



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEMSEL İZOTROP (HOMOJEN, BİR
CİNS) LEVHALARININ EĞİLMESİ PROBLEMLERİ**

HAZIRLAYAN
MESUT ÇAKMAK

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ DERVİŞ ÖZKAN

BARTIN-2019



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEMSEL İZOTROP (HOMOJEN, BİR CİNS)
LEVHALARININ EĞİLMESİ PROBLEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN

Mesut ÇAKMAK

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Derviş ÖZKAN - Bartın Üniversitesi
Üye : Prof. Dr. M. Sabri GÖK - Bartın Üniversitesi
Üye : Doç. Dr. Üyesi Okan ÜNAL - Karabük Üniversitesi

BARTIN-2019

KABUL VE ONAY

Mesut ÇAKMAK tarafından hazırlanan “ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEMSEL İZOTROP (HOMOJEN, BİR CİNS) LEVHALARININ EĞİLMESİ PROBLEMLERİ” başlıklı bu çalışma, 16.07.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Derviş ÖZKAN (Danışman)

Üye : Prof. Dr. M. Sabri GÖK

Üye : Doç. Dr. Okan ÜNAL

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve 20...../.....-..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. H. Selma ÇELİKAY
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Dr. Öğr. Üyesi Derviş ÖZKAN danışmanlığında hazırlamış olduğum “ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEMSEL İZOTROP (HOMOJEN, BİR CİNS) LEVHALARININ EĞİLMESİ PROBLEMLERİ” başlıklı Yüksek Lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

16.07.2019

Mesut ÇAKMAK

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması yıllarca süren emeklerin bir ürünü olup, çeşitli insanların işbirliği ve yardımı olmaksızın tezin tamamlanması mümkün değildi. Öncelikle, tez danışmanlığımı üstlenerek araştırma konusunun seçimi ve yürütülmesi sırasında değerli bilimsel uyarı ve önerilerinden yararlandığım saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Derviş ÖZKAN'a içtenlikle ve minnetle teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışmamda emeklerini hiç esirgemeyen ve benim üzerinde çok büyük meşği olan sayın hocam Prof. Dr. Etimad EYVAZOV'a teşekkür ederim.

Bu tezde jüri üyesi olma nezaketini gösteren, tezin incelenerek hataların düzeltilmesinde değerli vakitlerini harcayan sayın hocam Prof. Dr. M. Sabri GÖK'e şükranlarımı sunarım.

Hayatımın her safhasında olduğu gibi tez çalışmam süresince de verdikleri moral ve destek ile beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan kıymetli aile büyüklerime ve dostlarıma sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Mesut ÇAKMAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEMSEL İZOTROP (HOMOJEN, BİR CİNS) LEVHALARININ EĞİLMESİ PROBLEMLERİ

Mesut ÇAKMAK

Bartın Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Derviş ÖZKAN

İkinci Danışman: Prof. Dr. Etimad EYVAZOV

Bartın-2019, sayfa: 78

Bu çalışmada, teknik problemlerin gerginlik deformasyon durumunun incelenmesi genel metodların çözümü ile mümkün olmamaktadır. Parçalarda fazla yüklenmelerden dolayı bazen çalışmaları sırasında enine ve boyuna çatlaklar meydana gelmektedir. Bu çatlakların büyümesiyle parçaların genellikle de makinaların hasar almalarının yanı sıra kazaları da meydana getirmektedir.

Elastiklik teorisinin yassı problemleri birçok kaynaklarda basit biçimli levhaların çözümü verilmiştir. Lakin karmaşık yapılarda ve çatlaklı levhaların deformasyon gerilme durumu bizim çalışmamızda yüksek matematik kullanmakla belirlenmiştir. Kompleks fonksiyonların yardımı ile ve aynı zamanda konform inikas fonksiyonlarının kolosov-musxelişvi formülleri desteği ile problem çözülmüştür. Burada esas olarak yer değiştirme ve gerginlik bileşenlerini hesaplamak için $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ analitik fonksiyonlarının seçilmesiyle problemin çözümüne varılmıştır.

