bileşenleri için bilginin güvenilirliğini içeren matematiksel modelin oluşturulması ile ilgilenilmektedir. Bu kapsamda, Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon çözümlemesi yaklaşımı incelenmiştir. Bu yaklaşımda Z-sayılarla tanımlanan sistem bileşenleri (çıkıtı ve girdileri) ve ilgili model katsayılarına ilişkin hesaplama karmaşıklığı bant genişliği yöntemi ile giderilmiştir. Ayrıca, Z-bilgisi ortamındaki model tahmin değerleri

ile gözlenen çıktı değerler arasındaki farkı minimum yapacak çözümleme için diferansiyel gelişim algoritması kullanılmıştır. Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon çözümlemesi, bir teknoloji firmasında dijital olgunluk değerlendirmesine yönelik tek girdi/çok girdi ve tek çıktı sistem verisine uygulanmıştır. Klasik, bulanık ve Z-bilgisi ortamlarındaki regresyon model performansları karşılaştırılmıştır. Genel olarak, Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon çözümlemesinin karşılaştırıldığı diğer yöntemlere göre daha iyi performansa sahip olduğu görülmüştür. Klasik, bulanık ve Z-bilgisi ortamında incelenen regresyon yaklaşımlarına dair performans bulgularını ve gözlenen-tahmini çıktı karşılaştırmalarını içeren veri görselleştirme ile zenginleştirilmiş bir Matlab arayüzü oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayılar, diferansiyel gelişim algoritması, matematiksel model, Matlab arayüz, meta-sezgisel optimizasyon, veri görselleştirme, Z-sayılar.

Bilim Alanı Kodu: 20406, 20506, 20516.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM-BASED REGRESSION MODEL IN Z-INFORMATION ENVIRONMENT AND ITS APPLICATIONS

Erkan KOCAKAYA

Bartın University

Graduate School

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mükerrerem Bahar BAŞKIR

Bartın-2024, pp: 62

Decision problems in real life basically involve uncertainties. These uncertainties can be found in all components of decision-making processes, such as judgemental discrepancies, crisp structure of data, and computational approximation. Fuzzy sets and their extensions provide powerful problem-solving approaches for modeling and inferring the aforementioned uncertainties. Z-number, one of the fuzzy set extensions, resolves the uncertainties based on knowledge and perception in decision-making processes with its ability to measure reliable information. A Z-number is defined as an ordered pair that consists of a restriction on a random variable and the reliability of this restriction. Z-valuation expresses that a random variable takes its value with a certain probability. The Z-information environment presented by Z-valuation provides information about the value of the random variable. Hybrid approaches including Z-numbers need to be developed to make decisions in a reliable information environment.

In this thesis, building a mathematical model under information reliability is examined for system components of decision problems. In this context, the differential evolution algorithm-based regression analysis approach in the Z-information environment was investigated. In this approach, the computational complexity related to the system

components (output and inputs) defined by Z-numbers and the model coefficients is eliminated by the bandwidth method. Besides, differential evolution algorithm was used to minimize the differences between the model prediction values and the observed output values under Z-information environment. Differential evolution algorithm-based regression analysis in Z-information environment was applied to single-input/multiple-input and single-output system data for digital maturity evaluation in a technology company. The regression model performances in classical, fuzzy, and Z-information environments were compared. Generally, it has been seen that differential evolution algorithm-based regression analysis in Z-information environment has better performance than other methods. A Matlab interface enriched with data visualization was created to demonstrate performance results and observed-predicted output comparisons of regression approaches in classical, fuzzy, and Z-information environments.

Keywords: Fuzzy numbers, differential evolution algorithm, mathematical model, Matlab interface, meta-heuristic optimization, data visualization, Z-numbers.

Scientific Field Code: 20406, 20506, 20516

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	ii
BEYANNAME	iii
ÖN SÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
TABLolar DİZİNİ.....	xii
EKLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	3
3. MATERYAL VE METOT	6
3.1. Bulanık Küme Teorisi.....	6
3.1.1 Bulanık Kümeler ve Özellikleri	7
3.1.2 Bulanık Kümelerde Temel İşlemler	9
3.1.3 Zadeh'in Genişleme Prensibi	11
3.1.4 Bulanık Sayılar ve Üyelik Fonksiyonları	11
3.2. Z-Sayılar ve Bilginin Güvenilirliği	15
3.2.1 Z-Sayıların Tanıtılması.....	15
3.2.2 Z-Sayılar da Aritmetiksel İşlemler	18
3.3. Bulanık Ortamda Regresyon Çözümlemesi	22
3.3.1 Olabilirlik Regresyon Modeli.....	24
3.3.2 Bulanık En Küçük Kareler Modeli	27
3.3.3 Bulanık Regresyonda Makine Öğrenme Teknikleri.....	30
3.4. Z-Bilgisi Ortamında Regresyon Çözümlemesi	31
3.4.1 ZDGR Model Yaklaşımının Adımları.....	33
3.4.2 Z-Bilgisi Ortamında Diferansiyel Gelişim Algoritması.....	37
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	39
4.1. Tek Girdi-Tek Çıktı Sistem Modelleri	40
4.2. Çok Girdi-Tek Çıktı Sistem Modelleri.....	43

4.3. Model Performanslarının Karşılaştırılması	46
4.4. Matlab Arayüzün Tanıtılması.....	48
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR.....	53
EKLER	60
ÖZGEÇMİŞ	62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No	Sayfa No
3.1: Bazı bulanık sayılar için üyelik fonksiyonlarının gösterimleri	12
3.2: YBS ve ÜBS α -kesit örnek gösterimleri	14
3.3: Z-sayısı örnek gösterimleri.....	16
3.4: $Z = (\tilde{A}: \text{Yaklaşık } 175 \text{ cm}, \tilde{B}: \text{Büyük ihtimalle})$ için Z-sayısı örnek gösterimi.....	17
3.5: Bant genişliği örnek gösterimler	21
3.6: h-düzeyine göre düzeltilmiş \tilde{Y}_i ve \hat{Y}_i	26
3.7: Bulanık regresyonda makine öğrenme tekniklerine ilişkin bazı çalışmalar.....	31
3.8: ZDGR modeli ve bileşenleri için akış şeması	33
3.9: DG algoritması akış şeması.....	37
4.1: Dijital olgunluk düzeyleri için Z-sayısı bileşenleri	39
4.2: TGTÇ sistemler için gözlenen ve tahmini çıktılar	43
4.3: ÇGTÇ sistem için gözlenen ve tahmini çıktılar	46
4.4: KR, BR ve ZDGR modeller için uygunluk değerleri.....	47
4.5: Modelleme çalışmaları için hazırlanan Matlab arayüzün genel görünümü	48
4.6: (Y, X_1) için Matlab arayüz görüntüsü	49
4.7: (Y, X_2) için Matlab arayüz görüntüsü	49
4.8: (Y, X_3) için Matlab arayüz görüntüsü	50
4.9: (Y, X_1, X_2, X_3) için Matlab arayüz görüntüsü.....	50

TABLULAR DİZİNİ

Tablo	Sayfa
No	No
3.1: Bulanık kümelerin bazı özellikleri	8
3.2: \tilde{U}_1 ve \tilde{U}_2 bulanık kümeler için bazı temel işlemler	9
3.3: Bulanık kesişim ve bulanık birleşim için t-norm ve s-norm koşulları	10
3.4: Bazı t-norm ve s-norm operatörleri	10
3.5: Bulanık sayılar ve özellikleri.....	11
3.6: Bulanık sayı ve üyelik fonksiyonu örnekleri	12
3.7: Bulanık sayılarda bazı temel işlemler	13
3.8: Basit ve çoklu doğrusal regresyon modelleri için örnek gösterimler.....	23
3.9: Diamond'ın bulanık EKK regresyon modelleri	28
3.10: Z-değerli doğrusal regresyon model yapıları	32
4.1: Dijital olgunluk düzeylerine ilişkin modeller	40
4.2: Klasik ve bulanık regresyon modellerinin katsayıları.....	40
4.3: ZDGR modellere ilişkin katsayılar	41
4.4: ÇGTÇ sistem için klasik regresyon modeli sonuçları	43
4.5: Modellere ilişkin katsayılar	44
4.6: TGTÇ sistemler için model performans ölçütleri	46
4.7: ÇGTÇ sistem için model performans ölçütleri	47

EKLER DİZİNİ

Ek	Sayfa
No	No
EK 1. “Dijital olarak etkinleştirilen bir büyüme stratejisi ve zihniyeti geliştirmek” için ele alınan boyutlar ve düzeyleri (Aramburu vd., 2021).	60

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\tilde{A}	: Bulanık Kısıtlama (Bulanık Sayı)
\tilde{B}	: \tilde{A} 'nın Güvenilirliği
$Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$: (\tilde{A}, \tilde{B}) -İkilisinden Oluşan Z-Sayısı
$Z^+ = (\tilde{A}, R)$: (\tilde{A}, R) -İkilisinden Oluşan Z^+ -Sayısı
\tilde{A}^b	: \tilde{A} 'nın Bant Genişliği
$(x, \tilde{A}, \tilde{B})$: Z-Değerlemesi
AKOK	: Artık Kareler Ortalamasının Karekökü
BR	: Bulanık Regresyon
ÇGTÇ	: Çok Girdi-Tek Çıktı
DG	: Diferansiyel Gelişim
EKK	: En Küçük Kareler
KR	: Klasik Regresyon
ÜBS	: Üçgensel Bulanık Sayı
TGTÇ	: Tek Girdi-Tek Çıktı
YBS	: Yamuksal Bulanık Sayı
ZDGR	: Z-Bilgisi Ortamında Diferansiyel Gelişim Algoritması tabanlı Regresyon

1. GİRİŞ

Karar alma süreçlerinde gerçek yaşama özgü oldukça karmaşık sistem yapılarının çözümlenmesi ile ilgilenilir. Bu karmaşık sistem yapılarının tanımlanmasında sisteme ait tüm bileşenlerin ve çözümlenmede yararlanılan yaklaşımların kesin doğası ve sınırlamaları kaynaklı belirsizlikler oluşur. Bu belirsizliklerin analiz edilmesi ve giderilmesi ile karar alma süreçleri daha etkin hale gelir. Zadeh'in 1965 yılında önerdiği bulanık mantık ve üyelik dereceleri (birincil üyelikler), bahsedilen belirsizliklerin analiz edilerek sistem yapılarının tanımlanmasını ve/veya modellenmesini mümkün kılar. Bir sistemin bileşenleri olan çıktı ve en az bir girdi değişken arasındaki fonksiyonel bağıntının oluşturulmasında ve gerekli tahminlerin yapılmasında klasik regresyon çözümlenmesi yaygın olarak kullanılır. Klasik regresyonla sistem yapısının tanımlanması sürecinde kesin olmayan (belirsiz/bulanık) durumlarla karşılaşılabilir. Sistem bileşenlerine ait bulanık ortamdaki verinin kesin doğası, bileşenler arasındaki ilişkiyi tanımlamada istatistiksel varsayımların sağlanmaması, insan yargısına dayanan modelleme çalışması kaynaklı kesin olmayan durumlar için bulanık regresyon çözümlenmesinden yararlanır. Öte yandan, karar problemlerinin çözümlenme sürecinde insan algısı ve bilgisi etkilidir. Zadeh (2011), insanların kesin olmayan, belirsiz ve/veya eksik bilgilerle rasyonel kararlar aldığına dikkat çekmiştir. Bu kapsamda, Zadeh (2011), kesin olmayan (belirsiz/bulanık) bilginin güvenilirliğini ölçen Z-sayıları önermiştir. Bir X rastgele değişkeni üzerindeki kısıtlama (\tilde{A}) ve bunun güvenilirliği (\tilde{B}) ikilisinden ((\tilde{A}, \tilde{B}) -ikilisinden) oluşan Z-sayısı ile X 'in belirli bir \tilde{B} -olasılıkla (veya güvenilirlikle) \tilde{A} -değerini aldığı ifade edilir (Zadeh, 2011; Liu vd., 2020). Z-sayıları temelde bulanık kümelerle oluşan aralık-değerli yapıdadır ve karmaşık aritmetiksel işlemler içerir. Karar problemlerinin odağı olan sistem yapısının modellenmesinde kesin olmayan/eksik/yetersiz bilgi kaynaklı belirsizliklerin giderileceği yaklaşımlara ihtiyaç vardır. Bu kapsamda, Z-sayılarla dayanan regresyon çözümlenmesi çalışmalarında diferansiyel gelişim algoritması (Zeinalova vd., 2018), kümeleme (öbekleme) algoritması (Başkır ve Poleschchuk, 2022), yapay sinir ağları (Ezadi ve Allahviranloo, 2018) gibi çeşitli yöntemlerden/algoritmalarından yararlanır.

Bu tez çalışmasında, sistem yapılarının modellenmesi için Z-ortamda diferansiyel gelişim (DG) algoritması tabanlı regresyon (ZDGR) modeli ele alınmıştır. ZDGR model yaklaşımı, bir teknoloji firmasının dijital olgunluk düzeylerine yönelik değerlendirmeleri için oluşturulan tek girdi-tek çıktı (TGTC) ve çok girdi-tek çıktı (ÇGTÇ) sistem verilerine

uygulanmıştır. ZDGR modelde Z-sayıların işlem karmaşıklığını gidermek için bant genişliği yöntemi kullanılmıştır. ZDGR model katsayılarının optimize edilmesi için Z-sayılar ortamında DG algoritmasından yararlanılmıştır. Dijital olgunluk düzeylerine ilişkin TGTÇ ve ÇGTÇ sistem yapılarının tanımlanması için oluşturulan klasik ve bulanık ortamlarda regresyon modelleri ile ZDGR modellerin performansları karşılaştırılmıştır. Ayrıca, klasik, bulanık ve Z-bilgisi ortamındaki modellerin performans bulgularını ve gözlenen-tahmini çıktı karşılaştırma görsellerini içeren bir Matlab arayüzü oluşturulmuştur.

Bu tez çalışmasının bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir: İkinci bölümde Z-sayılar ortamında regresyon çözümlemesine ilişkin literatür özeti verilmektedir. Üçüncü bölümde bulanık küme teorisi kapsamındaki bulanık küme özellikleri, bulanık sayılar ve aritmetik işlemleri gibi temel bilgiler, Z-sayılar ve bilginin güvenilirliği, aritmetiksel işlemleri, bant genişliği yöntemi ve Z-sayının bulanık sayıya indirgenmesi yer almaktadır. Ayrıca, bulanık ortamda regresyon çözümlemesi yaklaşımları temel hatları ile verilmektedir. Z-bilgisi ortamında regresyon çözümleme yaklaşımının adımları, Z-sayılara dayanan diferansiyel gelişim algoritmasının genel işleyişi ile birlikte bu bölümde tanıtılmaktadır. Dördüncü bölümde, Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon modelinin bir teknoloji firmasında dijital olgunluk düzeyi değerlendirmelerine ilişkin TGTÇ/ÇGTÇ sistem verilerine uygulanması, modellere dair performans değerlendirmeleri ve gözlenen-tahmini çıktı değerlerin karşılaştırıldığı grafik görselleri ile hazırlanan Matlab arayüzün tanıtılması yer almaktadır. Sonuç ve öneriler beşinci bölümdedir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu tez çalışmasında ele alınan konunun temelini Z-sayılar ortamında regresyon modeli yaklaşımı oluşturmaktadır. Zadeh'in (1965) bulanık kümeler teorisini literatüre mal etmesi ile birçok yöntem bulanık ortamda geliştirilmiştir. Bulanık ortamda regresyon çözümlemesi, karar problemlerinde belirsizlik durumları için klasik regresyon çözümlemesinin alternatifi olarak geliştirilmiştir. Bulanık regresyon yaklaşımı, doğrusal/doğrusal olmayan programlama (olabilirlik), en küçük kareler tekniğine dayalı ve makine öğrenme algoritmaları tabanlı olmak üzere üç başlık altında ele alınır. Tanaka vd.'nin (1980; 1982) önerdiği doğrusal programlamaya dayanan bulanık regresyon modelinde bulanık model katsayılarına ilişkin toplam yayılımın minimize edilmesi ile model belirsizliği en küçüklenir. Bu yöntemdeki doğrusal programlama modeli kısıtları, bulanık ortamda tahmin edilen çıktı gözlenen çıktıyı kapsayacak biçimde belirlenir. En küçük kareler (EKK) yöntemine dayalı bulanık regresyon çözümlemesinde uyum veya uzaklık ölçülerinden yararlanılır. Diamond (1988) EKK-bulanık regresyon model parametrelerinin tahmininde merkez, sol ve sağ yayılımlardan oluşan iki bulanık sayı için uzaklık ölçüsü kullanımını, Celmins (1987a) ise uyum ölçüsüne dayanan alternatif bir yaklaşımı önermiştir. EKK-tekniğine dayalı bulanık regresyon çözümlemesine ilişkin geliştirilmiş teori ve uygulama çalışmalarının bazıları minimum bulanıklığa dayalı bulanık doğrusal regresyon çözümlemesi (Savic ve Pedrycz, 1991), kesin olmayan sistem bileşenleri için EKK-tekniğine dayanan bulanık regresyon (Wang ve Tsaur, 2000a), bulanık ortamdaki sistem bileşenleri için doğrusal olmayan programlama temelli bulanık regresyon (Lee ve Chen, 2001), üçgensel bulanık sayı (ÜBS) formundaki sistem bileşenleri ve aykırı değerler içeren veri seti için bulanık regresyon çözümlemesi (Şanlı ve Apaydın, 2004), bulanık sistem bileşenleri arasındaki mesafenin en küçüklenmesine dayanan bulanık regresyon (Mohammadi ve Taheri, 2004), çok değişkenli doğrusal olmayan bulanık regresyon (Hong ve Hwang, 2006), melez bulanık EKK-tekniğine dayanan regresyon (Başer, 2007), EKK-tekniğine dayanan bulanık regresyon fonksiyonları (Türkşen, 2008), DuPont analizi için bulanık kümeleme (öbekleme) algoritması temelli bulanık regresyon fonksiyonu (Başkır, 2016), çarpımsal bulanık kümeleme (öbekleme) algoritması ile yeni bir çarpımsal bulanık regresyon fonksiyonu (Pehlivan ve Türkşen, 2021), Gustafson-Kessel kümeleme (öbekleme) algoritması ile bulanık regresyon fonksiyonları (Bas ve Egrioglu, 2022) dır.

Bulanık regresyon çözümlerinin temelinde kullanılan bulanık kümeler, birincil üyeliklerin kesin doğası kaynaklı belirsizlikler içerir. Bulanık ortamda sistem model yapısının oluşturulmasında birincil üyelikler kaynaklı belirsizlikleri de analiz edecek çözümler geliştirilmiştir. Birincil üyeliklerin kesinliği kaynaklı belirsizlikleri indirmek üzere geliştirilmiş geleneksel bulanık küme uzantılarından bazıları tip-2 bulanık kümeler (Zadeh, 1965; 1975), sezgisel bulanık kümeler (Atanassov, 1986; 1999), nütrosifik (Smarandache, 1998), Z-sayılar (Zadeh, 2011) dir. Bu uzantılara dayanan regresyon modellerine ilişkin bazı çalışmalar ise aralık tip 2 bulanık ortamda EKK-temelli regresyon çözümleri (Poleshchuk ve Komarov, 2012), sezgisel ÜBS temelli regresyon (Parvathi vd., 2013), nütrosifik korelasyon ve basit doğrusal regresyon çözümleri (Salama vd., 2014), sezgisel bulanık ortamda regresyon çözümleri (Arefi ve Taheri, 2015), tam yarı tip-2 bulanık ortamda doğrusal regresyon modeli tahmini için ağırlıklı hedef programlama tabanlı yaklaşım (Hosseinzadeh vd., 2016), regresyon analizinde aralık tip 2 sezgisel bulanık mantık (Eyoh vd., 2018), tek değerli nütrosifik Gauss süreci regresyon yaklaşımı (Qin vd., 2023), Z-sayılar ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon çözümleri (Zeinalova vd., 2018), sezgisel bulanık ridge regresyon fonksiyonları (Kızılaslan vd., 2020), Z-sayılar ortamında kümeleme (öbekleme) algoritması tabanlı regresyon çözümleri (Başkır ve Poleshchuk, 2022), sağlam (robust) sezgisel bulanık regresyon fonksiyonları (Egrioglu ve Bas, 2023) dir.

Z-sayılar ortamında regresyon modelleri üzerine literatürde yer alan bazı çalışmalar aşağıda özetlenmektedir:

Sadikoglu vd. (2016), önerdikleri Z-değerli regresyon modelinde tahmin ve gözlenen değerlerin benzerliğini Jaccard indeksi ile incelemiş ve genel kriteri maksimize etmek için Newton yöntemine dayalı optimizasyon algoritmasını kullanmışlardır.

Zeinalova vd. (2018), önerdikleri Z-sayısı değerli regresyon modeli ile uzman değerlendirmelerine dayanan liman seçimi uygulamasını ele almıştır. Z-sayılarla regresyon analizinde en uygun model katsayıların belirlenmesi için Storn ve Price (1995)'in geliştirdiği diferansiyel gelişim algoritması kullanmışlardır.

Ezadi ve Allahviranloo (2018), yapay sinir ağı ile tanımlanan Z-sayısı tabanlı doğrusal regresyon modeli önermişlerdir. Yapay sinir ağı, optimizasyon tekniği ve iki bulanık sayı

arasındaki mesafeye dayalı EKK hata yöntemini kullanarak Z-sayısına dayanan doğrusal regresyon model katsayılarını belirlemiştirler. Önerilen Z-sayısı tabanlı regresyon yaklaşımının karmaşık problemleri çözmede güçlü bir yöntem olduğunu örneklerle göstermişlerdir.

Poleshchuk (2022) çalışmasında, Z-bilgisi ortamında doğrusal olmayan regresyon modeli önermiştir. Z-sayılarla dayanan modele dair Z-sayılar ve ilk bileşenler ile başlangıç Z-sayıları arasındaki mesafelerin karelerinin toplamı olarak tanımlanan optimizasyon fonksiyonunun minimumu ile bilinmeyen regresyon katsayıları belirlenmiştir.

Başkır ve Poleshchuk (2022) çalışmalarında, Z-sayılar ortamında bulanık öbekleme (kümeleme) algoritması tabanlı bulanık regresyon fonksiyonu yaklaşımını önermiştir. Bu yaklaşımı Aramburu vd.'nin (2021) dijital gelişim stratejisi verisi için uygulamışlardır. Önerdikleri yaklaşımın performans değerlendirmelerini klasik ve bulanık versiyonlarla karşılaştırmışlardır. Z-sayılar formundaki tahmini çıktıların kesin sayıya dönüştürülmesinde sezgisel vektörel merkez operatörünü kullanmışlardır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde bulanık kümeler ve Z-sayılar hakkında temel bilgiler, bulanık ortamda regresyon çözümlemesi yaklaşımları ve Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon çözümlemesi, bileşenleri ve işleyişi anlatılmaktadır.

3.1. Bulanık Küme Teorisi

Matematik ve bilgisayar bilimlerinin temelleri Klasik veya Aristo mantığı olarak bilinen Aristoteles'in bir önermenin "doğru" veya "yanlış" olması fikrine dayanır. George Boole 1800'lerde, iki değerli Aristoteles mantığını, 1: "doğru", 0: "yanlış" olacak şekilde matematiksel temellere dayalı olarak geliştirmiştir. Cebirin bir alt dalı olan Boole cebri, diğer bir ifade ile Boole mantığı, 0 ve 1 değişken değerleri ile iki-değerli karar mekanizması ortaya koyar. Belirsizlik ilkesini bulan Alman fizikçi Karl Werner Heisenberg'in 1920'lerde "doğru" ve "yanlış" olgularına "orta" ("belirlenememe") olgusu eklemesi ile üç-değerli mantığa geçilmiştir. Polonyalı mantıkçı, matematikçi ve filozof Jan Łukasiewicz'in "orta" kavramını alt kavramlara parçalaması ile çok-değerli mantık ortaya çıkmıştır. Amerikalı kuantum filozofu Max Black'in önerdiği üyelik fonksiyonu yapısı ile belirsizlik ve çok değerli küme teorisine geçiş gerçekleşmiştir. Bulanık küme teorisinin Lütüf Aliasker Zadeh tarafından 1965'te literatüre mal edilmesi ile çok değerli küme teorisinde tanımlanan üyelik fonksiyonlarının nasıl kullanılacağı bulanık mantık ve üyelik dereceleri çerçevesinde ele alınmıştır.

Karar problemleri temelde belirsizlikler içerir. Bulanık küme teorisi, tam ve doğru olmayan, eksik, belirsiz kavramları ile ilgilenen metodolojidir. Zadeh'e (1965) göre, belirsizlik nedenleri veri yapısı, ölçme-değerlendirme sistemi yapısı, insan yargısı/algısı farklılığı kaynaklıdır. Klasik mantık her ne kadar bilgisayar bilimine dayalı çalışmalarda temel oluştursa da gerçek yaşama özgü karar problemlerinde yukarıda bahsedilen belirsizlik kaynaklarını gideren bulanık mantık ve üyelik derecelerine ihtiyaç vardır. Bunun yanı sıra, bulanık mantık sayesinde karar alma süreçlerindeki göreceliliğin belirsizliği karar mekanizmasına anlamlı bir şekilde dahil edilerek, bilgisayara veya makinelere insan gibi düşünebilme özelliği kazandırılabilir.

3.1.1 Bulanık Kümeler ve Özellikleri

Klasik küme teorisi ile bulanık küme teorisi arasındaki matematiksel gösterim temelli farklılık üyelik fonksiyonlarının değer kümelerinde görülür. Klasik mantık ve üyelik dereceleri, bir elemanın (nesnenin, birimin) bir kümeye ait olma veya ait olmama durumunu ifade ederken bulanık mantık ve üyelik dereceleri, bir elemanın (nesnenin, birimin) dereceli olarak ait olması/ait olmaması ile ilgilidir. Klasik ve bulanık kümelerde üyelik fonksiyonu tanımları, sırasıyla, Tanım 1 ve Tanım 2’de verilmektedir.

Tanım 1. E evrensel küme olsun. $U \subset E$ ve $\forall x \in E$ için, $\mu_U: E \rightarrow \{0,1\}$ olmak üzere, U kümesinin üyelik (karakteristik) fonksiyonu,

$$\mu_U(x) = \begin{cases} 1; & x \in U \\ 0; & x \notin U \end{cases} \quad (1)$$

dir (Eşitlik 1). Burada μ_u – üyelik fonksiyonunun değer (görüntü) kümesi $\{0,1\}$ dir.

Tanım 2. E – evrensel küme ve $\tilde{U} \subset E$ olmak üzere, her $x \in E$ için \tilde{U} –bulanık kümesi $\tilde{U} = \{x \in E: (x, \mu_{\tilde{U}}(x))\}$ ile gösterilir. Burada, $\mu_{\tilde{U}}: E \rightarrow [0,1]$ ile x 'in \tilde{U} 'daki üyelik derecesi ifade edilir. Buna göre, x 'in \tilde{U} 'daki üyelik derecesi 1 ise \tilde{U} kümesine ait olma; 0 ise ait olmama; $(0,1)$ ise kısmi (dereceli) ait olma durumu belirtilir. \tilde{U} 'daki her bir $(x, \mu_{\tilde{U}}(x))$ sıralı çifti ayrıca $\mu_{\tilde{U}}(x)/x$ veya $\frac{\mu_{\tilde{U}}(x)}{x}$ olarak da gösterilir. E – evrensel kümenin kesikli ya da sürekli olma durumuna göre \tilde{U} bulanık kümesi Eşitlik 2’deki gibidir.

$$\tilde{U} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{U}}(x_i)}{x_i}, & E - \text{Kesikli durum} \\ \int_{x \in E} \frac{\mu_{\tilde{U}}(x)}{x}, & E - \text{Sürekli durum} \end{cases} \quad (2)$$

Bulanık kümelere ilişkin bazı temel özellikler Tablo 3.1’de verilmektedir (bkz. Zadeh, 1965; 1996; 2002; Özkan, 2003; Türkşen, 2006; Çelikiyılmaz ve Türkşen, 2008; Başkır, 2011).

Tablo 3.1: Bulanık kümelerin bazı özellikleri

Özellik	Açıklama	Matematiksel Gösterim
α -kesit ve Güçlü α -kesit	$\alpha \in [0,1]$ için \tilde{U} bulanık kümesinde üyelik fonksiyon değeri α 'ya eşit veya α 'dan büyük olan elemanların oluşturduğu klasik kümeye α -kesit, üyelik fonksiyon değeri α 'dan büyük olan elemanların oluşturduğu klasik kümeye ise güçlü α -kesit denir.	α -kesit: $\tilde{U}^\alpha = \{ \forall x \in E : \mu_{\tilde{U}}(x) \geq \alpha \}$ Güçlü α -kesit: $\tilde{U}^\alpha = \{ \forall x \in E : \mu_{\tilde{U}}(x) > \alpha \}$
Sınır kümesi	\tilde{U} bulanık kümesinde üyelik değeri (0,1) aralığından olan elemanların oluşturduğu klasik kümedir.	Sınır(\tilde{U}) = $\{ \forall x \in E : 0 < \mu_{\tilde{U}}(x) < 1 \}$
Kernel kümesi	\tilde{U} bulanık kümesinde üyelik değeri 1 olan elemanların bir araya getirildiği geleneksel kümedir.	Kernel(\tilde{U}) = $\{ \forall x \in E : \mu_{\tilde{U}}(x) = 1 \}$
Destek kümesi	\tilde{U} bulanık kümesinde üyelik değeri sıfırdan büyük olan elemanların bir araya getirildiği geleneksel kümedir.	Destek(\tilde{U}) = $\{ \forall x \in E : \mu_{\tilde{U}}(x) > 0 \}$
Yükseklik	\tilde{U} bulanık kümesine ait en büyük üyelik fonksiyon değeridir.	Yükseklik(\tilde{U}) = $\sup\{\mu_{\tilde{U}}(x)\} , \forall x \in E$
Merkez	\tilde{U} bulanık kümesinde üyelik değerleri en büyük olan elemanlardan oluşan bir küme var olsun. \tilde{U} bulanık kümesinin merkezi, en büyük üyelik derecelerinin ortalaması veya en büyük üyelik değerine ulaşılan noktaların en büyüğü (en küçüğü)dür.	\tilde{U} bulanık kümesinin merkezi, i) $\forall x \in E$ için $\sup\{\mu_{\tilde{U}}(x)\}$ sayılabilir sayıda ise en büyük üyelik derecelerinin ortalaması, ii) $\forall x \in E$ için $\sup\{\mu_{\tilde{U}}(x)\}$ sayılamayacak kadar ise en büyük üyelik değerine ulaşılan noktaların en büyüğü veya en küçüğüdür.
Normallik	\tilde{U} bulanık kümesi için ait Yükseklik(\tilde{U}) = 1 ise \tilde{U} normal; Yükseklik(\tilde{U}) < 1 ise normal altı bulanık kümedir. Normal altı bulanık küme, üyelik değerlerin yüksekliğe bölünmesi ile normal bulanık kümeye dönüştürülür.	Normal(\tilde{U}) = $\frac{\mu_{\tilde{U}}(x)}{\text{Yükseklik}(\tilde{U})} , \forall x \in E$
Dışbükeylik	$x_1 , x_2 \in E$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere, $\mu_{\tilde{U}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{U}}(x_1), \mu_{\tilde{U}}(x_2))$ olduğunda \tilde{U} dışbükey bulanık kümesidir.	$\mu_{\tilde{U}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{U}}(x_1), \mu_{\tilde{U}}(x_2)) , x_1 , x_2 \in E$ ve $\lambda \in [0,1]$

3.1.2 Bulanık Kümelerde Temel İşlemler

Bulanık kümelerde temel işlemler üyelik fonksiyonları ile gerçekleşir. Zadeh (1965), başlangıçta bulanık kümelerde temel işlemleri sınırlı olarak tanımlamıştır. E -evrensel kümede tanımlı $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset E)$ $\tilde{U}_1 = \{x \in E: (x, \mu_{\tilde{U}_1}(x))\}$ ve $\tilde{U}_2 = \{x \in E: (x, \mu_{\tilde{U}_2}(x))\}$ bulanık kümeler için bazı temel işlemler Tablo 3.2’de verildiği gibidir.

Tablo 3.2: \tilde{U}_1 ve \tilde{U}_2 bulanık kümeler için bazı temel işlemler

Temel işlem	Matematiksel gösterim
Eşitlik	$\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 \Leftrightarrow \mu_{\tilde{U}_1}(x) = \mu_{\tilde{U}_2}(x), (\forall x \in E \text{ için})$
Kapsama	$\tilde{U}_1 \subseteq \tilde{U}_2 \Leftrightarrow \mu_{\tilde{U}_1}(x) \leq \mu_{\tilde{U}_2}(x), (\forall x \in E \text{ için})$
Kesişim	$\mu_{\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2}(x) = \min(\mu_{\tilde{U}_1}(x), \mu_{\tilde{U}_2}(x)) = \mu_{\tilde{U}_1}(x) \wedge \mu_{\tilde{U}_2}(x),$ ($\forall x \in E$ için)
Birleşim	$\mu_{\tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2}(x) = \max(\mu_{\tilde{U}_1}(x), \mu_{\tilde{U}_2}(x)) = \mu_{\tilde{U}_1}(x) \vee \mu_{\tilde{U}_2}(x),$ ($\forall x \in E$ için)
Tümleme	$\tilde{U}_1^c: \tilde{U}_1$ bulanık kümesinin tümleyeni olmak üzere $\forall x \in E$ için, $\mu_{\tilde{U}_1^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{U}_1}(x)$
Cebirsel Toplam	$\forall x \in E$ için $\tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2: \mu_{\tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2}(x) = \mu_{\tilde{U}_1}(x) + \mu_{\tilde{U}_2}(x) - \mu_{\tilde{U}_1}(x) \cdot \mu_{\tilde{U}_2}(x)$
Cebirsel Fark	$\forall x \in E$ için $\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2: \mu_{\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2}(x) = \mu_{\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2^c}(x) = \min(\mu_{\tilde{U}_1}(x),$ $\mu_{\tilde{U}_2^c}(x))$
Cebirsel Çarpım	$\forall x \in E$ için $\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2: \mu_{\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2}(x) = \mu_{\tilde{U}_1}(x) \cdot \mu_{\tilde{U}_2}(x)$
Cebirsel Kuvvet	$\forall x \in E$ için, $t \geq 0$ olmak üzere $\tilde{U}_1^t: \mu_{\tilde{U}_1^t}(x) = (\mu_{\tilde{U}_1}(x))^t$

Schweizer ve Sklar (1963; 1983), bulanık kesişim ve bulanık birleşim işlemleri için, sırasıyla, t -norm ve s -norm (t -conorm) tanımlamıştır. Buna göre, E -evrensel kümedeki $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset E)$ $\tilde{U}_1 = \{x \in E: (x, \mu_{\tilde{U}_1}(x))\}$ ve $\tilde{U}_2 = \{x \in E: (x, \mu_{\tilde{U}_2}(x))\}$ bulanık kümeler için $t, s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olarak verilen t -norm ve s -norm ile bulanık kesişim $(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2)$ ve bulanık birleşim $(\tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2)$ belirlenir (Özkan, 2003; Başkır, 2011). t -norm ve s -norm operatörlerinin sağlaması gereken sınır, değişme, monotonluk ve birleşme koşulları Tablo 3.3’de verildiği gibidir.

Tablo 3.3: Bulanık kesişim ve bulanık birleşim için t-norm ve s-norm koşulları

Sınır Koşulu	
$t(\mu_{\bar{U}}(x), 1) = \mu_{\bar{U}}(x)$	$s(\mu_{\bar{U}}(x), 0) = \mu_{\bar{U}}(x)$
Değişme Koşulu	
$t(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x)) = t(\mu_{\bar{U}_2}(x), \mu_{\bar{U}_1}(x))$	$s(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x)) = s(\mu_{\bar{U}_2}(x), \mu_{\bar{U}_1}(x))$
Monotonluk Koşulu	
$\mu_{\bar{U}_1}(x) \leq \mu_{\bar{U}_3}(x)$ ise $t(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x)) \leq t(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_3}(x))$	$\mu_{\bar{U}_1}(x) \leq \mu_{\bar{U}_3}(x)$ ise $s(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x)) \leq s(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_3}(x))$
Birleşme Koşulu	
$t(\mu_{\bar{U}_1}(x), t(\mu_{\bar{U}_2}(x), \mu_{\bar{U}_3}(x)))$ $\leq t(t(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x)), \mu_{\bar{U}_3}(x))$	$s(\mu_{\bar{U}_1}(x), s(\mu_{\bar{U}_2}(x), \mu_{\bar{U}_3}(x)))$ $\leq s(s(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x)), \mu_{\bar{U}_3}(x))$

Bazı t -norm ve s -norm operatörleri Tablo 3.4'deki gibidir (bkz. Türkşen, 2006; Çelikyılmaz ve Türkşen, 2008; Başkır, 2011).

Tablo 3.4: Bazı t -norm ve s -norm operatörleri

t -norm	s -norm
$\min(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x))$	$\max(\mu_{\bar{U}_1}(x), \mu_{\bar{U}_2}(x))$
$\mu_{\bar{U}_1}(x) \times \mu_{\bar{U}_2}(x)$	$\mu_{\bar{U}_1}(x) + \mu_{\bar{U}_2}(x) - \mu_{\bar{U}_1}(x) \times \mu_{\bar{U}_2}(x)$
$\frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$	$\frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2(\mu_A(x) \cdot \mu_B(x))}{1 - (\mu_A(x) \cdot \mu_B(x))}$
$\max(\mu_{\bar{U}_1}(x) + \mu_{\bar{U}_2}(x) - 1, 0)$	$\min(\mu_{\bar{U}_1}(x) + \mu_{\bar{U}_2}(x), 1)$
$\max\left(0, (a^p + b^p - 1)^{\frac{1}{p}}\right), p \neq 0$ Burada, $a = \mu_{\bar{U}_1}(x)$ ve $b = \mu_{\bar{U}_2}(y)$ dir.	$1 - \max\left(0, ((1-a)^p + (1-b)^p - 1)^{\frac{1}{p}}\right), p \neq 0$ Burada, $a = \mu_{\bar{U}_1}(x)$ ve $b = \mu_{\bar{U}_2}(y)$ dir.
$1 - \min\left(1, ((1 - \mu_{\bar{U}_1}(x))^w + (1 - \mu_{\bar{U}_2}(x))^w)^{\frac{1}{w}}\right), w \geq 1$	$\min\left(1, (\mu_{\bar{U}_1}(x)^w + \mu_{\bar{U}_2}(x)^w)^{\frac{1}{w}}\right), w \geq 1$

3.1.3 Zadeh'in Genişleme Prensibi

Bulanık ortamda cebirsel işlemlerin ve bağıntının temelini Zadeh'in (1965) genişleme prensibi oluşturur (Tanım 3).

Tanım 3. E ve F – evrensel kümelerde tanımlı ($i = 1, 2, \dots, n$ için $\tilde{U}_i \subset E, \tilde{V} \subset F$) \tilde{U}_i ve \tilde{V} bulanık kümeleri için $x_i \in \tilde{U}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ve $y \in \tilde{V}$ olsun. $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \times \dots \times \tilde{U}_n$ ve $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere $f(\underline{x}): E \rightarrow F$ ile tanımlı eşleşme (yani $y = f(\underline{x})$) varsa \tilde{V} bulanık kümesi Zadeh'in genişleme prensibine göre,

$$\tilde{V} = f(\tilde{U}) = f\left(\frac{\mu_{\tilde{U}_1}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{U}_2}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{U}_n}(x_n)}{x_n}\right) = \frac{\mu_{\tilde{U}_1}(x_1)}{f(x_1)} + \frac{\mu_{\tilde{U}_2}(x_2)}{f(x_2)} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{U}_n}(x_n)}{f(x_n)} \quad (3)$$

ile ifade edilir (Eşitlik 3).

3.1.4 Bulanık Sayılar ve Üyelik Fonksiyonları

İnsan algısına dayanan öznel değerlendirmelerde bulanık kümelerin özel hali olan bulanık sayıların kullanımı yaygındır. E – evrensel küme ve $\tilde{U} \subset E$ olmak üzere, E 'nin her x elemanı için $\tilde{U} = \{x \in E: (x, \mu_{\tilde{U}}(x))\}$ bulanık kümesi Tablo 3.5'de verilen özellikleri sağlarsa bulanık sayı olarak tanımlanır (Pedrycz, 1989; Başkır, 2011).

Tablo 3.5: Bulanık sayılar ve özellikleri

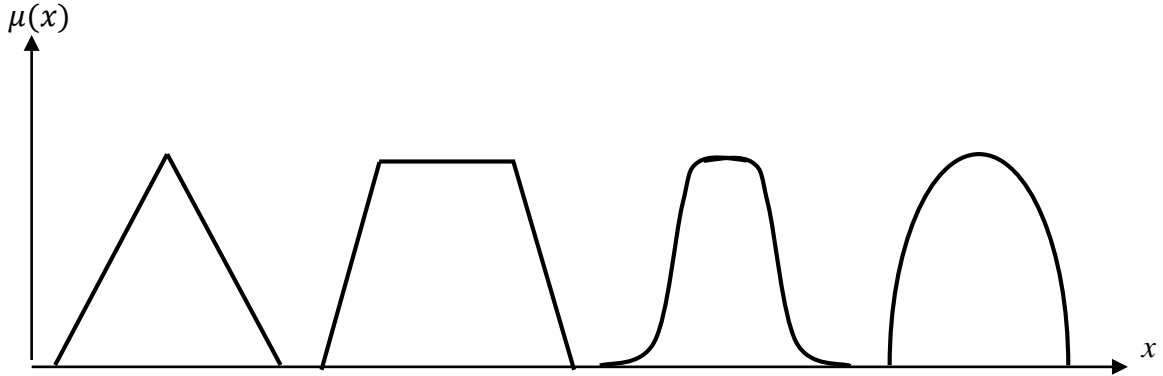
Özellik	Matematiksel gösterim
Normal bulanık küme olması	$\sup[\mu_{\tilde{U}}(x)] = 1, \exists x \in E$
Dışbükey bulanık küme olması	$x_1, x_2 \in E$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere $\mu_{\tilde{U}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{U}}(x_1), \mu_{\tilde{U}}(x_2))$ dir.
Destek kümesinin sınırlı olması	$Destek(\tilde{U}) = \{x \in E : 0 < \mu_{\tilde{U}}(x) < 1\}$
α -kesitlerin gerçel sayı doğrusunun kapalı aralığında tanımlı olması	$\forall \alpha \in [0, 1]$ için $\tilde{U}^\alpha = \{\forall x \in E: \mu_{\tilde{U}}(x) \geq \alpha\}$ olmak üzere $\tilde{U}^\alpha = [x_L^\alpha, x_R^\alpha]$ dir.

Bulanık sayılar ve üyelik fonksiyonlarına ilişkin örnek gösterimler Tablo 3.6'daki gibidir.

Tablo 3.6: Bulanık sayı ve üyelik fonksiyonu örnekleri

Bulanık sayı	Üyelik fonksiyonu	Parametreleri
Üçgensel Bulanık Sayı (ÜBS)	$\mu_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{b-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \leq a \text{ veya } x \geq c \end{cases}$	a: alt sınır b: merkez c: üst sınır
Yamuksal Bulanık Sayı (YBS)	$\mu_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x \leq a \text{ veya } x \geq d \end{cases}$	a: alt sınır b: merkez alt sınır c: merkez üst sınır d: üst sınır
Gauss Bulanık Sayı (GBS)	$\mu_{\tilde{U}}(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$	c: konum (merkez) σ : şekil (std. sapma)
Genelleştirilmiş Çan Bulanık sayı (GÇBS)	$\mu_{\tilde{U}}(x) = \frac{1}{1 + \left \frac{x-c}{a}\right ^{2b}}$	a: genişlik b: eğri şekli c: merkez

Bazı bulanık sayılar için üyelik fonksiyonlarının gösterimleri Şekil 3.1’de verilmektedir.



Şekil 3.1: Bazı bulanık sayılar için üyelik fonksiyonlarının gösterimleri

Literatürde sıkça kullanılan üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar Dubois ve Prade’in (1980) önerdiği LR tipi bulanık sayıların (Tanım 4) özel hallerindedir.

Tanım 4. $L, R: [0,1] \rightarrow [0,1], L(0) = R(0) = 0$ ve $L(1) = R(1) = 1$ olmak üzere $L(x)$ ve $R(x)$, sırasıyla, sol ve sağ kısımlara ait (karakteristik) fonksiyonlar olsun. \tilde{U} bulanık sayısı

($\tilde{U} \subset E$ - evrensel küme), $a \leq b$ ve $\sigma, \beta > 0$ için Eşitlik 4 ile verilen üyelik fonksiyonuna sahipse LR-tipidir (Dubois ve Prade, 1980).

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\sigma}\right), & a-\sigma \leq x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ R\left(\frac{b-x}{\beta}\right), & b < x \leq b+\beta \\ 0, & \text{d.y} \end{cases} \quad (4)$$

Bulanık sayılarda temel aritmetiksel işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) klasik sayılardaki gibi uygulanabilir. Öte yandan, α -kesitlerle yapılan aritmetik işlemler, bulanık sayılarla yapılan işlemlere göre daha duyarlı sonuçlar verir (Kaufmann ve Gupta, 1985). Bulanık sayılarda aritmetik işlemler için α -kesit ve genişleme kuralı yöntemlerinin kullanımı yaygındır. Tablo 3.7’de E -evrensel kümede tanımlı \tilde{U}_1 ve \tilde{U}_2 bulanık sayıları ile bazı işlemler için α -kesit (\tilde{U}_1 ve \tilde{U}_2 nin α -kesitleri $\tilde{U}_1^\alpha = [x_{1,L}^\alpha, x_{1,R}^\alpha]$ ve $\tilde{U}_2^\alpha = [x_{2,L}^\alpha, x_{2,R}^\alpha]$ olmak üzere) ve genişleme kuralı yöntemleri verilmektedir. α -kesitler ve genişleme kuralı ile yapılan aritmetiksel işlemlerin sonuçları özdeştir.

Tablo 3.7: Bulanık sayılarda bazı temel işlemler

Cebirsel işlem	α -kesit yöntemi	Genişleme kuralı
Toplama	$\tilde{U}_1^\alpha + \tilde{U}_2^\alpha = [x_{1,L}^\alpha + x_{2,L}^\alpha, x_{1,R}^\alpha + x_{2,R}^\alpha]$	$\underbrace{\text{maksmin}}_{x_1+x_2}(\mu_{\tilde{U}_1}(x_1), \mu_{\tilde{U}_2}(x_2))$
Çıkarma	$\tilde{U}_1^\alpha - \tilde{U}_2^\alpha = [x_{1,L}^\alpha - x_{2,R}^\alpha, x_{1,R}^\alpha - x_{2,L}^\alpha]$	$\underbrace{\text{maksmin}}_{x_1-x_2}(\mu_{\tilde{U}_1}(x_1), \mu_{\tilde{U}_2}(x_2))$
Çarpma	$\tilde{U}^\alpha \times \tilde{V}^\alpha = [x_{1,L}^\alpha \times x_{2,L}^\alpha, x_{1,R}^\alpha \times x_{2,R}^\alpha]$	$\underbrace{\text{maksmin}}_{x_1 \times x_2}(\mu_{\tilde{U}_1}(x_1), \mu_{\tilde{U}_2}(x_2))$
Bölme	$\tilde{U}^\alpha / \tilde{V}^\alpha = [x_{1,L}^\alpha / x_{2,R}^\alpha, x_{1,R}^\alpha / x_{2,L}^\alpha]$	$\underbrace{\text{maksmin}}_{x_1/x_2}(\mu_{\tilde{U}_1}(x_1), \mu_{\tilde{U}_2}(x_2))$

Öznel değerlendirmelere dayalı karar verme süreçlerinde hesaplama kolaylığı bakımından ÜBS/YBS’lerin ve α -kesite dayalı temel işlemlerinin kullanımı yaygındır.