Çalışma sonucunda bir adet gerçek problemin çözümü ele alınmıştır. Bu problemin çözümü yeni bulunan denklemler yardımıyla yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İzotrop levhalar; gerginlik bileşenleri; elastiklik teorisi; düzlem deformasyonu; gerginlik fonksiyonları; kompleks değişken fonksiyonlar; silindirik gerginlik durumu.

Bilim Kodu: 625.01.02

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

PROBLEMS OF PLANARY ISOTROPIC (HOMOGENEOUS) PLATES BENDING OF ELASTICITY THEORY

Mesut ÇAKMAK

Bartın University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mechanical Engineering

Thesis Advisor: Assist. Prof. Derviş ÖZKAN

Second Adviser: Prof. Etimad EYVAZOV

Bartın-2019, pp: 78

In this project, the examination to the state of the tensile deformation of the technical problems is not possible with the analysis of general methods.

Occasionally, within the parts, a couple of longitudinal and transverse cracks may occur due to overloading while they are operating. Along with the growth of the crack size; besides damaging, accidents of the parts or most likely machine accidents may also happen.

Flat problems of the theory of elasticity is given as a simple solution to flat problems in many sources. However, in this project; the tensile deformation conditions of complex structures and cracked plates defined by using higher math analysis. The problem was solved with the help of the complex functions and kolosov muskhelishvili formulas of conformal inikas functions. Mainly, the solution to the problem obtained by choosing the analytical functions $\varphi(z)$ and $\omega(z)$ to calculate the displacement and components of tension.

In conclusion, as a result of the study, a solution to a real problem is examined. In addition, the solution to the problem is obtained with the help of newly found equations.

Keywords: Isotropic State plates; tension components; elasticity theory; plane deformation; the tension of the functions; complex variable functions; cylindrical tension condition.

Science Code: 625.01.02

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL VE ONAY	ii
BEYANNAME	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLolar DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Elastiklik Teorisinin Esas Denklemleri	2
1.2 Gerginlik	3
1.3 Deformasyon	13
1.4 Gerginlik Ve Deformasyon Arasındaki Bağlantılar (Genelleşmiş Hooke Kanunu)	15
1.5 Cisimlerin Elastiklik Simetrik Halleri (Türleri)	16
1.5.1 Elastiklik Simetri Düzlemi	17
1.5.2 Üç Elastik Simetrik Düzlem (Ortotrop Cisim)	18
1.5.3 İzotrop Düzlemi (Dönme Simetri Oku) Transversalizotrop Cisim	19
1.6 İzotrop Cisimler	20
1.7 Elastiklik Teorisinin Esas Teknikleri	25
1.7.1 Birinci Esas Sınır Meselesi	28
1.7.2 İkinci Esas Sınır Meselesi	29
1.7.3 Esas Karışık Sınır Meselesi	29
BÖLÜM 2 ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEM PROBLEMİ	33
2.1 Düzlem Deformasyon	33
2.2 Düzlem Gerginlik Durumu	36
2.3 Genelleşmiş Düzlem Gerginlik Durumu	37
2.4 Gerginlik Fonksiyonu	42

2.5 Kolosov-Musxelişvilinin Kompleks Potansiyelleri	45
BÖLÜM 3 BULGULAR VE TARTIŞMA	72
3.1 Silindirik Levhanın Daire Deliği Ve Çatlağının Gerginlik Durumunun Analiz Sonuçları	72
BÖLÜM 4 SONUÇ VE ÖNERİLER	74
KAYNAKÇA	75
ÖZGEÇMİŞ	78