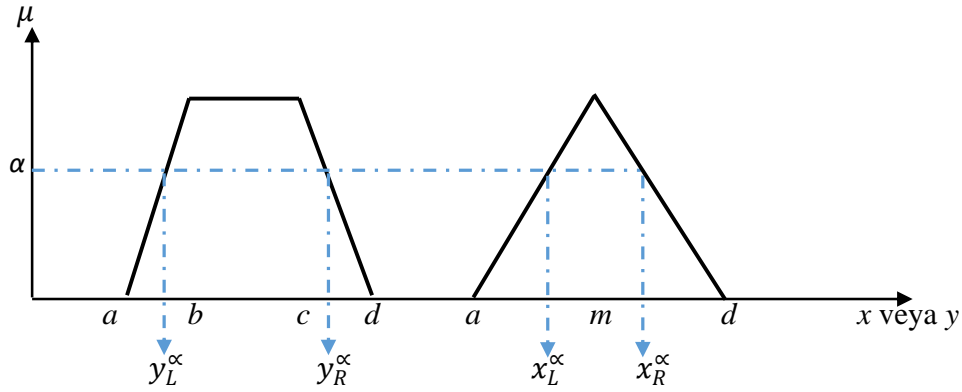
E -evrensel kümede tanımlı \tilde{U}_i ve \tilde{V}_i bulanık sayıları ele alınsın. a_i ve d_i parametreleri alt ve

üst sınırlar, b_i ve c_i ise merkez alt ve merkez üst sınırlar olmak üzere $\tilde{V}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ ile verilen YBS'dir. $\tilde{V}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ YBS'de $b_i = c_i = m_i$ durumu ÜBS'dir. Buna göre, $\tilde{U}_i = (a_i, m_i, d_i)$ ÜBS'de a_i ve d_i parametreleri alt ve üst sınırları, m_i ise merkezi gösterir. \tilde{V}_i YBS ve \tilde{U}_i ÜBS için α -kesit aralıklar, sırasıyla, Eşitlik 5 ve Eşitlik 6'daki gibi oluşur ($\alpha \in [0,1]$ için).

$$\tilde{V}_i^\alpha = [y_{i,L}^\alpha, y_{i,R}^\alpha] = [a_i + \alpha(b_i - a_i), d_i - \alpha(d_i - c_i)] \quad (5)$$

$$\tilde{U}_i^\alpha = [x_{i,L}^\alpha, x_{i,R}^\alpha] = [a_i + \alpha(m_i - a_i), d_i - \alpha(d_i - m_i)] \quad (6)$$

\tilde{V}_i YBS ve \tilde{U}_i ÜBS için α -kesit örnek gösterimleri Şekil 3.2'de verilmektedir.



Şekil 3.2: YBS ve ÜBS α -kesit örnek gösterimleri

Bulanık sayılarda aritmetik işlemler için örnek bir anlatım E -evrensel kümede tanımlı $i = 1,2$ için \tilde{U}_i üçgensel bulanık sayıları ve bunların α -kesit aralıkları için aşağıda verilmektedir: E -evrensel kümede tanımlı $\tilde{U}_1 = (2,4,6)$ ve $\tilde{U}_2 = (1,3,5)$ üçgensel bulanık sayıları ele alınsın. Eşitlik 6'ya göre \tilde{U}_1 ve \tilde{U}_2 'nin α -kesit aralıkları $\tilde{U}_1^\alpha = [x_{1,L}^\alpha, x_{1,R}^\alpha] = [2 + 2\alpha, 6 - 2\alpha]$ ve $\tilde{U}_2^\alpha = [x_{2,L}^\alpha, x_{2,R}^\alpha] = [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha]$ bulunur ($\alpha \in [0,1]$). Buna göre, $\alpha = 0.5$ için,

$$\tilde{U}_1^{0.5} + \tilde{U}_2^{0.5} = [3,5] + [2,4] = [5,9]$$

$$\tilde{U}_1^{0.5} - \tilde{U}_2^{0.5} = [3,5] - [2,4] = [-1,3]$$

$$\tilde{U}_1^{0.5} \times \tilde{U}_2^{0.5} = [3,5] \times [2,4] = [6,20]$$

$$\tilde{U}_1^{0.5} / \tilde{U}_2^{0.5} = [3,5] / [2,4] = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{2} \right]$$

$k > 0$ sabiti için $k \times \tilde{U}_2^{0.5} = k \times [2,4] = [2k, 4k]$ bulunur.

3.2. Z-Sayılar ve Bilginin Güvenilirliği

Karar problemlerinin içerdiği belirsizlikler insan yargısı, verinin kesin doğası ve analitik yaklaşımlardaki sınırlamalar kaynaklıdır. Tip-1 bulanık küme ve birincil üyeliği (Zadeh, 1965; 1975) bu belirsizliklerin modellenmesi ve sonuç çıkarımı ile karar alma süreçlerini daha etkin kılar. Birincil üyeliklerin kesin yapısı kaynaklı belirsizlikleri gidermek üzere tip-1 bulanık kümelerin genişletilmiş türleri (uzantıları) vardır. Bunlardan bazıları, tip-2 bulanık kümeler (Zadeh, 1975), sezgisel bulanık kümeler (Atanassov, 1986; 1999), nütrosifik kümeler (Smarandache, 1998), Z-sayıları (Zadeh, 2011) ve benzeridir. Bu uzantılardan Z-sayıları Zadeh (2011) tarafından bilginin güvenilirliğini ölçmek üzere önerilmiştir. Karar alma süreçleri, insanların belirsiz, eksik ya da kesin olmayan bilgilere dayanarak aldıkları rasyonel kararlarla sonuçlanabilir. Zadeh (2011), rasyonel karar alma süreci için bilginin güvenilirliğini ölçen Z-sayılarını literatüre katmıştır. Z-sayıların temeli bulanık sayılara dayanır. Bulanık kümelere dayalı modelleme ve sonuç çıkarımında hesaplama kolaylığı açısından bulanık sayıların kullanımı yaygındır.

Bu tez çalışmasının temeli olan sürekli Z-sayılar için gerekli olan sürekli bulanık sayılarda olasılık ölçüsü (Zadeh, 1968) Tanım 5’de verilmektedir.

Tanım 5. X , olasılık yoğunluk fonksiyonu p olan sürekli bir rastgele değişken olsun. \tilde{A} , X 'in değerleri üzerindeki olasılıksal kısıtlamayı tanımlayan sürekli bir bulanık sayı olsun. \tilde{A} 'nın $P(\tilde{A})$ ile gösterilen olasılık ölçüsü Eşitlik 7 ile tanımlanır:

$$P(\tilde{A}) = \int_R \mu_{\tilde{A}}(x)p(x)dx \quad (7)$$

3.2.1 Z-Sayıların Tanıtılması

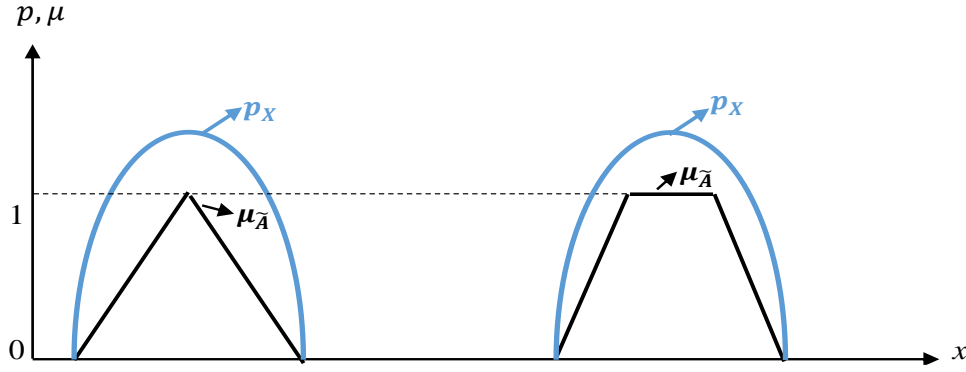
Zadeh’in (2011) bilginin belirsizliğini modellemek için önerdiği Z-sayısı Tanım 6’da ifade edilmektedir.

Tanım 6. Bir Z-sayısı rastgele değişken X üzerindeki kısıtlama (\tilde{A}) ve bunun güvenilirliği (\tilde{B}) olmak üzere (\tilde{A}, \tilde{B}) sıralı ikilisinden oluşur. Buna göre, $Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ açılımı şöyledir:

X, \tilde{A} dır; burada $X \in S$ bir rastgele değişkendir ve $P(X, \tilde{A}$ dır), \tilde{B} dir $\Leftrightarrow \int_S \mu_{\tilde{A}}(s)p_X(s)ds,$

\tilde{B} dir; burada X 'in gizli olasılık yoğunluk fonksiyonu olan p_X bilinmemekle birlikte kendisi bir bulanık sayıdır (Zadeh, 2011; Ezadi ve Allahviranloo, 2018; Liu vd., 2020).

Üyelik fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ile Z-sayısı için örnek gösterimler Şekil 3.3'de verildiği gibidir.



Şekil 3.3: Z-sayısı örnek gösterimleri

Z-değerlemesi $(x, \tilde{A}, \tilde{B})$ ile gösterilir ve X 'in \tilde{B} olasılığı ile \tilde{A} değerini aldığını ifade eder. Z-değerlemenin derlemesi Z-bilgisidir, yani Z, X 'in değeri hakkında bilgi sağlar (Yager, 2012). Z-değerlemesi $P(X, \tilde{A} \text{ dir} | \tilde{B})$ dir ($Prob(X \text{ is } \tilde{A} | \tilde{B})$ olarak ifade edilebilir (Zadeh, 2011; Aliev vd., 2015; Liu vd., 2020). Doğal dilde birçok önerme Z-değerlemesi ile belirtilebilir. Örneğin, “Genellikle, Bartın’dan Ankara’ya otobüs seyahati yaklaşık 4 saat sürer” önermesinin Z-değerlemesi (Bartın’dan Ankara’ya otobüs ile seyahat süresi, Yaklaşık 4 saat, Genellikle) biçimindedir. Z-değerlemesi $(x, \tilde{A}, \tilde{B})$ formunda bazı önerme örnekleri aşağıdaki gibidir:

(Zeynep’in yaşı, Genç, Büyük ihtimalle)

(Bill’in serveti, 12 milyar, Mümkün değil)

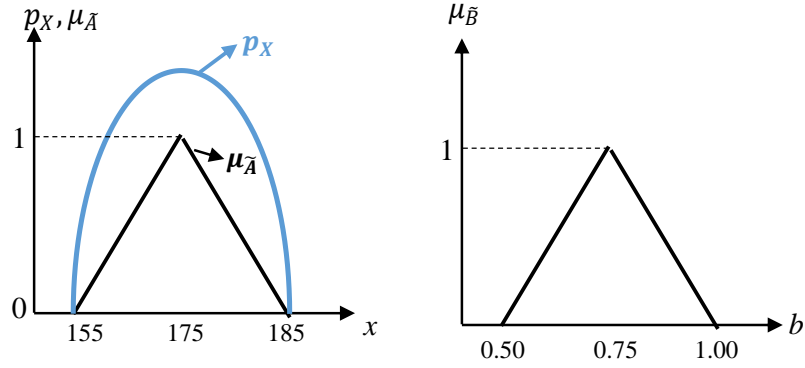
(Türkiye nüfusu, yaklaşık 86 milyon, Oldukça emin)

(Ev-ofis arası araba ile ulaşım süresi, yaklaşık 15 dakika, Muhtemel)

(Hayko’nun boy uzunluğu, Yaklaşık 175 cm, Büyük ihtimalle)

Yukarıda verilen Z-değerlemesi $(x, \tilde{A}, \tilde{B})$ formundaki önerme örneklerinde Z-sayısı $Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ formundadır. Örnek olarak, (Hayko’nun boy uzunluğu, Yaklaşık 175 cm, Büyük ihtimalle) için $Z = (\tilde{A}: \text{Yaklaşık } 175 \text{ cm}, \tilde{B}: \text{Büyük ihtimalle})$ dir. Buna göre, $Z =$

(\tilde{A} : Yaklaşık 175 cm, \tilde{B} : Büyük ihtimalle) için Z-sayısının yalın bir gösterimi Şekil 3.4'deki gibi olabilir.



Şekil 3.4: $Z = (\tilde{A}: \text{Yaklaşık } 175 \text{ cm}, \tilde{B}: \text{Büyük ihtimalle})$ için Z-sayısı örnek gösterimi

$Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ ile gösterilen bir Z sayısının kesikli veya sürekli Z-sayısı olma durumu aşağıdaki gibi belirlenir:

- i. Eğer X 'in bulanık kısıtlaması \tilde{A} kesikli bulanık küme ($\mu_{\tilde{A}}: \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow [0,1], \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}$) ve \tilde{A} için güvenilirlik ölçüsü \tilde{B} kesikli bulanık küme ($\mu_{\tilde{B}}: \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \rightarrow [0,1], \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in [0,1]$) ise $Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ kesikli bir Z-sayıdır (Aliev vd., 2015; Li vd., 2024).
- ii. Eğer X 'in bulanık kısıtlaması \tilde{A} sürekli bulanık küme ($\mu_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$) \tilde{A} için güvenilirlik ölçüsü \tilde{B} sürekli bulanık küme ($\mu_{\tilde{B}}: [0,1] \rightarrow [0,1]$) ise $Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ sürekli bir Z-sayıdır (Aliev vd., 2016; Li vd., 2024).

Z-sayısı ile yakından ilişkili olan Z^+ -sayısı \tilde{A} bulanık sayı ve R rastgele sayı olmak üzere (\tilde{A}, R) sıralı ikilisinden oluşur ve $Z^+ = (\tilde{A}, R)$ ile gösterilir (Zadeh, 2011; Aliev vd., 2016). $Z^+ = (\tilde{A}, R)$ bileşenlerinden \tilde{A} , Z-sayısındaki gibi, bulanık kısıtlama; R ise Z-değerlemesinde temel olasılık yoğunluğu olarak da kabul edilebilecek rastgele bir sayının olasılık dağılımıdır. Benzer şekilde, Z^+ -değerleme kavramı, Z-değerlemeye göre elde edilebilir. Z^+ -değerleme (X, \tilde{A}, R) veya (X, \tilde{A}, p_X) olarak ifade edilir. Z^+ -sayısı ile hesaplamalar Z-sayısı ile hesaplamalardan daha az karmaşıktır. Z^+ -sayısı ile Z-sayısı arasındaki ilişki Eşitlik 8'deki gibidir (Shen vd., 2018).

$$Z(\tilde{A}, \tilde{B}) = Z^+(\tilde{A}, \mu_{\tilde{A}}, p_X, \tilde{B} \text{ dir}) \quad (8)$$

3.2.2 Z-Sayılar Aritmetiksel İşlemler

Z-sayılar aritmetiği olasılıksal ve bulanık aritmetiğin mekanik toplamı yerine bunların sinerjisi ile ilgilenir (Zadeh, 2011; Aliev vd., 2016). Bu kapsamda, Z-sayılar üzerinde aritmetiksel işlemler karmaşıktır. Gerçek yaşama özgü karar alma problemlerinin temelini Z-sayılar ve aritmetiği sıklıkla oluşturur. Örneğin, bir firmanın iki alternatif yatırım planı (Alternatif-1 ve Alternatif-2) olsun. Bu yatırım planlarından Alternatif-1'in bir yıl sonraki getirisi (yüksek, muhtemel), Alternatif-2'nin ise (orta, çok muhtemel) olarak tanımlansın. Burada, Alternatif-1 için verilen dilsel ifadelerin üçgensel bulanık sayıları yüksek=(45 bin, 55 bin, 65 bin) ve muhtemel=(0.75, 0.85, 0.95); Alternatif-2 için verilen dilsel ifadelerin üçgensel bulanık sayıları ise orta=(25 bin, 35 bin, 45 bin) ve çok muhtemel=(0.85, 0.95, 1.00) olsun. Her iki yatırımın getirisi ile ilgilenilsin. Alternatif-1'e ait Z-sayısı $Z_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$, Alternatif-2'ye ait Z-sayısı ise $Z_2 = (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ ile gösterilsin. Buna göre, her iki yatırımın getirisi üzerindeki bulanık kısıtlama için $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ hesaplanır. Öte yandan, \tilde{A}_1 ve \tilde{A}_2 için verilen \tilde{B}_1 ve \tilde{B}_2 güvenilirlikleri kısmi olduğundan getiriler üzerinde R_1 ve R_2 olasılıksal kısıtlamalar vardır ve bunlar p_1 ve p_2 olasılık yoğunluk fonksiyonları ile tanımlanabilir. \tilde{B}_1 ve \tilde{B}_2 , sırasıyla, \tilde{A}_1 ve \tilde{A}_2 'nin olasılık ölçülerinin değerleri üzerinde bulanık kısıtlamalardır. Buna göre, p_1 ve p_2 , sırasıyla, \tilde{B}_1 ve \tilde{B}_2 'de bazı üyelik dereceleri ile \tilde{A}_1 ve \tilde{A}_2 'nin olasılık ölçüleri olan b_1 ve b_2 'nin sayısal değeri üzerinde etki yaratan olasılık yoğunluk fonksiyonları olarak bulunabilir (Aliev vd., 2016). p_1 ve p_2 verildiğinde, her iki alternatif yatırımın toplam getirisi üzerindeki olasılıksal kısıtlama, rastgele değişkenlerin toplamı $R_{12} = R_1 + R_2$ ile hesaplanır. Olasılık aritmetiğine göre R_{12} için p_{12} olasılık yoğunluk fonksiyonu $p_{12} = p_1 \circ p_2$ konvolüsyonu ile hesaplanır. Buna göre, alternatiflerin getiri toplamı üzerinde \tilde{A}_{12} bulanık kısıtlaması ve p_{12} olasılıksal kısıtlama belirlenir. p_1 ve p_2 , μ_1 ve μ_2 üyelik fonksiyonları ile dağılımların bulanık kümelerini oluşturur. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonların bulanık kümeleri doğal olarak üyelik fonksiyonu $\mu_{p_{12}}$ ile p_{12} konvolüsyonların bulanık kümeleri üzerinde etki yaratır. Bu nedenle, \tilde{B}_{12} kısmi güvenilirliği, p_{12} konvolüsyonların bulanık kümesi tarafından indüklenen olasılık ölçüsü değerlerinin bulanık kümesi olarak oluşturulacaktır. Yani, $\mu_{p_{12}}$ ve \tilde{A}_{12} ile alternatiflerin gelecek yılki getirisine ilişkin bulanık değerlerin kısmi güvenilirliğini biçimlendirmek için $\mu_{\tilde{B}_{12}}$ oluşturmalıdır.

Z-sayılar üzerinde aritmetiksel işlemler olasılıksal kısıtlama ve bulanık aritmetiği birleşimini içerdiği için karmaşıktır. Z^+ -sayılarla aritmetiksel işlemler Z-sayılar aritmetiğine göre daha az karmaşık hesaplamalar içerir. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerin sürekli Z-sayıları $Z_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ ve $Z_2 = (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ olsun. $*$ $\in \{+, -, \times, \div\}$ için $Z_{12} = Z_1 * Z_2$ hesabı $Z_1^+ = (\tilde{A}_1, R_1)$ ve $Z_2^+ = (\tilde{A}_2, R_2)$ olmak üzere $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+ = (\tilde{A}_1 * \tilde{A}_2, R_1 * R_2)$ işlemi ile yapılır. Burada R_1 ve R_2 nin olasılık yoğunluk fonksiyonu p_{R_1} ve p_{R_2} dir. Burada, $*$ operatörü toplam ve X_1 ve X_2 'nin bağımsız olduğu varsayılın. $\tilde{A}_1 * \tilde{A}_2$ ve $R_1 * R_2$ 'deki işlemler farklı türdeki kısıtlamalarla temsil edildiğinden $*$ 'in anlamları da farklıdır (Zadeh, 2011).

Buna göre, $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ ve $R_1 + R_2$ eşitliklerdeki gibi tanımlanır (Eşitlik 9 ve Eşitlik 10).

$$\mu_{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}(x) = \sup_{x_1} (\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x - x_1)\}) \quad (9)$$

$$p_{12}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_1(x_1)p_2(x - x_1)dx_1 \quad (10)$$

Böylece, $Z_{12}^+ = (\tilde{A}_{12}, p_{12})$ elde edilir. p_1 ve p_2 olasılık yoğunluk fonksiyonları bilinmiyor ancak bulanık kısıtlamaları üyelik fonksiyonu gösterimi ile Eşitlik 11-12'deki gibidir ($i = 1, 2$ için).

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)p_i(x_i)dx_i, \tilde{B}_i \text{ dir} \quad (11)$$

$$\mu_{p_{R_1}}(p_{R_1}) = \mu_{\tilde{B}_i} \left(\int_{\mathbb{R}} \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)p_i(x_i)dx_i \right) \quad (12)$$

Buna göre, p_{12} hakkında mevcut bilgi için bulanık kısıtlama yapısı Eşitlik 13-17'deki gibidir.

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \sup_{p_{R_1}, p_{R_2}} (\min\{\mu_{p_{R_1}}(p_{R_1}), \mu_{p_{R_2}}(p_{R_2})\}), \quad (13)$$

Kısıtlar:

$$p_{R_1 + R_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{R_1}(x)p_{R_2}(x - x_1)dx \quad (14)$$

$$\mu_{p_i}(p_{R_i}) = \mu_{\tilde{B}_i} \left(\int_R \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) p_i(x_i) dx_i \right), i = 1,2 \quad (15)$$

$$\int_R p_{R_i}(x_i) dx_i = 1, i = 1,2 \quad (16)$$

Uyumluluk koşulları:

$$\int_R x_i p_i(x_i) dx_i = \frac{\int_R x_i \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) dx_i}{\int_R \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) dx_i}, i = 1,2 \quad (17)$$

$\mu_{p_{R_1+R_2}}$ oluşturulduktan sonra \tilde{B}_{12} 'nin belirlenmesi için en iyileme problemi,

$$\mu_{\tilde{B}_{12}}(b_{12}) = \sup \left(\mu_{p_{R_1+R_2}}(p_{R_1+R_2}) \right) \quad (18)$$

Kısıt:

$$b_{12} = \int_R p_{R_1+R_2}(x) \mu_{\tilde{A}_{12}}(x) dx \quad (19)$$

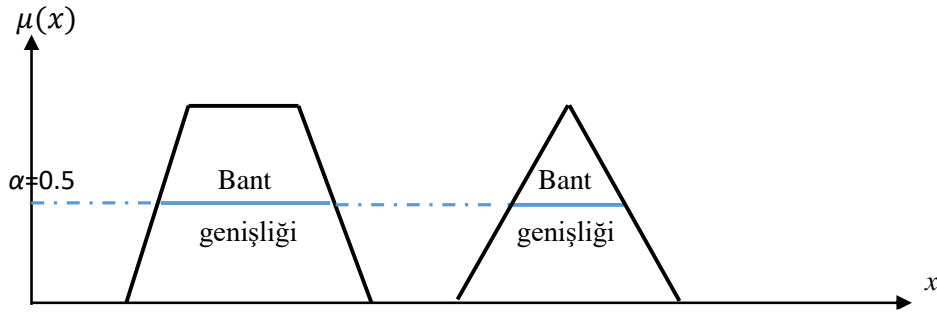
biçimindedir (Eşitlik 18-19). Böylece, $Z_{12} = (\tilde{A}_{12}, \tilde{B}_{12})$ hesaplanır.

Zadeh (2011), Z-sayılarla hesaplamalara ilişkin bulanık ve olasılığa dayalı aritmetiğin bir birleşimini temsil eden, karmaşık optimizasyon ve varyasyonel problemleri içeren bir yaklaşımın ana hatlarını belirlemiştir (Zeinalova vd., 2018). Zadeh (2011) tarafından Z-sayılarla hesaplamalarda kolaylık sağlayan bant genişliği yaklaşımı önerilmiştir. Bu yöntemde, bir Z-sayısının \tilde{A} bulanık sayısına bant genişliği olarak bir aralık değerli üyelik fonksiyonu (\tilde{A}^b) ile yaklaşım uygulanır. Bant genişliği olarak α -kesit kullanılabilir. İki Z-sayısı için bant genişliği yöntemi Tanım 7'de verilmektedir (bkz. Zadeh, 2011; Aliev vd., 2017).

Tanım 7. $Z_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ ve $Z_2 = (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ Z-sayılar ve $* \in \{+, -, /, \times\}$ temel aritmetik işlem olsun. Buna göre, Z-sayıları üzerinden herhangi bir işlem Eşitlik 20 ile bulunur.

$$(\tilde{A}_1^b, \tilde{B}_1) * (\tilde{A}_2^b, \tilde{B}_2) = (\tilde{A}_1^b * \tilde{A}_2^b, \tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2) \quad (20)$$

Burada * ikili bir işlemdir ve $\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$, \tilde{B}_1 ve \tilde{B}_2 bulanık sayılarının çarpımıdır. Bant genişliği yöntemi, olasılık ölçümlerinin \tilde{B}_1 ve \tilde{B}_2 bulanık değerlerinin çarpımı için Z-sayıların hesaplanmasındaki olasılık aritmetiğinin yaklaşık işlemlerine izin verir (Aliev vd. 2017, Zeinalova vd., 2018). Böylece, Z sayılarda işlem karmaşıklığı önemli ölçüde azalır. Bulanık sayılarda aralık değerli yaklaşım olarak bant genişliği örnek gösterimleri Şekil 3.5'de verilmektedir.



Şekil 3.5: Bant genişliği örnek gösterimler

Örnek olarak $Z_1 = ((3,4,5), (0.7,0.8,0.9))$ ve $Z_2 = ((6,7,8), (0.6,0.7,0.8))$ ele alınsın. Bant genişliği yöntemine göre $Z = Z_1 + Z_2$ hesaplanmak istensin. $Z_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ ve $Z_2 = (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ formunda verilen Z-sayılarında $\tilde{A}_1 = (3,4,5)$ ve $\tilde{A}_2 = (6,7,8)$ bant genişlikleri olarak $\tilde{A}_1^b = [3,5]$ ve $\tilde{A}_2^b = [6,8]$ alınsın. Buna göre, $Z = Z_1 + Z_2$ için bulanık aritmetiğe dayalı bant genişliği yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır.

$$\begin{aligned} Z = Z_1 + Z_2 &= (\tilde{A}_1^b, \tilde{B}_1) + (\tilde{A}_2^b, \tilde{B}_2) \\ &= (\tilde{A}_1^b + \tilde{A}_2^b, \tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2) \\ &= ([3,5] + [6,8], (0.7,0.8,0.9) \times (0.6,0.7,0.8)) \\ &= ([3 + 6, 5 + 8], (0.7 \times 0.6, 0.8 \times 0.7, 0.9 \times 0.8)) \\ &= ([9,13], (0.42,0.56,0.72)) \end{aligned}$$

3.3. Bulanık Ortamda Regresyon Çözümlemesi

Karar problemlerinin odağında gerçek yaşama özgü sistem bileşenleri (girdi-çıkıtı değişkenler) arasındaki ilişkinin matematiksel/istatistiksel modellenmesi yer alır. Sistem bileşenleri olan çıkıtı (bağımlı, açıklanan) ve girdi (bağımsız, açıklayıcı) değişkenleri arasındaki fonksiyonel bağıntının oluşturulmasında ve gerekli tahminlerin yapılmasında klasik regresyon analizi sıkça kullanılır. Klasik ortamda bir sistem tek girdi-tek çıkıtı, çok girdi-tek çıkıtı veya çok girdi-çok çıkıtı bileşenlerden oluşabilir. Genel olarak, bir sistemin girdi-çıkıtı değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlamak için ortaya konacak matematiksel modelde oransal değişim yapısına göre doğrusal veya doğrusal olmayan, değişken sayısına göre basit veya çoklu regresyon analizi türleri mevcuttur. Matris gösterimi ile bir regresyon modeli, $\underline{Y}: n \times 1$ boyutlu rastgele (gözlemlerin) vektörü, $X: n \times p$ ($n > p$) boyutlu bilinen sayıların matrisi, $\underline{\beta}: p \times 1$ bilinmeyen parametrelerin vektörü, $\underline{\varepsilon}: n \times 1$ gözlenemeyen rastgele vektör (hataların vektörü) ve $E(\underline{\varepsilon}) = 0, Cov(\underline{\varepsilon}) = \Sigma$ olmak üzere,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (21)$$

biçimindeki lineer model yapısı ile varsayılan bir bağıntıdır (Eşitlik 21). $rank(X_{n \times p}) = p$ ($n > p$) ve $\underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$ olmak üzere $\underline{\beta}: p \times 1$ bilinmeyen parametrelerin vektörü için tahmin ($\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$, burada $(X'X)$ tersinir matristir) gerçekleştirilerek oluşturulan tahmin denklemi $\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$ dir.

Genel görünüm için örnek olarak, klasik ortamda tek girdi (X) ve tek çıkıtı (Y) bir sistem yapısı tanımlanmak istensin. Belirli bir x değerinde Y rastgele değişkenin koşullu ortalaması $E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$ varsayımı altında, $i = 1, 2, \dots, n$ için,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (22)$$

regresyon modeli ele alınsın (Eşitlik 22). Burada, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ birer rastgele değişkendir. Model katsayılarının (β_0, β_1) tahmini, hata kareler toplamı ($\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2$) minimum olacak şekilde En küçük kareler (EKK) tekniği ile belirlendiğinde,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{ ve } \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (23)$$

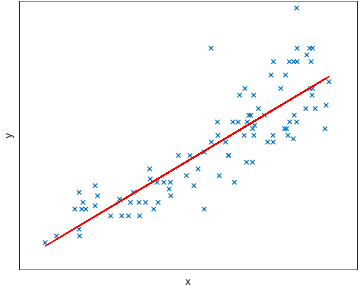
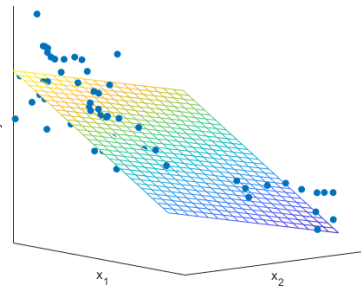
Eşitlik 23 için tahmin denklemi Eşitlik 24'deki gibi olur.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (24)$$

Burada, $i = 1, 2, \dots, n$ için $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_Y^2)$ ve ε_i 'ler bağımsızdır. Basit ve/veya çoklu doğrusal regresyon analizinde model katsayıların EKK tahmin süreci belirli varsayımlar altında gerçekleşir. Doğrusal olmayan regresyon analizinde model katsayılarının EKK tekniği ile tahmini için ilgili model doğrusal forma dönüştürülür.

Basit ve çoklu doğrusal regresyon modelleri için matematiksel gösterimler ve tahmin denkleminin ilişkin örnek grafiksel anlatımlar Tablo 3.8'deki gibidir.

Tablo 3.8: Basit ve çoklu doğrusal regresyon modelleri için örnek gösterimler

Model türü	Matematiksel gösterim	Tahmini denklemi için örnek grafiksel anlatım
Basit doğrusal	$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ <p>veya</p> $\begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$	
Çoklu doğrusal	$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon$ <p>veya</p> $\begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$	

Klasik regresyon kesin veri yapısına ve sistem bileşenleri (çıkıtı ve girdileri) arasında kesin ilişkiye dayanır. Gerçek yaşamda bir sistem bileşenleri kesin olmayan (belirsiz veya bulanık) veri yapısına ve hesaplamalara, sistem yapısının analitik çözümlemesinde varsayımların

sağlanmaması sorununa sahip olabilir. Bunun nedeni, sistem bileşenleri olan girdi (bağımsız) ve çıktı (bağımlı) değişkenler arasındaki ilişkinin kesin olmayan (belirsiz, bulanık) yapıda olması, çok küçük örneklem hacmi olması, ilgili dağılım varsayımlarının karşılanmaması, olaylara ilişkin anlam belirsizliği veya bilgilerin kesin olmayışı gibi durumlar kaynaklı ortaya çıkabilir (Shapiro, 2005; Wang ve Tsaur, 2000a; Chukhrova ve Johannssen, 2019). Kesin olmayan olgular durumunda veya ilgilenilen olgu stokastik değişkenlik yerine belirsiz bir değişkenliğe sahipse, bulanık bir ilişki varsaymak daha doğal bir yol gibi görünür (Coppi, 2008; Chukhrova ve Johannssen, 2019). Bu durumlarda, bulanık ortamda regresyon çözümlemesi klasik regresyonun alternatifi olarak kullanılır.

Chukhrova ve Johannssen (2019), kapsamlı literatür araştırmasında bulanık ortamda geliştirilmiş regresyon modellerini üç ana başlık altında toplamıştır. Bu ana başlıklar ve ilgili alt alanları aşağıdaki gibidir:

- Olabilirlik regresyon analizi
 - Doğrusal ve doğrusal olmayan
 - Amaç programlama
 - Aralık regresyon
- Bulanık en küçük kareler ve bulanık en küçük mutlak sapma yöntemleri
- Bulanık regresyonda makine öğrenme teknikleri
 - Evrimsel algoritmalar,
 - Destek vektörü makineleri
 - Yapay sinir ağları
 - Kümeleme (öbekleme) algoritmaları
 - Diğer yaklaşımlar

Bu üç ana başlık altında toplanan yaklaşımların birleşimi olan ve geleneksel bulanık kümelerin genelleştirilmiş hallerini içeren çalışmalar geliştirilebilir.

3.3.1 Olabilirlik Regresyon Modeli

Bulanık regresyon analizinde olabilirlik yaklaşımı ilk kez Tanaka vd. (1980; 1982) tarafından önerilmiştir. Olabilirlik modeli veya Tanaka modeli olarak bilinen bu yaklaşımda, belirli bir h seviyesi için gözlemlerin desteğini kapsayacak tahminlerin desteğine göre,

bulanık parametrelerin toplam yayılımını en aza indirerek modelin tüm bulanıklığı minimuma indirgenir. Bu yaklaşımda regresyon katsayıları simetrik ÜBS olarak tanımlanır. Dolayısıyla, tahmin edilen bulanık çıktı da simetrik üçgensel üyelik fonksiyonu yapısındadır. Bulanık model (Eşitlik 25),

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 + \sum_{j=1}^m \tilde{A}_j x_{ij} \quad (25)$$

dir. Burada, $\tilde{A}_j = (\alpha_j, c_j)$: i . bulanık parametre (α_j merkez (mod), c_j bulanıklık (yayılım)) ve x_{ij} : j . girdi değişkene ait i . gözlem değeri için $\tilde{Y}_i = (y_i, e_i)$: i . bulanık çıktı (y_i merkez (mod), e_i bulanıklık (yayılım)) dir.

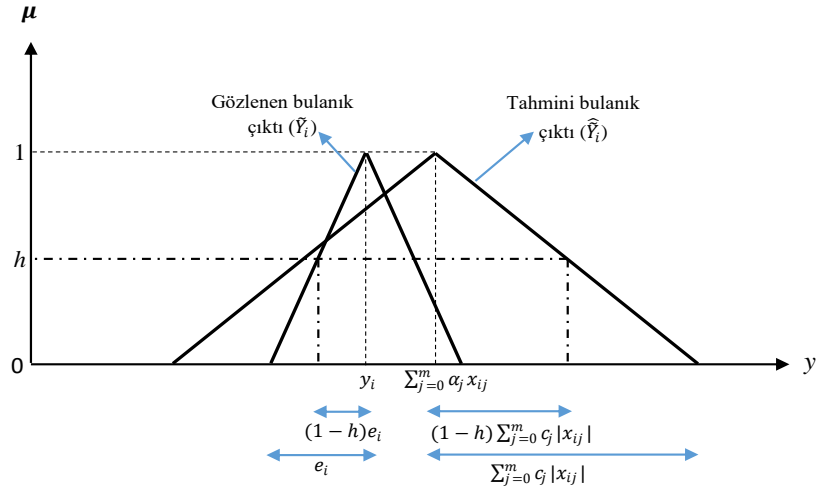
Desteklerin yalnızca örneklemin tüm veri noktalarını içermeye yeterli olması, tahmini bulanık regresyon modeli kullanılarak örneklem dışı projeksiyonda sınırlı bir güven oluşmasına neden olur (Shapiro, 2005). Bu durumda, bulanık regresyon için desteklerin genişletilmesi gerekir. Bulanık regresyonda tahmin edilen değer ile verilen veri arasındaki uyum derecesini gösteren h-faktörü (h-düzeyi) ile veri aralığının boyutu kontrol edilir ve üyelik fonksiyonu desteği genişletilir. Dolayısıyla, verilen bir veri seti için h-faktörü arttıkça sol ve sağ (\underline{c} ve \bar{c}) yayılımlar artar. Simetrik bulanık parametre için üyelik fonksiyonu ve h-düzeyi ile tahmini için h-kesit aralığı, sırasıyla, Eşitlik 26 ve Eşitlik 27'deki gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}_i}(a) = \min\left(1 - \frac{|a - a_i|}{c_i}, 0\right) \quad (26)$$

$$[a_i - (1 - h)\underline{c}_i, a_i + (1 - h)\bar{c}_i] \quad (27)$$

h-faktörü (h-düzeyi) bulanık sayılardaki α -kesitin tersine desteği genişletmek amacı ile kullanılır (Shapiro, 2005). h-düzeyi 0 ile 1 arasında değer alır, ancak 1 olamaz. Simetrik ÜBS'da h-faktörü değeri 1'dir. Yüksek h-faktörü değerleri, tahmin edilenin merkezini gözlemlenenin merkezine yakınlaştırır, tahminin belirsizliğini (bulanıklığını) artırır. Chen vd. (2016), bulanık regresyonda h parametresinin 0.5'i geçmemesi gerektiğini ifade etmiştir.

h-düzeyine göre düzeltilmiş gözlemlenen bulanık çıktı (\tilde{Y}_i), h-düzeyine göre düzeltilmiş tahmini bulanık çıktının (\hat{Y}_i) içinde yer almalıdır. h-düzeyine göre düzeltilmiş $\tilde{Y}_i = (y_i, e_i)$ ile $\hat{Y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_{i1}$ gösterimi Şekil 3.6’da verilmektedir.



Şekil 3.6: h-düzeyine göre düzeltilmiş \tilde{Y}_i ve \hat{Y}_i

Parametrelerin toplam bulanıklığını (belirsizliğini) en aza indirgeyen Tanaka vd.’nin (1982) doğrusal programlama problemi eşitliklerdeki gibi formüle edilir (Eşitlik 28-31).

$$\text{Amaç Fonksiyonu: } \min(z) = \sum_{j=0}^m c_j \quad (28)$$

Kısıtlar:

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij} + (1-h)[c_0 + \sum_{j=1}^m c_j |x_{ij}|] \geq y_i + (1-h)e_i \quad (29)$$

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij} - (1-h)[c_0 + \sum_{j=1}^m c_j |x_{ij}|] \leq y_i - (1-h)e_i \quad (30)$$

$$c_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (31)$$

Modelin toplam bulanıklığını (belirsizliğini) en aza indirmek üzere modifiye edilen ikinci modelde kısıtlar Eşitlik 29-31’deki gibi iken amaç fonksiyonu Eşitlik 32’deki gibi yapılandırılmıştır (Tanaka, 1987; Tanaka vd., 1989).

$$\text{Amaç Fonksiyonu: } \min(z) = \sum_{j=0}^m c_j |x_{ij}| \quad (32)$$

3.3.2 Bulanık En Küçük Kareler Modeli

Olabilirlik regresyon yaklaşımları programlamada/hesaplama basitlik içerir. Öte yandan, bu yaklaşımlarda minimum operatörlerle tanımlanan olabilirlik parametrelerinin etkileşimsiz ve çoğunlukla kesin yapıda olma sorunu bulanık regresyon parametresinin yayılımı sıfır olduğunda ortaya çıkar (Chukhrov ve Johannssen, 2019). Birçok araştırmacı bu yaklaşımların teori ve uygulama eksikliklerini gideren modeller önermiştir (Celmins, 1987a-b; Savic ve Pedrycz, 1991; Sakawa ve Yano, 1992; Redden ve Woodall, 1996; Wang ve Tsaur, 2000a-b). Bu kapsamda, bulanık regresyon analizi en küçük kareler (EKK) tekniği bakış açısı ile ilk kez Celmins (1987a; 1987b) ve Diamond (1988) tarafından ele alınmıştır. Bulanık EKK yönteminde, tahmin edilen bulanık değerler ile gözlenen bulanık değerler arasındaki farklılık, iki bulanık sayı arasındaki uyum ve mesafe gibi ölçülere göre en aza indirilir. Bulanık girdi ve bulanık çıktıdan oluşan bir regresyon modelinde ($\tilde{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}_i + \tilde{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) gözlenen ile tahmin edilen bulanık çıktılar arasındaki farklar (Eşitlik 33),

$$\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{Y}_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \tilde{x}_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

olmak üzere, EKK bakış açısına göre bu farklar Eşitlik 34'deki gibi en küçüklenir.

$$\min \sum (\tilde{\varepsilon}_i)^2 = \min \sum \left(\tilde{Y}_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \tilde{x}_i) \right)^2 \quad (34)$$

Celmins (1987a) bulanık gözlenen ile bulanık tahmin edilen çıktılar arasında uyum ölçüsüne dayanan bulanık EKK regresyon yaklaşımını önermiştir. Normalleştirilmiş üçgensel üyelik fonksiyonları $\mu_{\tilde{A}}$ ve $\mu_{\tilde{B}}$ ile \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıları arasındaki Celmins'in uyum ölçüsü ($\gamma(\tilde{A}, \tilde{B})$) Eşitlik 35'deki gibi tanımlanır.

$$\gamma(\tilde{A}, \tilde{B}) = \max_{x \in R} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad (35)$$

Burada, uyum ölçüsü değeri $\gamma \in [0, 1]$ olmak üzere, “ $\gamma = 0$ ise \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıların genişlikleri örtüşmez”; “ $\gamma = 1$ ise \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıların merkezleri çakışır” demektir (Celmins, 1987a; Chang ve Ayyub, 2001). Uyum ölçüsü γ ile h-düzeyi aynı amaç için

kullanılır. Celmins'in uyum yaklaşımında amaç, gözlenen çıktı ile tahmin edilen çıktı arasındaki uyumun en büyüklendiği bir model oluşturmaktır (Chang ve Ayyub, 2001; Shapiro, 2005). Buna göre, $W = \sum_{i=1}^n (1 - \gamma_i)^2$ ile verilen amaç fonksiyonunun en küçüklemesi hedeflenir. Bu yaklaşıma göre, en büyük uyum ile bulanık EKK için model,

$$\hat{Y} = \underbrace{a_0 + a_1 X}_{\text{modelin merkez doğrusu}} \pm \underbrace{\sqrt{c_0^2 + 2c_{01} + c_1^2 X^2}}_{\text{modelin alt ve üst sınırları}} \quad (36)$$

şeklindedir (Eşitlik 36). Burada, a_0 ve a_1 ağırlıklı EKK yöntemi ile, c_0 , c_1 ve c_{01} yineleme ve uyum ölçüsü ile belirlenir (Shapiro, 2005).

Diamond (1988) uzaklık ölçüsüne dayanan bulanık EKK regresyon yaklaşımını önermiştir. $\mathcal{T}(R)$ üzerinde tanımlı $\tilde{X} = (m_X, \underline{e}_X, \bar{e}_X)$ ve $\tilde{Y} = (m_Y, \underline{e}_Y, \bar{e}_Y)$ ÜBS'leri ele alınsın. Burada, m : merkez (mod), \underline{e} : sol yayılım, \bar{e} : sağ yayılımdır. \tilde{X} ve \tilde{Y} ÜBS'leri için uzaklık ölçüsü (L^2 metriği $d(\cdot)^2$),

$$d(\tilde{X}, \tilde{Y})^2 = (m_X - m_Y)^2 + \left((m_X - \underline{e}_X) - (m_Y - \underline{e}_Y) \right)^2 + \left((m_X + \bar{e}_X) - (m_Y + \bar{e}_Y) \right)^2$$

dir. $\mathcal{T}(R)$ üzerinde doğrusal bir yapı $(m_X, \underline{e}_X, \bar{e}_X) + (m_Y, \underline{e}_Y, \bar{e}_Y) = (m_X + m_Y, \underline{e}_X + \underline{e}_Y, \bar{e}_X + \bar{e}_Y)$, $k \geq 0$ olmak üzere $k(m, \underline{e}, \bar{e}) = (km, k\underline{e}, k\bar{e})$ ve $k < 0$ olmak üzere $k(m, \underline{e}, \bar{e}) = (km, |k|\bar{e}, |k|\underline{e})$ için tanımlanır (Hong vd., 2001). Buna göre, Diamond (1988)'in önerdiği üç model ve ilgili optimizasyon problemleri Tablo 3.9'daki gibidir.

Tablo 3.9: Diamond'ın bulanık EKK regresyon modelleri

Model No.	Regresyon modeli	Optimizasyon problemi
MN1	$Y = a + bX$ $a, b \in R; X \in \mathcal{T}(R)$	En küçükke $r(a, b) = \sum_{i=1}^n d(a + bX_i, Y_i)^2$
MN2	$Y = E + bX$ $b \in R; E, X \in \mathcal{T}(R)$	En küçükke $r(E, b) = \sum_{i=1}^n d(E + bX_i, Y_i)^2$
MN3	$Y = A + Bx$ $x \in R; A, B \in \mathcal{T}(R)$	En küçükke $r(A, B) = \sum_{i=1}^n d(A + Bx_i, Y_i)^2$

Tablo 3.9’da verilen MN1 ve MN2 bulanık girdi ve bulanık çıktı için, MN3 ise kesin girdi bulanık çıktı için tanımlanır (Diamond, 1988). MN2–regresyon modeli MN1–modelini genelleştirir. Tablo 3.9’daki modeller için tanımlanan optimizasyon problemleri $d(.)^2$ metriğine göre çözümlenir (bkz. Diamond, 1988).

TGTC sistem bileşenleri ÜBS ($\tilde{X} = (x, \underline{e}_x, \bar{e}_x)$ ve $\tilde{Y} = (y, \underline{e}_y, \bar{e}_y)$) ve model parametreleri kesin sayı (a, b) iken Eşitlik 37’deki model ele alınsın.

$$\tilde{Y} = a + b\tilde{X} \quad (37)$$

Buna göre, EKK optimizasyon problemi Eşitlik 38’deki gibidir (Diamond, 1988; Şanlı ve Apaydın, 2004).

$$\begin{aligned} \text{Min } r(a, b) &= \sum d(a + b\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i)^2 \\ &= \sum \left([a + bx_i - y_i - (b\underline{e}_{x_i} - \underline{e}_{y_i})]^2 + [a + bx_i - y_i + (b\bar{e}_{x_i} - \bar{e}_{y_i})]^2 \right) + (a + bx_i - y_i)^2 \end{aligned} \quad (38)$$

Burada kesin yapıdaki katsayılar $\frac{\partial d}{\partial a} = 0, \frac{\partial d}{\partial b} = 0$ ile bulunur. Katsayıların da bulanık sayı olduğu durumda ayrıca $\frac{\partial d}{\partial \underline{e}_\beta} = 0, \frac{\partial d}{\partial \bar{e}_\beta} = 0$ de çözülür.

ÇGTÇ sistem bileşenleri üçgensel bulanık sayı ($\tilde{X}_{ji} = (x_{ji}, \underline{e}_{x_{ji}}, \bar{e}_{x_{ji}})$ ve $\tilde{Y}_i = (y_i, \underline{e}_{y_i}, \bar{e}_{y_i})$) ve model parametreleri kesin sayı $(a, b_1, b_2, \dots, b_p)$ iken Eşitlik 39’deki model ele alınsın.

$$\tilde{Y} = a + b_1\tilde{X}_1 + \dots + b_p\tilde{X}_p \quad (39)$$

Buna göre, EKK optimizasyon problemi Eşitlik 40’deki gibidir (Şanlı ve Apaydın, 2004).

$$\begin{aligned} \text{Min } r(a, b_1, b_2, \dots, b_p) &= \sum d(a + b_1\tilde{X}_{1i} + \dots + b_p\tilde{X}_{pi}, \tilde{Y}_i)^2 = \sum \left([a + b_1x_{1i} + \dots + \right. \\ &b_px_{pi} - y_i - (b_1\underline{e}_{x_{1i}} + \dots + b_p\underline{e}_{x_{pi}} - \underline{e}_{y_i})]^2 + [a + b_1x_{1i} + \dots + b_px_{pi} - y_i + \\ &\left. (b_1\bar{e}_{x_{1i}} + \dots + b_p\bar{e}_{x_{pi}} - \bar{e}_{y_i})]^2 + (a + b_1x_{1i} + \dots + b_px_{pi} - y_i)^2 \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Eşitlik 40'ın en küçüklenmesi sonucunda parametre tahmini gerçekleşir. Matris gösterimi ile $\tilde{X} = (1, \tilde{X}_j): n \times (p + 1)$, $\tilde{X}_L = (1, \tilde{X}_j - \underline{e}_{x_j}): n \times (p + 1)$ ve $\tilde{X}_R = (1, \tilde{X}_j + \bar{e}_{x_j}): n \times (p + 1)$ boyutlu matrisler, $\tilde{Y} = (y_i)_{n \times 1}$, $\tilde{Y}_L = (y - \underline{e}_y)_{n \times 1}$ ve $\tilde{Y}_R = (y + \bar{e}_y)_{n \times 1}$ rastgele vektörleri için kesin yapıdaki model katsayıların tahmini, $(\tilde{X}'\tilde{X} + \tilde{X}'_L\tilde{X}_L + \tilde{X}'_R\tilde{X}_R)^{-1}$ mevcut olmak üzere,

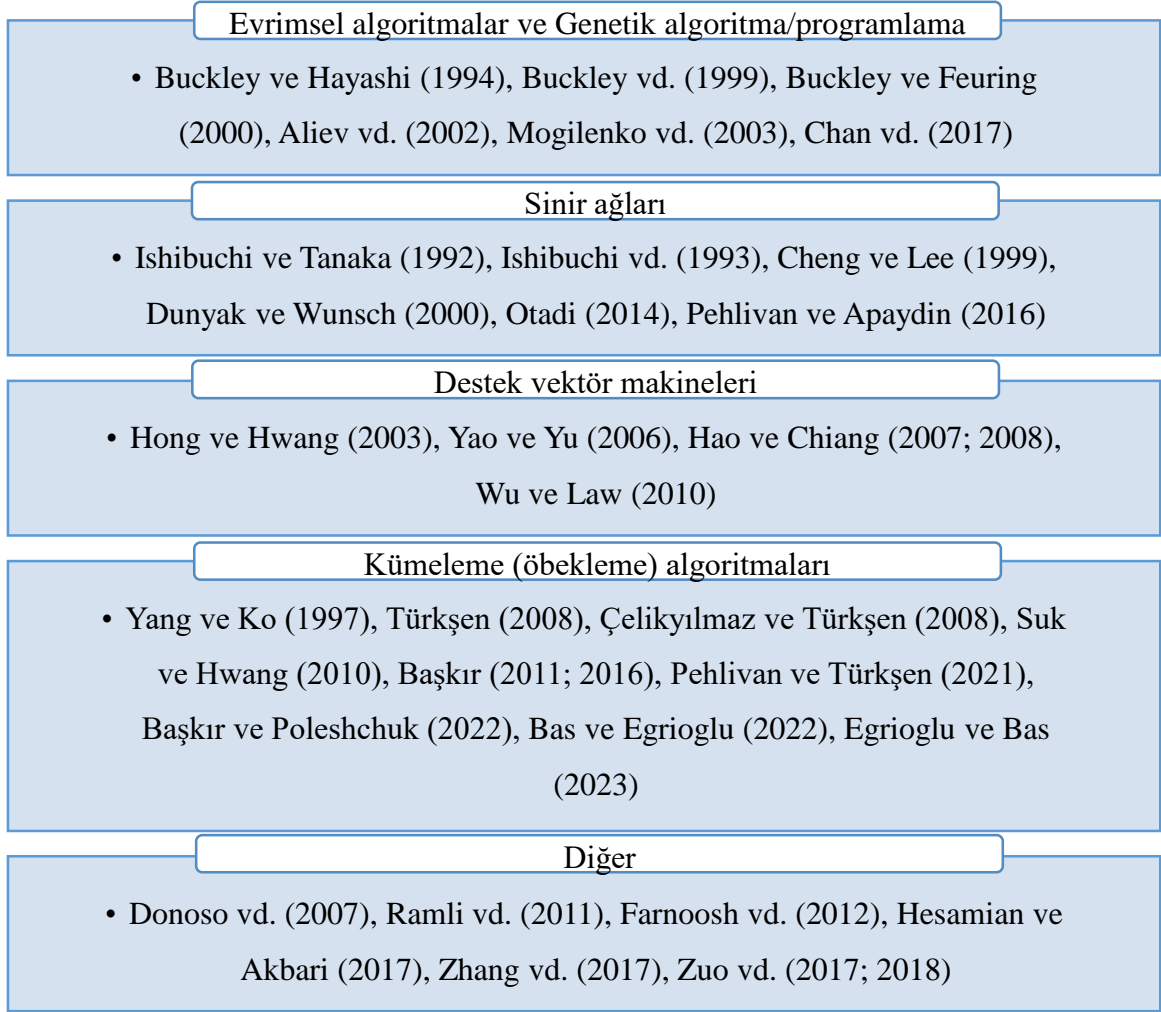
$$\hat{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X} + \tilde{X}'_L\tilde{X}_L + \tilde{X}'_R\tilde{X}_R)^{-1}(\tilde{X}'\tilde{Y} + \tilde{X}'_L\tilde{Y}_L + \tilde{X}'_R\tilde{Y}_R) \quad (41)$$

ile elde edilir (Eşitlik 41).

Şanlı ve Apaydın (2004), Eşitlik 40 ve Eşitlik 41 ile verilen bulanık ortamda çoklu regresyon yaklaşımını bulanık sistem bileşenleri ve aykırı değer durumu için önermiştir.

3.3.3 Bulanık Regresyonda Makine Öğrenme Teknikleri

Teknolojik gelişmeler ve büyük veri/büyük hacimli veri setleri sonucunda makine öğrenme tekniklerinin bulanık regresyon yaklaşımları ile ele alınması kaçınılmaz bir hal almıştır. Evrimsel algoritmalar, destek vektör makineleri, yapay sinir ağları, denetimli/denetimsiz kümeleme algoritmaları gibi makine öğrenme tekniklerinin klasik/bulanık regresyon analizinde kullanımları sonucu yeni teori ve uygulamalar geliştirilmektedir. Bulanık regresyon ve makine öğrenme tekniklerine ilişkin literatürde yer alan çalışmaların bir sınıflandırması Şekil 3.7'de verilmektedir.



Şekil 3.7: Bulanık regresyonda makine öğrenme tekniklerine ilişkin bazı çalışmalar

3.4. Z-Bilgisi Ortamında Regresyon Çözümlemesi

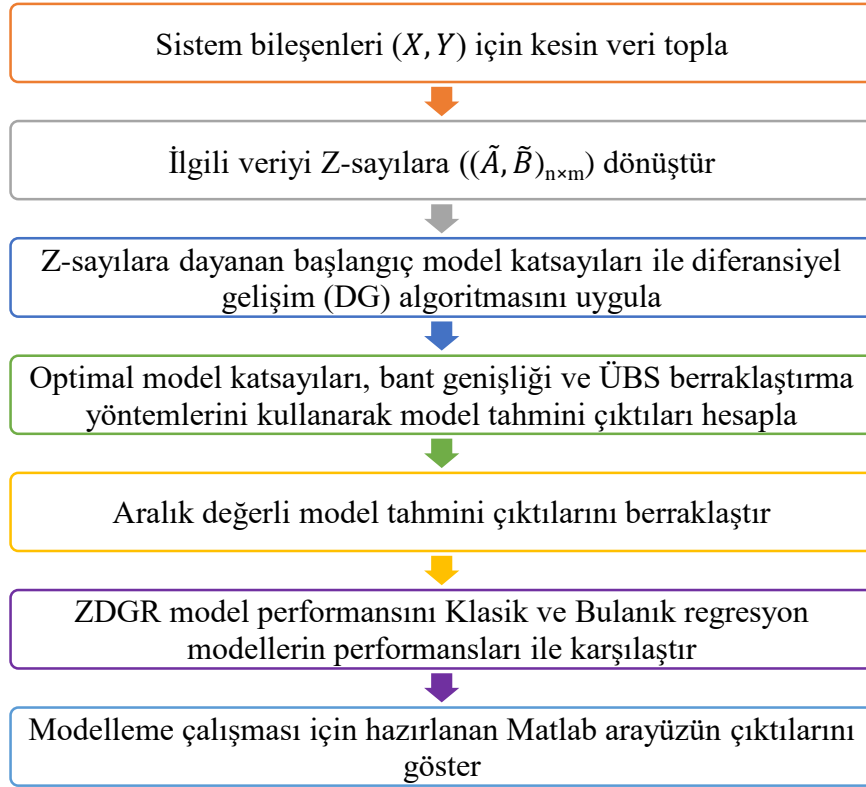
Karar problemlerine özgü bir sistemin yapısı içerisindeki belirsizliklerin giderilmesi ve güvenilir bilgi ortaya konulması için Z-sayılar temelli regresyon modeli ile karar alma süreçleri daha etkin hale gelebilir. Gerçek yaşama özgü tek girdi–tek çıktı (TGTC) ve çok girdi–tek çıktı (ÇGTC) sistemler için Z-değerli doğrusal regresyon modelleri Tablo 3.10’da verilmektedir.

Tablo 3.10: Z-değerli doğrusal regresyon model yapıları

Sistem	Z-sayılarla Sistem Bileşenleri	Bant genişliği yaklaşımı ile Z-değerli regresyon modeli
TGTC	Girdi: $Z_X = (\tilde{A}_X, \tilde{B}_X)$ Çıktı: $Z_Y = (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y)$	$Z_{Y'}(Z_X) = Z_{C_0} + Z_{C_1} Z_X$ $= (\tilde{A}_{C_0}^b + (\tilde{A}_{C_1}^b \times \tilde{A}_X^b), \tilde{B}_{C_0} \times (\tilde{B}_{C_1} \times \tilde{B}_X))$
ÇGTC	Girdiler: $Z_{X_i} = (\tilde{A}_{X_i}, \tilde{B}_{X_i})$, burada n : girdi değişken sayısı ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir. Çıktı: $Z_Y = (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y)$	$Z_{Y'}(Z_{X_1}, Z_{X_2}, \dots, Z_{X_n}) = Z_{C_0} + \sum_{j=1}^n Z_{C_j} Z_{X_j}$ $= (\tilde{A}_{C_0}^b + ((\tilde{A}_{C_1}^b \times \tilde{A}_{X_1}^b) \times (\tilde{A}_{C_2}^b \times \tilde{A}_{X_2}^b) \times \dots \times (\tilde{A}_{C_n}^b \times \tilde{A}_{X_n}^b)), \tilde{B}_{C_0} \times (\tilde{B}_{C_1} \times \tilde{B}_{X_1}) \times (\tilde{B}_{C_2} \times \tilde{B}_{X_2}) \times \dots \times (\tilde{B}_{C_n} \times \tilde{B}_{X_n}))$

Zeinalova vd. (2018), Z-değerli bir fonksiyonun türevinin gösterim karmaşıklığı nedeni ile Z-regresyon çözümlemesinde diferansiyel gelişim optimizasyonu tabanlı çözüm yaklaşımını önermişlerdir. Makine öğrenme tekniklerinden olan diferansiyel gelişim (DG) algoritması, popülasyon temelli bir meta-sezgisel optimizasyon yöntemi olarak Storn ve Price (1995) tarafından geliştirilmiştir. Esnek hesaplamaların evrimsel hesaplama tekniklerinden olan DG algoritması sağlamlığı ve sadeliği bakımından görüntü işleme, kümeleme, optimizasyon, iş planlama gibi çeşitli alanlarda kullanılır (Karasulu, 2015).

Bu tez çalışmasında ele alınan Z-ortamdaki diferansiyel gelişim (DG) algoritmasına dayanan regresyon (ZDGR) modeli için akış şeması Şekil 3.8'de gösterilmektedir.



Şekil 3.8: ZDGR modeli ve bileşenleri için akış şeması

3.4.1 ZDGR Model Yaklaşımının Adımları

TGTÇ veya ÇGTÇ sistem yapısını modellemede Şekil 3.8'deki ZDGR yöntemi adımları aşağıdaki gibidir:

Adım-1. TGTÇ veya ÇGTÇ sistem bileşenlerine ait Z-sayırlı formundaki A -kısıtlaması ve B -güvenilirliği değerlendirmeleri için kesin yapıdaki veri toplanır.

X –girdi değişken, Y –çıktı değişken olmak üzere TGTÇ sistem bileşenleri $((X, Y)$ değişkenleri) için (A_X, A_Y) ve (B_X, B_Y) kesin yapıdadır.

X_j –girdi değişkenler ($j = 1, 2, \dots, m$ ve m : bağımsız (girdi) değişken sayısı), Y –çıktı değişken olmak üzere ÇGTÇ sistem bileşenleri $((X_1, X_2, \dots, X_m), Y)$ değişkenleri için (A_{X_j}, A_Y) ve (B_{X_j}, B_Y) kesin yapıdadır.

Adım-2. Toplanan kesin veri Z-sayısı formunda yer alan \tilde{A} -kısıtlaması ve \tilde{B} -güvenilirliği için ÜBS/YBS halinde tanımlanır.

TGTC sistem bileşenleri $((X, Y)$ değişkenleri) için Z-sayılar formunun YBS ile gösterimi

$$(Z_X, Z_Y) = \left((\tilde{A}_X, \tilde{B}_X), (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y) \right) = \left(((a_{X_1}, a_{X_2}, a_{X_3}, a_{X_4}), (b_{X_1}, b_{X_2}, b_{X_3}, b_{X_4})), ((a_{Y_1}, a_{Y_2}, a_{Y_3}, a_{Y_4}), (b_{Y_1}, b_{Y_2}, b_{Y_3}, b_{Y_4})) \right) \quad (42)$$

biçimindedir (Eşitlik 42). Burada, $a_{X_2} = a_{X_3} = a_X$, $b_{X_2} = b_{X_3} = b_X$, $a_{Y_2} = a_{Y_3} = a_Y$, $b_{Y_2} = b_{Y_3} = b_Y$ alındığında (Z_X, Z_Y) ikilisi $(X$ ve Y değişkenlerine ait \tilde{A} kısıtlamaları ve \tilde{B} güvenilirlikleri) ÜBS ile tanımlanır.

ÇGTÇ sistem bileşenleri $((X_1, X_2, \dots, X_m), Y)$ değişkenleri için Z-sayılar formunun ÜBS ile gösterimi ($j = 1, 2, \dots, m$ ve m : bağımsız (girdi) değişken sayısı) aşağıdaki gibidir.

$$(Z_{X_j}, Z_Y) = \left((\tilde{A}_{X_j}, \tilde{B}_{X_j}), (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y) \right) = \left(((a_{X_{j1}}, a_{X_{j2}}, a_{X_{j3}}, a_{X_{j4}}), (b_{X_{j1}}, b_{X_{j2}}, b_{X_{j3}}, b_{X_{j4}})), ((a_{Y_1}, a_{Y_2}, a_{Y_3}, a_{Y_4}), (b_{Y_1}, b_{Y_2}, b_{Y_3}, b_{Y_4})) \right)$$

Burada, $a_{X_{j2}} = a_{X_{j3}} = a_{X_j}$, $b_{X_{j2}} = b_{X_{j3}} = b_{X_j}$, $a_{Y_2} = a_{Y_3} = a_Y$, $b_{Y_2} = b_{Y_3} = b_Y$ alındığında (Z_{X_j}, Z_Y) ikilisi $(X_j$ ve Y değişkenlerine ait \tilde{A} kısıtlamaları ve \tilde{B} güvenilirlikleri) ÜBS ile tanımlanır.

Adım-3. Z-sayılar formundaki TGTC veya ÇGTÇ sistem değerleri ile Tablo 3.10'da verilen basit veya çoklu regresyon modelleri Z-sayılar için bant genişliği yöntemi ile hesaplanarak aşağıda verildiği gibi oluşturulur.

TGTC sistem bileşenleri $((X, Y)$ değişkenleri) için Z-sayılar ikilisi $(Z_X, Z_Y) = ((\tilde{A}_X, \tilde{B}_X), (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y))$ ele alınsın. Burada, \tilde{A}_X ve \tilde{A}_Y için bant genişlikleri $\alpha = 0.5$ olmak üzere $\tilde{A}_1^b = [a_{1L}^{\alpha=0.5}, a_{1R}^{\alpha=0.5}]$ ve $\tilde{A}_2^b = [a_{2L}^{\alpha=0.5}, a_{2R}^{\alpha=0.5}]$ olsun. \tilde{B}_X ve \tilde{B}_Y yamuksal (veya

üçgensel) bulanık sayılar olmak üzere TGTÇ sistem için Z-sayılar ortamında regresyon modeli Eşitlik 43'deki gibidir.

$$Z_{Y'}(Z_X) = Z_{C_0} + Z_{C_1}Z_X = (\tilde{A}_{C_0}^b + ((\tilde{A}_{C_1}^b \times \tilde{A}_{X_1}^b), \tilde{B}_{C_0} \times (\tilde{B}_{C_1} \times \tilde{B}_{X_1}))) \quad (43)$$

Burada, $Z_{C_0} = (\tilde{A}_{C_0}^b, \tilde{B}_{C_0})$ ve $Z_{C_1} = (\tilde{A}_{C_1}^b, \tilde{B}_{C_1})$ Z-değerli model katsayılarıdır.

Benzer şekilde, Z-sayılarla tanımlı ÇGTÇ sistemde $((Z_{X_j}, Z_Y) = ((\tilde{A}_{X_j}, \tilde{B}_{X_j}), (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y)))$ \tilde{A}_{X_j} ve \tilde{A}_Y için bant genişlikleri $\alpha = 0.5$ olmak üzere $\tilde{A}_{X_j}^b = [a_{X_j,L}^{\alpha=0.5}, a_{X_j,R}^{\alpha=0.5}]$ ve $\tilde{A}_Y^b = [a_{Y,L}^{\alpha=0.5}, a_{Y,R}^{\alpha=0.5}]$ olsun. \tilde{B}_{X_j} ve \tilde{B}_Y yamuksal (veya üçgensel) bulanık sayılar olmak üzere ÇGTÇ sistem için Z-sayılar ortamında regresyon modeli Eşitlik 44'de verilmektedir.

$$\begin{aligned} Z_{Y'}(Z_{X_1}, Z_{X_2}, \dots, Z_{X_n}) &= Z_{C_0} + \sum_{j=1}^n Z_{C_j}Z_{X_j} \\ &= (\tilde{A}_{C_0}^b + ((\tilde{A}_{C_1}^b \times \tilde{A}_{X_1}^b) \times (\tilde{A}_{C_2}^b \times \tilde{A}_{X_2}^b) \times \dots \times (\tilde{A}_{C_m}^b \times \tilde{A}_{X_m}^b)), \tilde{B}_{C_0} \times (\tilde{B}_{C_1} \times \tilde{B}_{X_1}) \times (\tilde{B}_{C_2} \times \tilde{B}_{X_2}) \times \dots \times (\tilde{B}_{C_m} \times \tilde{B}_{X_m})) \end{aligned} \quad (44)$$

Burada, Z-değerli model katsayıları $Z_{C_0} = (\tilde{A}_{C_0}^b, \tilde{B}_{C_0})$ ve $j = 1, 2, \dots, m$ için $Z_{C_j} = (\tilde{A}_{C_j}^b, \tilde{B}_{C_j})$ dir. Bu tez çalışmasında Z-sayılar ve bileşenleri ÜBS formda tanımlanmıştır.

Adım-4. Z-ortamda oluşturulan basit veya çoklu doğrusal regresyon modelleri içerisinde en iyi katsayı tahminin yapılması için DG algoritması kullanılır. Z-ortamda DG algoritması hakkında bilgiler bu bölüme ait ilgili alt başlık içerisinde aktarılmaktadır.

Adım-5. Z-ortamda DG algoritması ile belirlenen en uygun katsayılarla Z-sayılarla dayanan tahmini çıktı ($Z_{Y'}$) ve Z-sayılarla dayanan gözlenen çıktı (Z_Y) değerleri Yıldız ve Kahraman'ın (2020) önerdiği yaklaşımla Eşitlik 45-47'deki gibi berraklaştırılır.

Z-sayılarla dayanan gözlenen çıktıda ($Z_Y = (\tilde{A}_Y, \tilde{B}_Y)$) ÜBS formundaki güvenilirlik ($\tilde{B}_Y = (b_{Y_1}, b_{Y_2}, b_{Y_3})$) Eşitlik 45 ile kesin sayıya dönüştürülür (Kaufmann ve Gupta, 1988).

$$\alpha = \frac{(b_{Y_1} + 2b_{Y_2} + b_{Y_3})}{4} \quad (45)$$

Ağırlıklı Z-sayısı (Z_Y^α) Eşitlik 46 ile elde edilir.

$$Z_Y^\alpha = \{(x, \mu_{\bar{A}^\alpha}(x)) | \mu_{\bar{A}^\alpha}(x) = \alpha \mu_{\bar{A}}(x), \mu \in [0,1]\} \quad (46)$$

Ağırlıklı Z-sayısı (Z_Y^α) için Eşitlik 47 ile sıradan bulanık sayı elde edilir.

$$Z' = \{(x, \mu_{Z'}(x)) | \mu_{Z'}(x) = \mu_{\bar{A}}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right), \mu \in [0,1]\} \quad (47)$$

Z' bulanık sayısı Eşitlik 48 ile verilen ağırlık merkezi yöntemi kullanılarak berraklaştırılır.

$$Berrak(Z') = \frac{\int \mu_{Z'}(x) x dx}{\int \mu_{Z'}(x) dx} \quad (48)$$

Burada, Eşitlik 49 ile verilen gözlenen ve tahmini mutlak farkların toplamı minimize edilir.

$$\sum |Y - Y'| \rightarrow \min \quad (49)$$

Adım-6. ZDGR ve berraklaştırma işlemi sonucu oluşan model performansı ilgili klasik ve bulanık regresyon modelleri için performans ölçütlerinden Eşitlik 50'deki AKOK ve Eşitlik 51-52'deki R^2 ve düzeltilmiş R^2 ile karşılaştırılır.

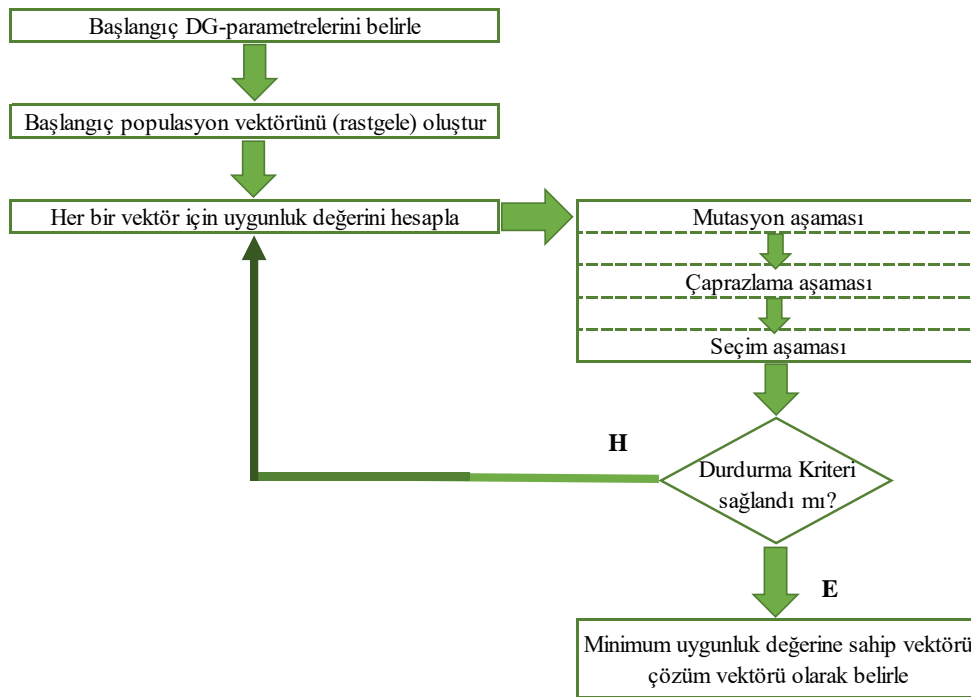
$$AKOK = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2}, \hat{y} = \frac{\sum_{j=1}^{c^*} \gamma_j \hat{y}_j}{\sum_{i=1}^{c^*} \gamma_j} \quad (50)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2} \quad (51)$$

$$Düzeltilmiş R^2 = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n-1}{n-p-1} \right) \quad (52)$$

3.4.2 Z-Bilgisi Ortamında Diferansiyel Gelişim Algoritması

Evrimsel (gelişim) algoritmaları, mutasyon, rekombinasyon, üreme ve seçim gibi biyolojik evrimin temellerini kullanır. Bu algoritmalar, popülasyon tabanlı meta-sezgisel optimizasyon algoritması olan evrimsel hesaplamanın bir parçasıdır (Chukhrov ve Johannssen, 2019). Evrimsel hesaplama kapsamındaki algoritmalar stokastik yapıda meta-sezgisel algoritmalarlardır. Storn ve Price (1995) tarafından geliştirilmiş olan diferansiyel gelişim (DG), basit, etkin ve sağlam olması yönleri ile bilinen bir evrimsel hesaplama algoritmasıdır. Stokastik bir yöntem olarak DG algoritması, düzgün dağılım, diferansiyel mutasyon, olasılık çaprazlaması ve seçim operatörleri tarafından rastgele oluşturulan başlangıç popülasyonunu kullanır (Price vd., 2005; Aliev vd., 2015). DG algoritması, popülasyonun her bir elemanı için özel bir mutasyon (değişim) işlemi ile her bir nesilde bir mutant vektör oluşturur. Mutasyon işlemi, popülasyondan rastgele seçilmiş elemanlar arasındaki farkların başka bir elemana eklenmesi ile gerçekleşir (Wong ve Butz, 2001; Karasulu, 2015). Mutant vektör yeni yavru vektör üreten başka bir vektörle çaprazlama işlemine tabi tutulur. Seçim sürecinde, elde edilen vektör, önceden belirlenmiş bir popülasyon üyesinin verdiği daha düşük bir hedef fonksiyon değeri (maliyet) verirse sonraki nesilde yeni üretilen vektör, karşılaştırıldığı vektörün yerini alır. DG algoritmasının akış şeması Şekil 3.9’da verildiği gibidir.



Şekil 3.9: DG algoritması akış şeması

Bu tez çalışmasında ele alınan Z-DGRM yaklaşımı içerisindeki DG algoritmasının Z-bilgisi ortamındaki temel adımları aşağıdaki gibi özetlenir (bkz. Zeinalova vd., 2018).

Adım-1 (Başlangıç DG-parametrelerinin belirlenmesi): DG-algoritmasının başlangıç parametrelerinden popülasyon boyutu Z-sayısı iki bulanık sayı içerdiği için $n_p = 2 \times 10 \times n_{var}$ (n_{var} : optimizasyon değişkenlerinin sayısı) olarak belirlenir. Uygunluk fonksiyonu Eşitlik 49'daki $|Y - Y'|$ için seçilir. Aday çözüm için Z değerli katsayılar $Z_{C_0}, Z_{C_i}, i = 1, 2, \dots, p$ vektörü alınır. Mutasyon oranı $F = 0.8$ ve çapraz geçiş oranı $CR = 0.7$ dir.

Adım-2 (Başlangıç popülasyonu oluşturma). DG-parametreleri belirlendikten sonra rastgele oluşturulacak başlangıç popülasyonu belirlenir. Aday çözüm $u = (Z_{C_0}, Z_{C_1}, Z_{C_2}, \dots, Z_{C_N})$ alınır. Katsayılar verilerini tutmak için $2n_{var} = 2(p + 1)$ boyutunda bir şablon parametre vektörü oluşturulur. Algoritma parametreleri ($F = 0.8, CR = 0.7$) ayarlanır. Parametrelerin sonraki n_p vektörleri, $\{u_1, u_2, \dots, u_{n_p}\}$ popülasyonunu oluşturmak için rastgele üretilir.

Adım-3 (Uygunluk değerlerin hesaplanması). Her bir vektör için uygunluk fonksiyonu değeri Eşitlik 49 ile hesaplanır.

Adım-4 (Mutasyon aşaması). Yeni vektör u_i ($i = 1, 2, \dots, n_p$) için, popülasyondan rastgele üç yeni farklı vektör u_{r1}, u_{r2}, u_{r3} seçilir. Popülasyonda yeni bir deneme vektörü $u_{yeni} = u_{r1} + F \cdot (u_{r2} - u_{r3})$ üretilir.

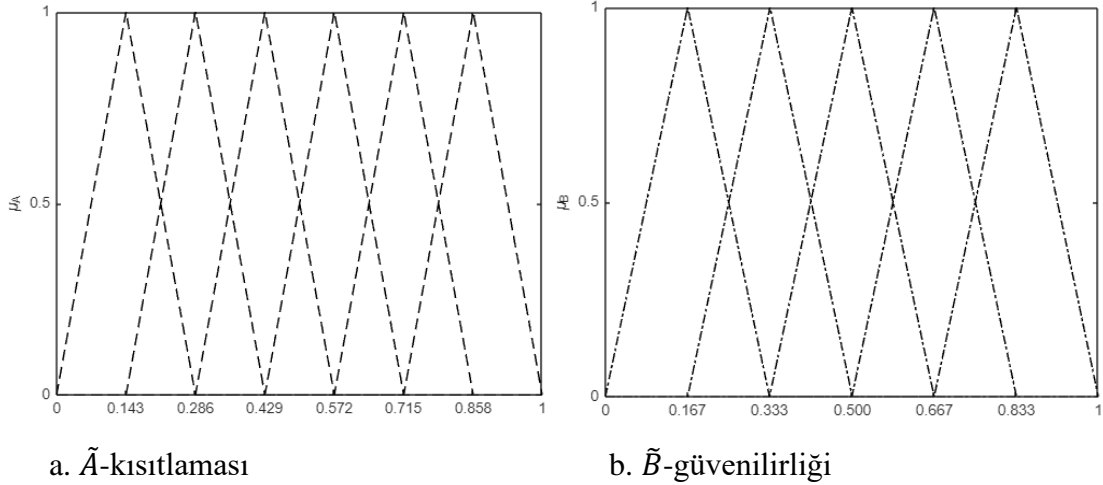
Adım-5 (Çaprazlama aşaması). u_i 'nin vektör parametreleri, CR ile u_{yeni} 'e miras alınır.

Adım-6 (Seçim aşaması). Eğer u_{yeni} için uygunluk fonksiyonu değeri u_i için hesaplanan değerden daha iyi (daha düşük) ise, u_{yeni} popülasyonda u_i 'nin yerini alır.

Adım-7 (Durdurma kuralı ve karar). Yukarıdaki adımlar önceden belirlenmiş sayıda nesile ulaşılan veya uygunluk fonksiyonunun gerekli değeri hesaplanana kadar devam eder. Popülasyonda uygunluk fonksiyonunun en düşük değerine sahip u_b vektörü bulunur. Son olarak, u_b 'ten tüm $Z_{C_0}, Z_{C_i}, i = 1, 2, \dots, p$ parametreleri çekilir. Bu parametreler, istenen Z-sayı değerli regresyon modelini oluşturmak için kullanılır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ele alınan Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon (ZDGR) modeli bir teknoloji şirketinde dijital olgunluk düzeylerine ilişkin değerlendirmeler için uygulanmıştır. Çok girde-tek çıktı (ÇGTÇ) sistem için veri, Aramburu vd. (2021) çalışmasındaki girdiler (X_1 : dijital liderlik, X_2 : dijital zihniyet ve X_3 : yetkilendirilmiş çalışanlar) ve çıktı (Y : dijital olarak etkinleştirilmiş büyüme stratejisi) tanımlamalarını içeren bir anket kullanılarak toplanmıştır. “Dijital olarak etkinleştirilen bir büyüme stratejisi ve zihniyeti geliştirmek” için ele alınan boyutlar ve düzeyleri (Aramburu vd., 2021) EK 1’deki gibidir. EK 1’de verilen dijital olgunluk düzeyleri için Zadeh’in (2011) Z-sayısı bileşenleri \tilde{A} ve \tilde{B} ($Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$) için ÜBS’ler Şekil 4.1’deki gibi belirlenmiştir. Şekil 4.1’deki \tilde{A} -kısıtlaması dijital olgunluk düzeyleri için ÜBS’ler, \tilde{B} ise bu düzeylere dair değerlendirmelere ilişkin güvenilirlik düzeylerini belirleyen ÜBS’lerdir. Modellere ilişkin tüm hesaplamalar ve grafik gösterimleri Matlab 2022a programında yazılan kodlar ile oluşturulmuştur. Ayrıca, Matlab App Designer ile modelleme çalışması için hazırlanan kullanıcı dostu arayüz Bölüm 4.4’de tanıtılmıştır.



Şekil 4.1: Dijital olgunluk düzeyleri için Z-sayısı bileşenleri

Teknoloji şirketi, Türkiye’de savunma sanayi için gerekli olan temel teknolojilerin transferini, geliştirilmesini ve üretimini desteklemektedir. Teknoloji şirketine bağlı 235 katılımcı dijital olgunluk düzeyleri tabanlı anketi yanıtlamıştır. Katılımcıların %52.34’ü kadın, %47.66’sı erkektir. Katılımcıların %8.93’ü üst düzey yönetici, %11.92’si orta düzey yönetici, %9.79’u alt düzey yönetici ve %69.36’sı çalışandır. Katılımcılardan toplanan

235×4 boyutlu veri seti ile Tablo 4.1'deki TGTÇ/ÇGTÇ sistemlere ait klasik basit/çoklu doğrusal regresyon (KR) modelleri, bunların bulanık alternatifleri (BR) ve Z-bilgisi ortamında diferansiyel gelişim algoritması tabanlı regresyon (ZDGR) modellere ait bulgular verilmiş ve performans karşılaştırmaları tartışılmıştır. BR-modeller, Şanlı ve Apaydın (2004)'in bulanık sistem bileşenleri (girdi ve çıktı değişkenleri) ve kesin parametreler için katsayı tahminlerini matris gösterimlerle tanımladığı Eşitlik 41 ile oluşturulmuştur. ZDGR modeller, Zeinalova vd.'in (2018) temellerini oluşturduğu yaklaşım ile belirlenmiştir.

Tablo 4.1: Dijital olgunluk düzeylerine ilişkin modeller

Klasik/Bulanık Model (A/\tilde{A} için)	Klasik/Bulanık TGTÇ veya ÇGTÇ sistem (A/\tilde{A} için)	ZDGR Modeli ($Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ için)	Z-sayılar tabanlı TGTÇ veya ÇGTÇ sistem ($Z = (\tilde{A}, \tilde{B})$ için)
KR-1/BR-1	$(A_{X_1}, A_Y) / (\tilde{A}_{X_1}, \tilde{A}_Y)$	ZDGR-1	(Z_{X_1}, Z_Y)
KR-2/BR-2	$(A_{X_2}, A_Y) / (\tilde{A}_{X_2}, \tilde{A}_Y)$	ZDGR-2	(Z_{X_2}, Z_Y)
KR-3/BR-3	$(A_{X_3}, A_Y) / (\tilde{A}_{X_3}, \tilde{A}_Y)$	ZDGR-3	(Z_{X_3}, Z_Y)
KR-4/BR-4	$(A_{X_1}, A_{X_2}, A_{X_3}, A_Y) / (\tilde{A}_{X_1}, \tilde{A}_{X_2}, \tilde{A}_{X_3}, \tilde{A}_Y)$	ZDGR-4	$(Z_{X_1}, Z_{X_2}, Z_{X_3}, Z_Y)$

4.1. Tek Girdi-Tek Çıktı Sistem Modelleri

Dijital olgunluk düzeylerine ilişkin Tablo 4.1'deki TGTÇ sistemlere ait KR- ve BR-modeller değişken kısıtlaması (\tilde{A}) için, ZDGR-modeller, Z-sayısı formundaki değişken kısıtlaması (\tilde{A}) ve güvenilirlikleri (\tilde{B}) için ele alınmıştır. TGTÇ sistemlerdeki klasik/bulanık A/\tilde{A} -kısıtlama değerleri için klasik regresyon (KR- i , $i=1,2,3$) ve bulanık regresyon (BR- i , $i=1,2,3$) modellerinin katsayıları Tablo 4.2'de verilmiştir (p-değerleri=0.000).

Tablo 4.2: Klasik ve bulanık regresyon modellerinin katsayıları

Klasik Model (A için)	C_0 katsayısı	C_1 katsayısı	Bulanık Model (\tilde{A} için)	C_0 katsayısı	C_1 katsayısı
KR-1	0.2186	0.6849	BR-1	0.2155	0.6913
KR-2	0.1717	0.7082	BR-2	0.1664	0.7182
KR-3	0.2949	0.5192	BR-3	0.2900	0.5294

Z-sayılaraya dayalı TGTC sistemler için ZDGR-modellerin (ZDGR- i , $i=1,2,3$) katsayıları Tablo 4.3'deki gibidir.

Tablo 4.3: ZDGR modellere ilişkin katsayılar

ZDGR Model	Katsayı	\tilde{A} –kısıtlaması	\tilde{B} –güvenilirliği
ZDGR-1	C_0	[0.1346, 0.3034]	(0.0793,0.2469,0.4406)
	C_1	[0.5824, 0.7981]	(0.5766,0.6061,0.6412)
ZDGR-2	C_0	[0.1056,0.2380]	(0.1390,0.2879,0.5409)
	C_1	[0.5977,0.8192]	(0.5499,0.5587,0.6003)
ZDGR-3	C_0	[0.1632,0.4276]	(0.1961,0.4143,0.6230)
	C_1	[0.4723,0.5665]	(0.3693,0.4764,0.5773)

ZDGR model katsayıları diferansiyel gelişim algoritmasında maksimum adım sayısı 1000, $n_{var}=2$, $F=0.8$ ve $CR=0.7$, uygunluk fonksiyonu Eşitlik 49 için optimize edilmiştir. Tablo 4.3'deki ZDGR model katsayıları ve Z-sayılar tabanlı girdiler ($Z_{X_i} = (\tilde{A}_{X_i}, \tilde{B}_{X_i}), i = 1,2,3$) ile bulanık aritmetiği ve bant genişliği yöntemleri uygulanarak Z-sayılar formunda tahmini çıktı ($Z_{Y'} = (\tilde{A}_{Y'}, \tilde{B}_{Y'})$) değerleri hesaplanmıştır. Bu tahmini çıktı değerlerdeki $\tilde{B}_{Y'}$ değerleri Eşitlik 45 ile kesin sayı haline dönüştürülmüştür. Kesin $\tilde{B}_{Y'}$ sayıları aralık haldeki $\tilde{A}_{Y'}$ 'lar ile çarpılmıştır. Son olarak, aralık haldeki Z bulanık sayılar berraklaştırılmıştır.

Örnek olarak, Z-sayılar formundaki katsayılar,

$$Z_{C_0} = ([0.1346, 0.3034], (0.0793,0.2469,0.4406)),$$

$$Z_{C_1} = ([0.5824, 0.7981], (0.5766,0.6061,0.6412))$$

ve Z-sayılar formdaki TGTC-girdisi

$$Z_{X_1} = ([0.6429, 0.7857], (0.6667,0.8333,1.0000))$$

için $Z_{Y'} = (\tilde{A}_{Y'}, \tilde{B}_{Y'})$ Eşitlik 53'deki gibi hesaplanır.

$$Z_{Y'} = (\tilde{A}_{Y'}, \tilde{B}_{Y'}) = Z_{C_0} + Z_{C_1} Z_{X_1}$$

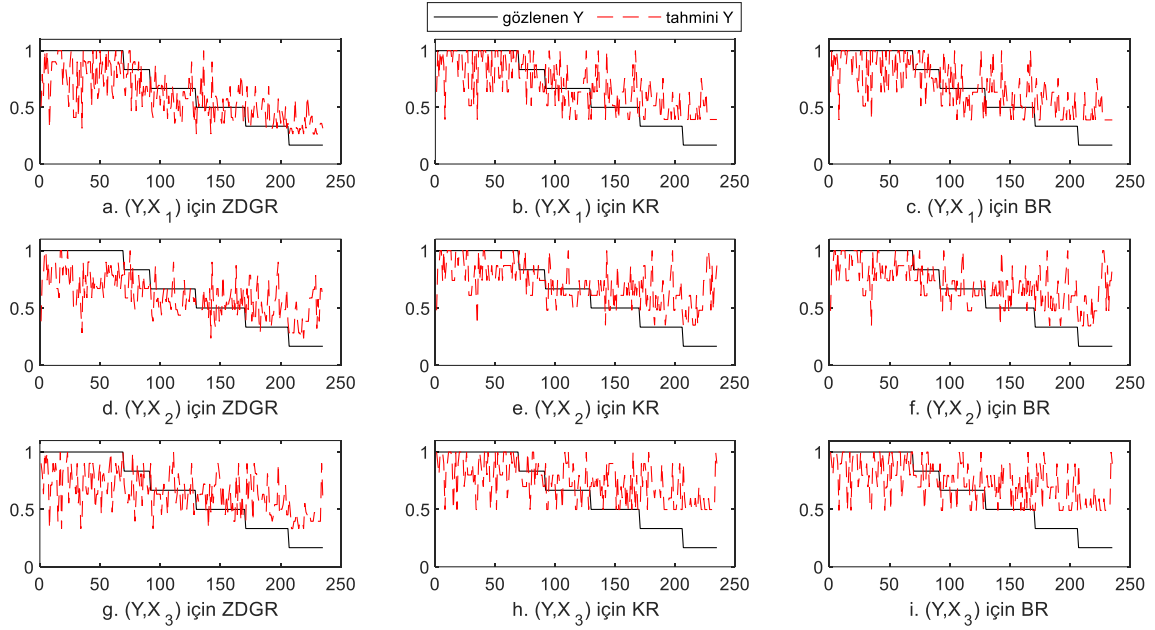
$$\begin{aligned}
&= ([0.1346, 0.3034], (0.0793, 0.2469, 0.4406)) \\
&\quad + ([0.5824, 0.7981], (0.5766, 0.6061, 0.6412)) \\
&\quad \times ([0.6429, 0.7857], (0.6667, 0.8333, 1.0000)) \\
&= (([0.1346, 0.3034] + [0.5824, 0.7981] \times [0.6429, 0.7857]), \\
&\quad ((0.0793, 0.2469, 0.4406) \times (0.5766, 0.6061, 0.6412) \\
&\quad \times (0.6667, 0.8333, 1.0000))) \\
&= ([0.5090, 0.9305], (0.0305, 0.1247, 0.2825)) \tag{53}
\end{aligned}$$

$Z_{Y'} = ([0.5090, 0.9305], (0.0305, 0.1247, 0.2825))$ tahmini çıktı değeri Eşitlik 54 ile aralık formda bir bulanık sayı haline dönüştürülür.

$$\begin{aligned}
Z_{Y'} &= \left(\sqrt{\frac{0.0305 + 2 \times 0.1247 + 0.2825}{4}} \right) \times [0.5090, 0.9305] \\
&= 0.3750 \times [0.5090, 0.9305] = [0.1909, 0.3489] \tag{54}
\end{aligned}$$

$Z_{Y'} = [0.1909, 0.3489]$ aralık değeri ağırlık merkezi yöntemi ile berraklaştırılır. Normalize berraklaştırılmış tahmini çıktı değeri $Berrak(Z_{Y'})_{normalize} = Berrak(Z_{Y'})_i / maks(Berrak(Z_{Y'})) = 0.8795$ bulunur. İlgili normalize gözlenen çıktı ile tahmini çıktı için $|Y_{normalize} - Berrak(Z_{Y'})_{normalize}| = |0.8334 - 0.8795| = 0.0461$ dir. Böylece, tüm gözlemler için berraklaştırılmış tahmini çıktı değerler elde edilir.

ZDGR, klasik ve bulanık regresyon modelleri için tahmini çıktı değerler ve gözlenen çıktı gösterimleri Şekil 4.2'de verilmektedir.



Şekil 4.2: TGTÇ sistemler için gözlenen ve tahmini çıktılar

4.2. Çok Girdi-Tek Çıktı Sistem Modelleri

Dijital olgunluk düzeylerine ilişkin A-kısıtlaması için oluşturulan ÇGTÇ sistemde çıktı ve girdileri arasında istatistiksel olarak anlamlı ilişkiler vardır (p -değerleri=0.000). Bu ÇGTÇ sistem verisi için oluşturulan klasik regresyon modeline ait bilgiler Tablo 4.4’de verilmektedir. Modele dair artıklar normal dağılımlı kitleden gelmektedir (p -değeri=0.055).

Tablo 4.4: ÇGTÇ sistem için klasik regresyon modeli sonuçları

Model istatistikleri	C_0 katsayısı	C_1 katsayısı	C_2 katsayısı	C_3 katsayısı
Tahmini katsayısı	0.1208	0.5064	0.2272	0.1297
t-istatistiği (p-değeri)	3.50 (p=0.001)	8.12 (p=0.000)	2.97 (p=0.003)	2.21 (p=0.028)
Varyans şişirme faktörü	---	1.87	1.66	1.60
Diğer	F-test istatistiği=81.18 (p-değeri=0.000) olduğundan model anlamlıdır. R^2 (düzeltilmiş R^2) = %51.32 (%50.69). AKOK=0.2060.			

ÇGTÇ sisteme dair KR-, BR- ve ZDGR-modellerin katsayıları Tablo 4.5'deki gibidir.

Tablo 4.5: Modellere ilişkin katsayılar

Model	C ₀ katsayısı	C ₁ katsayısı	C ₂ katsayısı	C ₃ katsayısı
KR-4	0.1208	0.5064	0.2272	0.1297
BR-4	0.1007	0.5093	0.2541	0.1388
ZDGR-4 (A)	[0.0930,0.1486]	[0.4273,0.5799]	[0.1944,0.2603]	[0.0806,0.1785]
ZDGR-4 (B)	(0.1779,0.2094, 0.2543)	(0.4269,0.5098, 0.5683)	(0.0770,0.1720, 0.2704)	(0.0221,0.0516, 0.0962)

ZDGR model katsayıları diferansiyel gelişim algoritmasında maksimum adım sayısı 1000, $n_{var}=4$, $F=0.8$ ve $CR=0.7$, uygunluk fonksiyonu Eşitlik 49 için optimize edilmiştir. Tablo 4.5'deki ZDGR-4 model katsayıları ve Z-sayılar tabanlı girdiler ($Z_{X_i} = (\tilde{A}_{X_i}, \tilde{B}_{X_i}), i = 1,2,3$) ile bulanık aritmetiği ve bant genişliği yöntemleri uygulanarak Z-sayılar formda tahmini çıktı ($Z_{Y'} = (\tilde{A}_{Y'}, \tilde{B}_{Y'})$) değerleri elde edilmiştir. Bu tahmini çıktı değerlerdeki $\tilde{B}_{Y'}$ 'ler Eşitlik 45 ile kesin sayı haline dönüştürülüp aralık haldeki $\tilde{A}_{Y'}$ ile çarpılmıştır. Aralık formdaki Z bulanık sayıları berraklaştırılmıştır.

Örnek olarak, Z-sayılar formundaki katsayılar,

$$Z_{C_0} = ([0.0930,0.1486], (0.1779,0.2094,0.2543)),$$

$$Z_{C_1} = ([0.4273,0.5799], (0.4269,0.5098,0.5683)),$$

$$Z_{C_2} = ([0.1944,0.2603], (0.0770,0.1720,0.2704)),$$

$$Z_{C_3} = ([0.0806,0.1785], (0.0221,0.0516,0.0962))$$

ve Z-sayılar formundaki ÇGTÇ girdileri

$$Z_{X_1} = ([0.7857, 0.9286], (0.6667,0.8333,1)),$$

$$Z_{X_2} = ([0.7857, 0.9286], (0.6667,0.8333,1))$$

$$Z_{X_3} = ([0.3571, 0.5000], (0.3333, 0.5000,0.6667))$$

için $Z_{Y'} = (\tilde{A}_{Y'}, \tilde{B}_{Y'})$ Eşitlik 55'deki gibi hesaplanır.

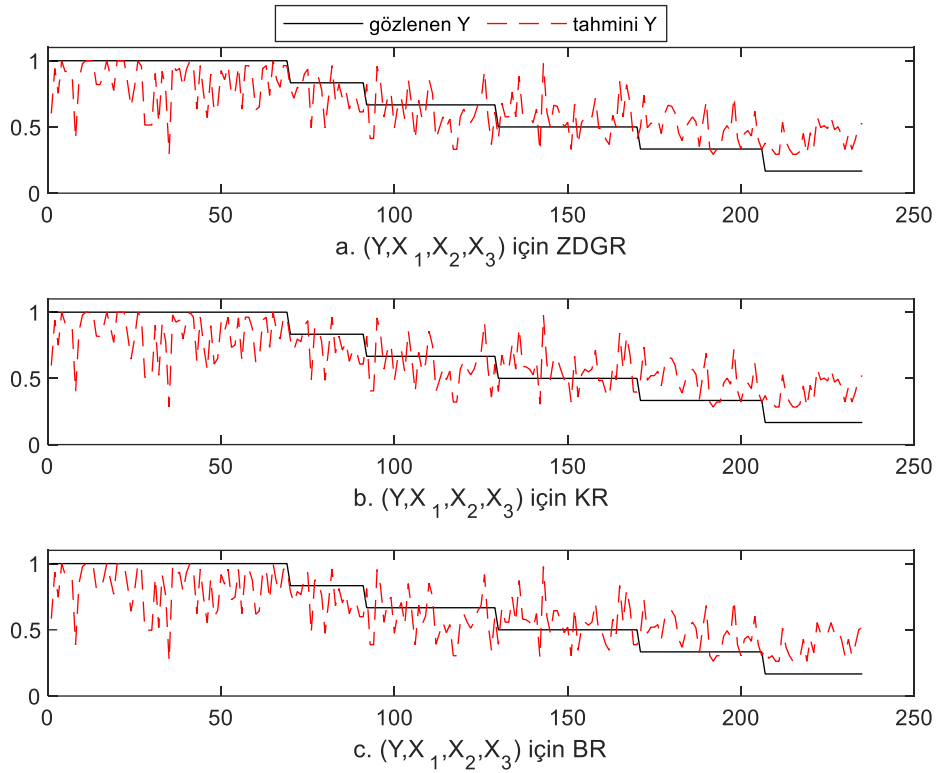
$$\begin{aligned}
Z_{Y'} &= (\tilde{A}_{Y'}, \tilde{B}_{Y'}) = Z_{C_0} + Z_{C_1}Z_{X_1} + Z_{C_2}Z_{X_2} + Z_{C_3}Z_{X_3} \\
&= ([0.0930, 0.1486], (0.1779, 0.2094, 0.2543)) \\
&\quad + ([0.4273, 0.5799], (0.4269, 0.5098, 0.5683)) \\
&\quad \times ([0.7857, 0.9286], (0.6667, 0.8333, 1)) \\
&\quad + ([0.1944, 0.2603], (0.0770, 0.1720, 0.2704)) \\
&\quad \times ([0.7857, 0.9286], (0.6667, 0.8333, 1)) \\
&\quad + ([0.0806, 0.1785], (0.0221, 0.0516, 0.0962)) \\
&\quad \times ([0.3571, 0.5000], (0.3333, 0.5000, 0.6667)) \\
&= (([0.0930, 0.1486] + [0.4273, 0.5799] \times [0.7857, 0.9286] \\
&\quad + [0.1944, 0.2603] \times [0.7857, 0.9286] + [0.0806, 0.1785] \\
&\quad \times [0.3571, 0.5000]), ((0.1779, 0.2094, 0.2543) \\
&\quad \times (0.4269, 0.5098, 0.5683) \times (0.6667, 0.8333, 1) \\
&\quad \times (0.0770, 0.1720, 0.2704) \times (0.6667, 0.8333, 1) \\
&\quad \times (0.0221, 0.0516, 0.0962) \times (0.3333, 0.5000, 0.6667))) \\
&= ([0.6103, 1.0181], (0.0000, 0.0003, 0.0025)) \tag{55}
\end{aligned}$$

$Z_{Y'} = ([0.6103, 1.0181], (0.0000, 0.0003, 0.0025))$ tahmini çıktı değeri Eşitlik 56 ile aralık formda bir bulanık sayı haline dönüştürülür.

$$\begin{aligned}
Z_{Y'} &= \left(\sqrt{\frac{0.0000 + 2 \times 0.0003 + 0.0025}{4}} \right) \times [0.6103, 1.0181] \\
&= 0.0278 \times [0.6103, 1.0181] = [0.0170, 0.0283] \tag{56}
\end{aligned}$$

$Z_{Y'} = [0.0170, 0.0283]$ aralık değeri ağırlık merkezi yöntemi ile berraklaştırılır. Normalize berraklaştırılmış tahmini çıktı değeri $Berrak(Z_{Y'})_{normalize} = Berrak(Z_{Y'})_i / maks(Berrak(Z_{Y'})) = 0.7938$ bulunur. İlgili normalize gözlenen çıktı ile tahmini çıktı için $|Y_{normalize} - Berrak(Z_{Y'})_{normalize}| = |0.8333 - 0.7978| = 0.0355$ dir. Böylece, ZDGR-4 modelde tüm gözlemler için berraklaştırılmış tahmini çıktı değerler elde edilir.

ZDGR-4, KR-4 ve BR-4 modelleri için tahmini çıktı ve gözlenen çıktı değerlerin gösterimleri Şekil 4.3'de verilmektedir.



Şekil 4.3: ÇGTÇ sistem için gözlenen ve tahmini çıktılar

4.3. Model Performanslarının Karşılaştırılması

TGTÇ ve ÇGTÇ sistemlere ait Klasik, Bulanık ve ZDGR modellerin performans ölçütleri, sırasıyla, Tablo 4.6’da verilmektedir. Tablo 4.6’da verilen R^2 , düzeltilmiş R^2 ve AKOK performans ölçütlerine göre, TGTÇ için ZDGR-modellerin performansları klasik ve bulanık regresyon modellerin performanslarından daha iyi çıkmıştır.

Tablo 4.6: TGTÇ sistemler için model performans ölçütleri

Model	R^2	Düzeltilmiş R^2	AKOK
KR-1	%45.49	%45.26	0.2179
KR-2	%24.78	%24.46	0.2560
KR-3	%13.89	%13.51	0.2739
BR-1	%45.64	%45.40	0.2176
BR-2	%25.13	%24.81	0.2554
BR-3	%14.60	%14.23	0.2728

Tablo 4.6: (devam ediyor)

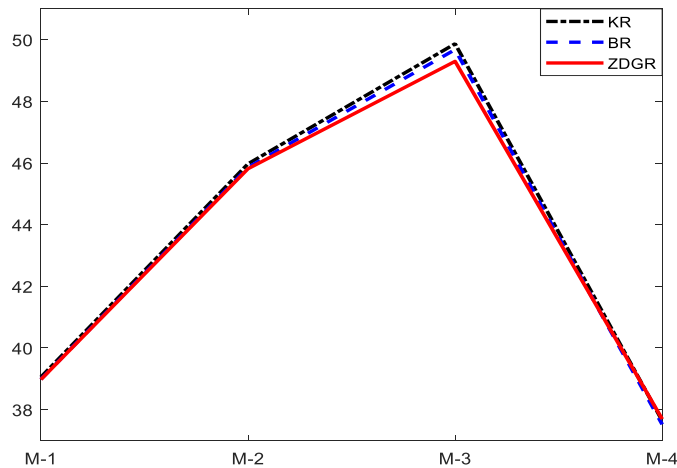
Model	R ²	Düzeltilmiş R ²	AKOK
ZDGR-1	%50.58	%50.37	0.2075
ZDGR-2	%34.71	%34.43	0.2385
ZDGR-3	%25.35	%25.03	0.2551

Tablo 4.7'ye göre, ZDGR-4 modelin performansı, klasik ve bulanık regresyon model performanslarından göz ardı edilebilecek düzeyde yüksektir. Bu nedenle, ZDGR-4 model performansının KR-4 ve BR-4 modellerinki ile benzer olduğu söylenebilir.

Tablo 4.7: ÇGTÇ sistem için model performans ölçütleri

Model	R ²	Düzeltilmiş R ²	AKOK
KR-4	%51.31	%50.68	0.2060
BR-4	%51.26	%50.62	0.2061
ZDGR-4	%51.33	%50.70	0.2060

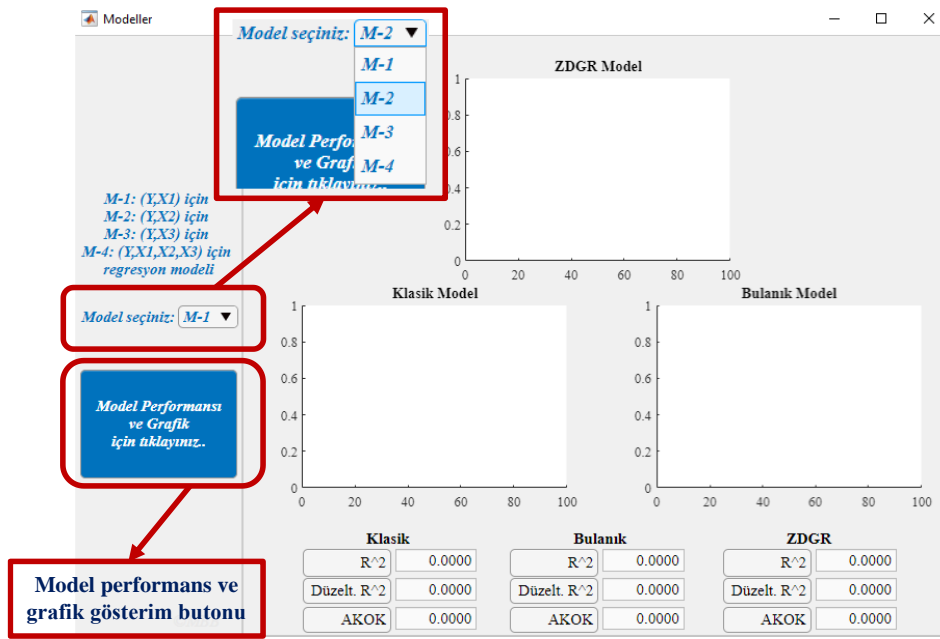
KR, BR ve ZDGR modellere ait Eşitlik 49 ile elde edilen toplam uygunluk (fonksiyonu) değerleri Şekil 4.4'deki gibidir. Gözlenen ve tahmin edilen çıktı değerler arasındaki farklılığın en küçük olması beklenir. Buna göre, TGTC sistem için ZDGR (ZDGR-1, ZDGR-2, ZDGR-3) modellere ait uygunluk değerlerin ilgili KR ve BR modellerden daha düşük olması nedeni ile daha iyidir. ÇGTÇ sistem için ZDGR model (ZDGR-4) özellikle KR-4 modeli ile benzerlik göstermiştir.



Şekil 4.4: KR, BR ve ZDGR modeller için uygunluk değerleri

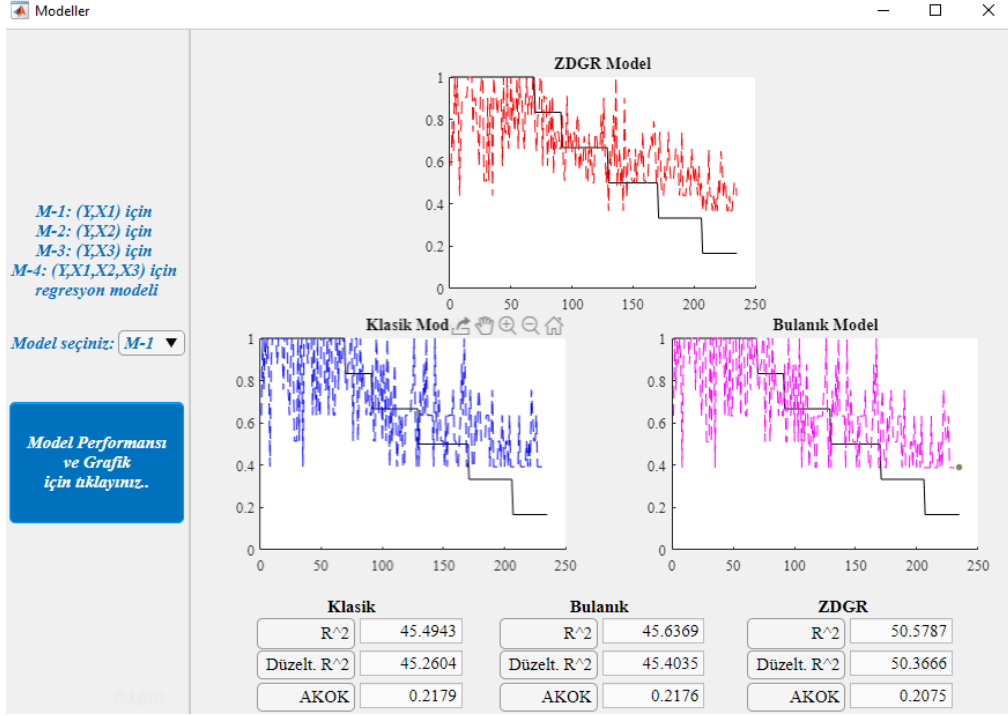
4.4. Matlab Arayüzün Tanıtılması

Bu tez çalışmasında ele alınan ZDGR-modelleme çalışması için klasik ve bulanık regresyon modelleri ile karşılaştırmalı ve veri görselleştirme araçlarını içeren bir Matlab arayüz Matlab 2022a programında yazılan kodlar ve Matlab App Designer ile oluşturulmuştur. KR, BR ve ZDGR modeller için hazırlanan kullanıcı dostu Matlab arayüzün genel görünümü Şekil 4.5’de gösterilmektedir.

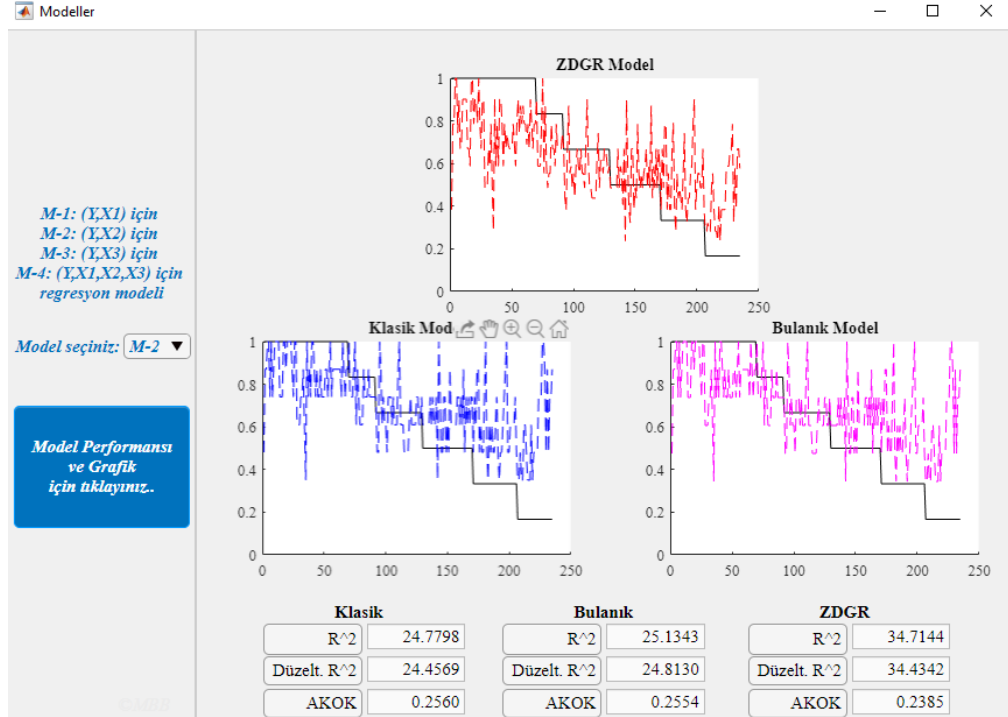


Şekil 4.5: Modelleme çalışmaları için hazırlanan Matlab arayüzün genel görünümü

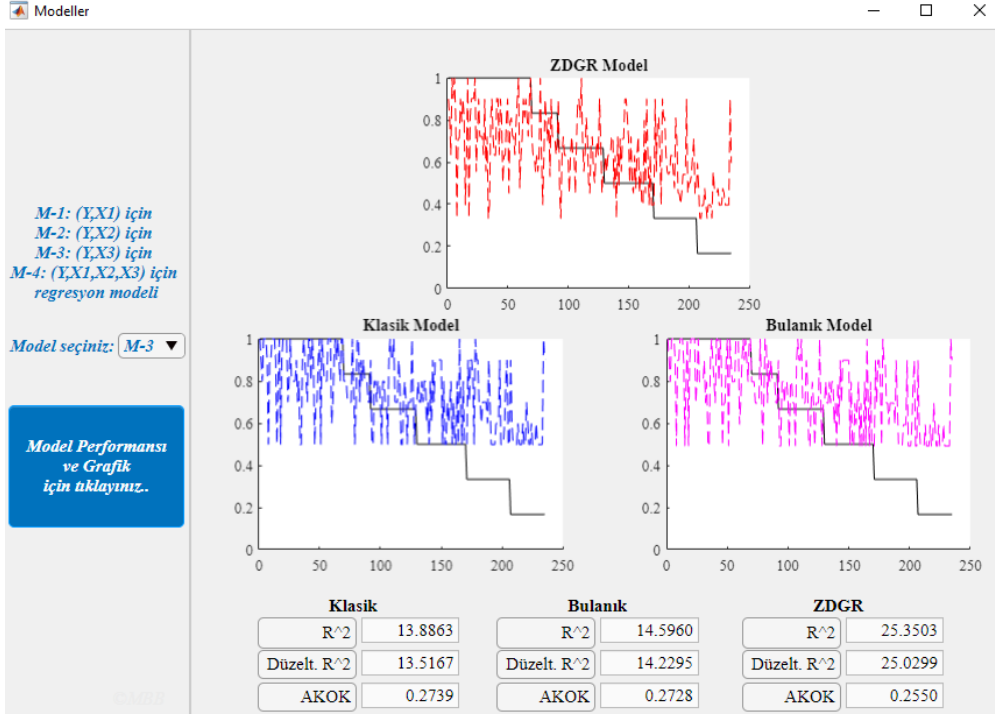
Dijital olgunluk değerlendirmelerine ilişkin TGTC/ÇGTC sistem verileri ile oluşturulan KR, BR ve ZDGR modeller için kullanıcı dostu arayüz ile elde edilen model performans ölçütlerinin ve grafik çıktılarının görünümleri Şekil 4.6-4.9’da verilmektedir.



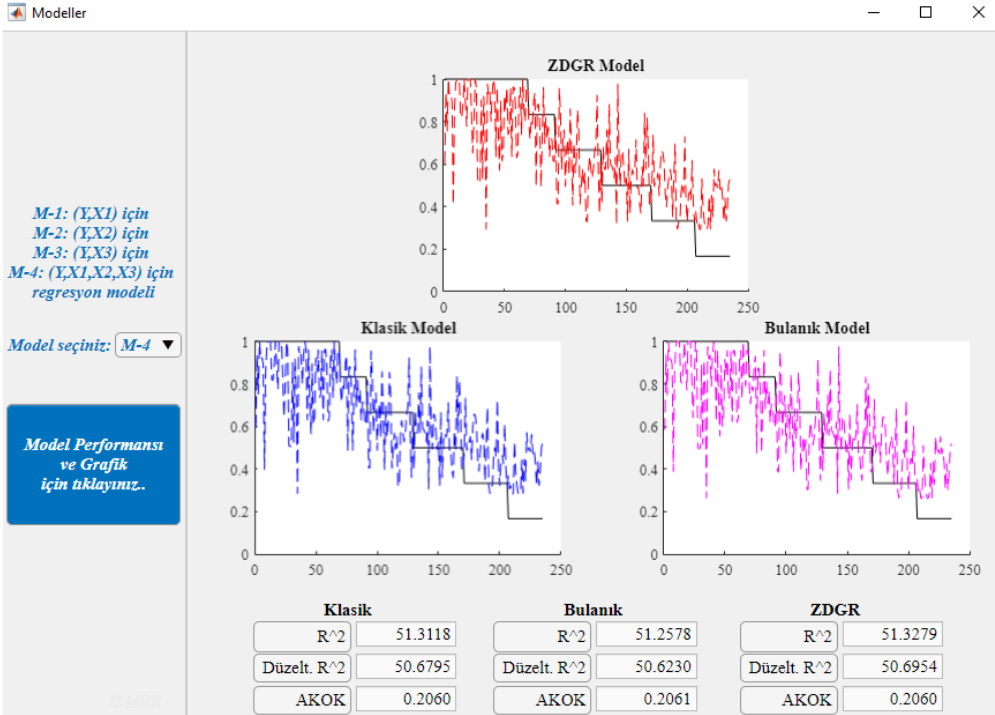
Şekil 4.6: (Y,X₁) için Matlab arayüz görüntüsü



Şekil 4.7: (Y,X₂) için Matlab arayüz görüntüsü



Şekil 4.8: (Y,X₃) için Matlab arayüz görüntüsü



Şekil 4.9: (Y,X₁,X₂,X₃) için Matlab arayüz görüntüsü

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Karar alma süreçleri kesin yapısı kaynaklı belirsizliklerin yanı sıra insan algısı ve/veya bilgi durumlarından da etkilenir. Bu gibi durumlarda kesin olmayan, belirsiz ve/veya eksik bilgilerle rasyonel kararlar alınabilir. Kesin olmayan bilginin güvenilirliğini ölçen Z-sayılar ile karar alma süreçleri etkin hale gelebilir. Karar problemlerine özgü bir sistemin yapısı tanımlanırken kesin bileşenleri (girdi ve çıktı değişkenleri) arasındaki fonksiyonel bağıntıyı oluşturan matematiksel/istatistiksel model ile ilgilenilir. Sisteme dair kesin yapıdaki bileşenler ve fonksiyonel bağıntısı kaynaklı belirsizlikleri indirgeyen ve aynı zamanda insan bilgi/algı durumlarını gözetken yaklaşımlara ihtiyaç vardır. Bu kapsamda, Z-sayılar tabanlı matematiksel model yaklaşımlarının geliştirilmesi önemlidir. Bulanık regresyonun genişletilmiş versiyonu olan Z-sayılarla dayanan regresyon çözümlemesi ile sistem bileşenlerinin arasındaki ilişkiler daha etkin bir şekilde modellenabilmektedir. Öte yandan, Z-sayılarla aritmetiksel işlemlerin karmaşıklığı ve türev gösterim problemi gibi matematiksel hesaplamalarda zorluklarla karşılaşılır. Bu zorluklar bant genişliği ve popülasyon temelli meta-sezgisel optimizasyon algoritmaları ile çözümlenebilir.

Bu tez çalışmasında, Z-sayılar ortamında diferansiyel gelişim algoritması temelli bulanık regresyon (ZDGR) model yaklaşımı içerdiği Z-ortamdaki yöntemlerle birlikte incelenmiştir. ZDGR yaklaşımı bir teknoloji firmasının dijital olgunluk değerlendirmeleri için oluşturulan tek girdi/çok girdi-tek çıktı sistem yapılarının tanımlanmasına uygulanmıştır. Bu yaklaşımda, ilgilenilen sistem bileşenleri (girdi ve çıktı değişkenler), oluşturulan basit/çoklu doğrusal regresyon modellerin katsayıları ve tahmini çıktıları Z-sayılar formunda elde edilmiştir. Z-sayısı ortamında model katsayıları diferansiyel gelişim algoritması ile optimize edilmiştir. Z-sayısı temelli bulanık tahmini çıktı berraklaştırıldıktan sonra gözlenen çıktı kesin değerleri ile farklılık/benzerlikleri incelenmiştir. ZDGR basit/çoklu model performansları klasik ve bulanık ortamda sistem bileşenlerin kısıtlamaları ile oluşturulan modellerin performansları ile karşılaştırılmıştır. Genel olarak, ZDGR modellerin performanslarının klasik ve bulanık regresyon modellerine göre daha iyi olduğu görülmüştür. Dijital olgunluk değerlendirmelerine ilişkin TGTC sistemler için oluşturulan ZDGR modellerin R^2 (düzeltilmiş R^2) ölçütleri yaklaşık %5-%12 oranlarda, AKOK ölçütleri ise yaklaşık %2 oranında klasik ve bulanık regresyon modellere göre daha iyidir. Dijital olgunluk değerlendirmelerine ilişkin ÇGTC sistem için ZDGR model sadece R^2 (düzeltilmiş

R²) ölçütü bakımından yaklaşık %0.02'lik oranda klasik modelden, yaklaşık %0.07'lik oranda bulanık modelden daha iyi çıkmıştır. Buna göre, dijital olgunluk değerlendirmelerine ait TGTÇ sistemlerin ZDGR modelleri klasik ve bulanık modellere göre daha iyi performansa sahip çıkarken ÇGTÇ sistem için KR, BR ve ZDGR modellerin benzer performansa sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Son olarak, tez çalışması kapsamında Matlab App Designer ve Matlab 2022a'da yazılan kodlar ile Z-ortamda modelleme çalışması için örnek bir kullanıcı dostu arayüz oluşturulmuştur.

İleriki çalışmalarda, ZDGR model yaklaşımının işleyişi ve performansı sürdürülebilir tarım, sürdürülebilir tedarikçi seçimi, AR-GE projelerinin değerlendirilmesi ve seçimi gibi problemlere uygulanarak izlenebilir. Ayrıca, Z-ortamda model katsayıların tahmini için farklı meta-sezgisel optimizasyon algoritmalarından yararlanılabilir.

KAYNAKLAR

- Aliev, R.A., Fazlollahi, B. ve Vahidov, R. (2002). Genetic algorithms-based fuzzy regression analysis. *Soft Computing*, 6 (6): 470–475.
- Aliev, R.A., Fazlollahi, B. ve Aliev, R.R. (2004). *Soft computing and its applications in business and economics*. New York: Springer, Heidelberg, 445 s.
- Aliev, R.A., Alizadeh, A.V. ve Huseynov, O.H. (2015). The arithmetic of discrete Z-numbers. *Information Sciences*, 290: 134–155.
- Aliev, R.A., Huseynov, O.H. ve Zeinalova, L.M. (2016). The arithmetic of continuous Z-numbers. *Information Sciences*, 373: 441–460.
- Aliev, R.A., Huseynov, O.H., ve Aliyev, R.R. (2017). A sum of a large number of Z-numbers. *Procedia Computer Science*, 120: 16–22.
- Arefi, M. ve Taheri, S.M. (2015). Least-squares regression based on Atanassov's intuitionistic fuzzy inputs outputs and Atanassov's intuitionistic fuzzy parameters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23 (4): 1142-1154.
- Atanassov, K.T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20 (1): 87-96.
- Atanassov, K.T. (1999). *Intuitionistic fuzzy sets*. New York: Springer, Heidelberg, 336 s.
- Aramburu N, North K, Zubillaga A. ve Salmador M. (2021). A digital capabilities dataset from small- and medium-sized enterprises in the Basque country (Spain). *Frontiers in Psychology*, 11: 1–5.
- Başer, F. (2007). Aktüeryal modellemede melez bulanık regresyon analizi. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 70.
- Bas E. ve Egrioglu, E. (2022). A fuzzy regression functions approach based on Gustafson-Kessel clustering algorithm. *Information Sciences*, 592: 206–214.
- Başkır, M.B. (2011). Bulanık kalite fonksiyon yayılımı yaklaşımının iyileştirilmesi ve uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 185.
- Başkır M.B. (2016). Type-1 fuzzy modeling for dupont analysis on Turkish insurance sector. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, 7 (1): 29–40.
- Başkır, M.B. ve Poleshchuk, O.M. (2022). Fuzzy clustering-based fuzzy regression function in Z-environment. *III. International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE 2022)*, 4-7 July 2022, Romania, 12-13.
- Buckley, J.J., Feuring, T. ve Hayashi, Y. (1999). Multivariate non-linear fuzzy regression: an evolutionary algorithm approach. *International Journal Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 7 (2): 83–98.

- Buckley, J.J. ve Feuring, T. (2000). Linear and non-linear fuzzy regression: Evolutionary algorithm solutions. *Fuzzy Sets and Systems*, 112 (3): 381–394.
- Buckley, J.J. ve Hayashi, Y. (1994). Fuzzy genetic algorithm and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 61 (2): 129–136.
- Celmins, A. (1987a). Least squares model fitting to fuzzy vector data. *Fuzzy Sets and Systems*, 22 (3): 245–269.
- Celmins, A. (1987b). Multidimensional least-squares fitting of Fuzzy models. *Mathematical Modelling*, 9 (9): 669–690.
- Chan, K.Y., Lam, H.K., Yiu, C.K.F. ve Dillon, T.S. (2017). A flexible fuzzy regression method for addressing nonlinear uncertainty on aesthetic quality assessments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47 (8): 2363–2377.
- Chang, Y.O. ve Ayyub, B.M. (2001). Fuzzy regression methods a comparative assessment. *Fuzzy Sets and Systems*, 119 (2): 187-203.
- Chen, F., Chen, Y., Zhou, J. ve Liu, Y. (2016). Optimizing h value for fuzzy linear regression with asymmetric triangular fuzzy coefficients, *Engineering Applications Artificial Intelligence*, 47: 16–24.
- Cheng, C.B. ve Lee, E.S. (1999). Applying fuzzy adaptive network to fuzzy regression analysis. *Computers and Mathematics with Applications*, 38 (2): 123–140.
- Chukhrova, N., Johannssen, A. (2019). Fuzzy regression analysis: Systematic review and bibliography. *Applied Soft Computing*, 84: 105708.
- Coppi, R. (2008). Management of uncertainty in statistical reasoning: The case of regression analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 47 (3): 284–305.
- Çelikyılmaz, A. ve Türkşen, I.B. (2008). Enhanced fuzzy system models with improved fuzzy clustering algorithm. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16 (3): 779-794.
- Diamond, P. (1988). Fuzzy least squares. *Information Sciences*, 46 (3): 141–157.
- Donoso, S., Marin, N. ve Vila, M.A. (2007). Fuzzy ridge regression with non symmetric membership functions and quadratic models. İn: Yin, H., Tino, P., Corchado, E., Byrne, W. ve Yao, X. (Ed.). *Intelligent Data Engineering and Automated Learning – IDEAL 2007 içinde* (4881: 135–144). Birmingham: UK, Lecture Notes in Computer Science.
- Dubois, D. ve Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and application*. United States of America: Academic Press, 393 s.
- Dunyak, J.P. ve Wunsch, D. (2000). Fuzzy regression by fuzzy number neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 112 (3): 371–380.

- Eyoh, I., John, R. ve De Maere, G. (2018). Interval type-2 A-intuitionistic fuzzy logic for regression problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26 (4): 2396–2408.
- Ezadi, S. ve Allahviranloo, T. (2018). Numerical solution of linear regression based on Z-numbers by improved neural network. *Intelligent Automation and Soft Computing*, 24 (1): 193–204.
- Egrioglu E. ve Bas E. (2023). Robust intuitionistic fuzzy regression functions approaches. *Information Sciences*, 638: 118992.
- Farnoosh, R., Ghasemian, J. ve Solaymani Fard, O. (2012). Integrating ridge-type regularization in fuzzy nonlinear regression. *Computational and Applied Mathematics*, 31 (2): 323–338.
- Hao, P.Y. ve Chiang, J.H. (2007). A fuzzy model of support vector regression machine. *International Journal of Fuzzy Systems*, 9 (1): 45–50.
- Hao, P.Y. ve Chiang, J.H. (2008). Fuzzy regression analysis by support vector learning approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16 (2): 428–441.
- Hesamian, G. ve Akbari, M.G. (2017). Semi-parametric partially logistic regression model with exact inputs and intuitionistic fuzzy outputs. *Applied Soft Computing*, 58: 517–526.
- Hong, D.H., Song, J.-K. ve Young Do, H. (2001). Fuzzy least-squares linear regression analysis using shape preserving operations. *Information Sciences*, 138 (1-4): 185–193.
- Hong, D.H. ve Hwang, C. (2003). Support vector fuzzy regression machines. *Fuzzy Sets and Systems*, 138 (2): 271–281.
- Hong, D. H. ve Hwang, C. (2006). *Fuzzy nonlinear regression model based on LS-SVM in feature space*. In: Wang, L., Jiao, L., Shi, G., Li, X. ve Liu, J. (Ed.). *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery FSKD 2006. içinde* (4223: 208-216). Springer, Berlin, Heidelberg: Lecture Notes in Computer.
- Hosseinzadeh, E., Hassanpour, H. ve Arefi, M. (2016). A weighted goal programming approach to estimate the linear regression model in full quasi type-2 fuzzy environment. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30 (3): 1319–1330.
- Ishibuchi, H. ve Tanaka, H. (1992). Fuzzy regression analysis using neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 50 (3): 257–265.
- Ishibuchi, H., Tanaka, H. ve Okada, H. (1993). An architecture of neural networks with interval weights and its application to fuzzy regression analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 57 (1): 27–39.
- Karasulu, B. (2015). *Esnek hesaplama – melez zeki sistemler için bir renber*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 409 s.

- Kaufmann, A. ve Gupta, M.M. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications*. New York: Van Nostrand Reinhold, 351 s.
- Kaufmann, A. ve Gupta, M.M. (1988). *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*, North-holland, NY, USA, 362 s.
- Kizilaslan B., Egrioglu E. ve Evren A.A. (2020). Intuitionistic fuzzy ridge regression functions. *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, 49 (3): 699–708.
- Lee, H.T. ve Chen, S.H. (2001). Fuzzy regression model with fuzzy input and output data for manpower forecasting. *Fuzzy Sets and Systems*, 119 (2): 205–213.
- Li, H., Liao, X., Li, Z., Pan, L., Qin, K. ve Yuan, M. (2024). The Operational Laws of Symmetric Triangular Z-Numbers. *Mathematics*, 12: 1443.
- Liu, Q., Cui, H., Tian, Y. ve Kang, B. (2020). On the negation of discrete Z-numbers. *Information Sciences*, 537: 18-29.
- Mohammadi, J. ve Taheri, S.M. (2004). Pedomodels fitting with fuzzy least squares regression. *Iran Journal Fuzzy Systems*, 1 (2): 45–61.
- Mogilenko, A.V., Pavlyuchenko, D.A. ve Manusov, V.Z. (2003). Development of fuzzy regression models using genetic algorithms. *International Journal Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 11 (4): 429–444.
- Otadi, M. (2014). Fully fuzzy polynomial regression with fuzzy neural networks. *Neurocomputing*, 142: 486–493.
- Özkan, M.M. (2003). *Bulanık hedef programlama* Bursa: Ekin Kitabevi, 288 s.
- Parvathi, R., Malathi, C., Akram, M. ve Atanassov, K. T. (2013). Intuitionistic fuzzy linear regression analysis. *Fuzzy Optimization Decision Making*, 12 (2): 215–229.
- Pedrycz, W. (1989). Fuzzy control and fuzzy systems. Taunton: *Research Studies Press John Wiley and Sons* Chichester, 225 s.
- Pehlivan, N.Y. ve Apaydin, A. (2016). Fuzzy radial basis function network for fuzzy regression with fuzzy input and fuzzy output. *Complex and Intelligent Systems*, 2 (1): 61–73.
- Pehlivan, N.Y. ve Turksen I.B. (2021). A novel multiplicative fuzzy regression function with a multiplicative fuzzy clustering algorithm. *Romanian Journal of Information Science and Technology*, 24: 79–98.
- Poleshchuk, O.M. (2022). A Predictive Nonlinear Regression Model Under Initial Z-Information. In: Radionov, A.A. ve Gasiyarov, V.R. (Ed.). *Advances in Automation III. RusAutoCon 2021. Lecture Notes in Electrical Engineering içinde* (383-392). Cham: Springer.

- Poleshchuk, O. ve Komarov, E. (2012). A fuzzy linear regression model for interval type-2 fuzzy sets. *Proceedings Conference North American Fuzzy Information Processing Society*, 06-08 Ağustos 2012, ABD, 1–5.
- Price, K.V., Storn, R.M. ve Lampinen, J.A. (2005). *Differential evolution—A practical approach to global optimization*. New York: Springer Science+Business Media., 538 s.
- Qin, J., Ye, J., Sun, X., Yong, R. ve Du, S.G. (2023). A single-valued neutrosophic Gaussian process regression approach for stability prediction of open-pit mine slopes. *Applied Intelligence*, 53: 13206–13223.
- Ramli, A.A., Watada, J. ve Pedrycz, W. (2011). Real-time fuzzy regression analysis: A convex hull approach. *European Journal of Operational Research*, 210 (3): 606–617.
- Redden, D.T. ve Woodall, W.H. (1996). Further Examination of Fuzzy Linear Regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 79 (2): 203–211.
- Sadikoglu, F., Huseynov, O. Ve Memmedova, K. (2016). Z-regression analysis in psychological and educational researches. *Procedia Computer Science*, 102: 385–389.
- Sakawa, M. ve Yano, H. (1992). Multiobjective Fuzzy linear regression analysis for Fuzzy input-output data. *Fuzzy Sets and Systems*, 47 (2): 173–181.
- Salama, A.A., Khaled, O.M. ve Mahfouz, K.M. (2014). Neutrosophic correlation and simple linear regression. *Neutrosophic Sets and Systems*, 5: 3-8.
- Savic, D. ve Pedrycz, W. (1991). Evolution of fuzzy linear regression models. *Fuzzy Sets and Systems*, 39: 51–63.
- Schweizer, B. ve Sklar, A. (1963). Associative functions and abstract semigroups. *Publications Mathematicae Debrecen*, 10: 69-81.
- Schweizer, B. ve Sklar, A. (1983). *Probabilistic metric spaces*. North Holland, Amsterdam, 275 s.
- Shapiro, A.F. (2005). *Fuzzy regression models*. State College: USA Penn State University, 1-17.
- Shen, K.-W., Wang, J. ve Wang, T.-L. (2018). The arithmetic of multidimensional Z-number. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 36: 1-16. 10.3233/JIFS-18927.
- Suk, H.W. ve Hwang, H. (2010). Regularized fuzzy clusterwise ridge regression. *Advances in Data Analysis Classification*, 4 (1): 35–51.
- Smarandache, F. (1998). *Neutrosophy. Neutrosophic probability, set, and logic*. USA: American Research Press, Rehoboth, 105 s.

- Storn, Rainer & Price, Kenneth. (1995). Differential Evolution: A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization Over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, 23: 1-15.
- Şanlı, K. ve Apaydın, A. (2004). The fuzzy regression analysis, the case of fuzzy data set outlier. *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 17 (3): 71-84.
- Tanaka, H., Uejima, S. ve Asai, K. (1980). Fuzzy linear regression model. *International congress on Applied Systems Research and Cybernetics*, Acapulco, Mexico.
- Tanaka, H., Uejima, S. ve Asai, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Man, Cybernetics*, 12 (6): 903–907.
- Tanaka H. (1987). Fuzzy data analysis by possibilistic linear models. *Fuzzy Sets and Systems*, 24: 363-375.
- Tanaka H., Hayashi I. ve Watada J. (1989). Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data. *European Journal of Operational Research*, 40: 389-396.
- Türkşen, I. B. (2006). *An Ontological and epistemological perspective of fuzzy set theory*. Elsevier B.V., 510 s.
- Türkşen, I.B. (2008). Fuzzy functions with LSE. *Applied Soft Computing*, 8: 1178–1188.
- Wang, H.F. ve Tsaur, R.C. (2000a). Insight of a fuzzy regression model. *Fuzzy Sets and Systems*, 112 (3): 355–369.
- Wang H. ve Tsaur, R.C. (2000b). Resolution of fuzzy regression models. *European Journal of Operational Research*, 126 (3): 637-650.
- Wong, S.K.M. ve Butz, C.J. (2001). Rough sets for uncertainty reasoning. In: Ziarko, W., Yao, Y. (Ed.). *Rough Sets and Current Trends in Computer Science içinde* (2005: 511-518). Springer, Berlin, Heidelberg: Lecture Notes in Computer Science.
- Wu, Q. ve Law, R. (2010). Fuzzy support vector regression machine with penalizing gaussian noises on triangular fuzzy number space. *Expert Systems with Applications*, 37 (12): 7788–7795.
- Yager, R. (2012). On a view of Zadeh's Z-numbers. In *Adv comput intell, Communications in Computer and Information Science*, 299: 90-101.
- Yang, M.S. ve Ko, C.H. (1997). On cluster-wise fuzzy regression analysis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems B*, 27 (1): 1–13.
- Yao, C.C. ve Yu, P.T. (2006). Fuzzy regression based on asymmetric support vector machines. *Applied Mathematics and Computation*, 182 (1): 175–193.
- Yıldız, N. ve Kahraman, C. (2020). CODAS method using Z-fuzzy numbers. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 38 (2): 1649-1662.

- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information Control*, 8: 338-353.
- Zadeh, L.A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23 (2): 421–427.
- Zadeh, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences*, 8: 199-249.
- Zadeh, L.A. (1996). Fuzzy logic=Computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4 (2): 103-111.
- Zadeh, L.A. (2002). From computing with numbers to computing with words from manipulation of measurements to manipulation to perceptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 46 (1): 105–119.
- Zadeh, L. A. (2011). A Note on Z-numbers. *Information Sciences*, 181 (14): 2923–2932.
- Zeinalova, L., Huseynov, O. ve Sharghi, P. (2018). A Z-number valued regression model and its application. *Intelligent Automation and Soft Computing*, 24 (1): 187–192.
- Zhang, T., Deng, Z., Choi, K.S., Liu, J., Wang, S. (2017). Robust extreme learning fuzzy systems using ridge regression for small and noisy datasets. *İN: 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) içinde* (1–7). Italy: Naples.
- Zuo, H., Zhang, G., Pedrycz, W., Behbood, V. ve Lu, J. (2017). Fuzzy regression transfer learning in Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25 (6): 1795–1807.
- Zuo, H., Zhang, G., Pedrycz, W., Behbood, V. ve Lu, J. (2018). Granular fuzzy regression domain adaptation in ta in takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26 (2): 847–858.

EKLER

EK 1. “Dijital olarak etkinleştirilen bir büyüme stratejisi ve zihniyeti geliştirmek” için ele alınan boyutlar ve düzeyleri (Aramburu vd., 2021).

Boyut	Düzyey-0	Düzyey-1	Düzyey-2
Dijital olarak etkinleştirilen büyüme stratejisi	Dijital olarak etkinleştirilen büyüme stratejisi yok	Rakiplerin değişen stratejilerine tepki veririz	Dijital çözümlerin firmanın hedeflerini gerçekleştirmemize nasıl yardımcı olacağına dair bazı anlayışlar var.
Dijital Liderlik	Liderlerin dijital olarak etkinleştirilen büyümeye ilgisi yok	Reaktif liderlik. Öncelikle rakiplerin ne yaptığını görmeyi tercih ediyoruz.	Liderler, dijital olarak etkinleştirilen büyümenin potansiyelini fark ediyor
Dijital zihniyet (tutumlar ve davranışlar)	Dijital olarak isteksiz	Firmamızda bazı “dijital yerliler” var ve onlar da buna göre davranıyorlar.	Şirketimizdeki insanlar dijitalleşme hakkında düşünmeye başlıyor ve yöneticiler yeni dijital davranışlar geliştiriyor.
Yetkili çalışanlar	Çalışanların yetkilendirilmesi yok	Bazı çalışanlar kendi başlarına dijital girişimler başlattı	Dijital inovasyonlar için çalışanların fikirlerini topluyoruz.

EK 1. (devam ediyor)

Boyut	Düzyey-3	Düzyey-4	Düzyey-5
Dijital olarak etkinleştirilen büyüme stratejisi	Dijital destekli büyümeyle ilgili stratejimizi gözden geçirmeye başladık.	Dijital olarak etkinleştirilmiş büyümenin bazı yönleriyle ilgili stratejimizi güncelledik	Kaynaklarımızla uyumlu, dijital olarak etkinleştirilen tutarlı bir inovasyon ve büyüme stratejimiz var
Dijital Liderlik	Liderler insanları dijital değişim için motive eder ve destekler	Liderler, çalışanları dijital girişimler için etkinleştirir	Dijital girişimler yüksek önceliğe sahiptir. Dijital girişimleri başlatmak, koordine etmek ve izlemek için tanımlanmış bir pozisyon/rol vardır
Dijital zihniyet (tutumlar ve davranışlar)	Dijitalleşmeye ve yeni davranışların geniş çapta geliştirilmesine yönelik genel olarak olumlu bir tutum vardır.	Firmamızdaki çoğu insan dijital fırsatları yakalamaya motive olur.	Firmadaki herkes dijital vizyonumuzu paylaşıyor ve dijitalleşmeye karşı olumlu tutum ve davranışlara sahip.
Yetkili çalışanlar	Çalışanlar dijital girişimleri denemeye teşvik edilir	Çalışanlar tarafından yönetilen dijital girişimler hayata geçirildi.	Çalışanlar, dijital girişimleri deneme ve bunları uygulama konusunda tam yetkiye sahiptir.

ÖZGEÇMİŞ