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No	Sayfa No
1.1: Cisme etki eden kuvvetlerin gösterimi.	5
1.2: Cismin A ve B keşiği üzerindeki harici kuvvetler.	5
1.3: Küpün düşey olan gerginlikleri.	7
1.4: Y ve Z düzlemlerindeki gerilmeler.	7
1.5: A ve B noktalarının kayma sonucu yeni konumları.	8
2.1: A ve B yayının x ve y koordinatlarındaki harici kuvvet etkileri.	51
2.2: L konturlarının rastgele n kuvvet alanlarındaki halleri.	52
2.3: Polyar koordinat üzerindeki M noktası.	62
3.1: Silindirik levhanın üzerine etki eden kuvvetler ve esas ölçüleri.	72

TABLULAR DİZİNİ

Tablo	Sayfa
No	No
1.1: Eski ve yeni koordinat sistemi okları arasındaki kalan açıların kosinüsleri	12
1.2: X, Y ve Z koordinatlarında kosinüs değerleri	13
1.3: Ağaçların elastiklik sabitleri	23
1.4: Malzemenin elastiklik sabitleri	24
1.5: Malzemelerin dokunan gerginliklerinin değerleri	30
1.6: Uluslararası birimler sisteminin ölçü birimleri	31
1.7: Malzemeler için gerginlik değerleri	32
3.1: Silindirik levhaların etki kuvvetlerinin hesaplanan değerleri	73

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

a	:	İvme
B	:	Plak genişliği
E	:	Young Modülü
E_x	:	Plak x doğrultusundaki Young Modülü
E_y	:	Plak y doğrultusundaki Young Modülü
ϵ_a	:	Belirlenen sabit sayı
F	:	Gerilme kuvveti
G	:	İzotropik plak Kayma modülü
g	:	Yer Çekimi İvmesi
G_x	:	Ortotropik plak x doğrultusundaki Kayma modülü
G_y	:	Ortotropik plak y doğrultusundaki Kayma modülü
L	:	Plak boyu
I_x	:	En kesitin y eksenine göre atalet momenti
I_y	:	En kesitin x eksenine göre atalet momenti
m	:	Kütle
N	:	Düzlemdeki iç kuvvet
N_x	:	x doğrultusundaki düzlem içi kuvvet bileşeni
N_{xy}	:	Kayma düzlem içi kuvvet bileşeni
N_y	:	y doğrultusundaki düzlem içi kuvvet bileşeni
P	:	Basınç yükü
Q	:	Genelleşmiş Kuvvet
q	:	Genel Koordinat
R	:	Tepki Kuvveti
\bar{r}	:	Konum vektörü
T	:	Kinetik Enerji

t	:	Zaman
u, v, w	:	x, y, z doğrultularındaki deplasmanlar
x, y, z	:	Kartezyen Koordinatlar
λ	:	Lagrange çarpanı
$\bar{\rho}$:	Göreceli Konum Vektörü
$\bar{\omega}$:	Açısal Hız Vektörü
β	:	Narinlik oranı
γ	:	Kayma şekil değiştirme bileşeni
δ	:	Varyasyon operatörü
δA	:	Virtüel iş
$\delta \bar{r}$:	Hayali (Virtüel) Yer Değiştirme Vektörü
ε_x	:	x doğrultusundaki şekil değiştirme bileşeni
ε_y	:	y doğrultusundaki şekil değiştirme bileşeni
ϑ	:	Poisson oranı
ξ	:	Lateral yük düzeltme faktörü
σ	:	Normal gerilme
σ_0	:	Akma gerilmesi
σ_x	:	Boyuna doğrultudaki normal gerilme
σ_y	:	Enine doğrultudaki normal gerilme
Φ, ψ, θ	:	Euler Açılıarı

KISALTMALAR

- BFS : Pişmiş Kontrplak
BS-1 : I Tür Ağacından Olan Kontrplak
FSF : Su Geçirmez Kontrplak

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Günümüz de modern tekniğin gelişimi, güvenilir ve bilimsel esaslanmış metotlarla tasarım parçacıklarının ve makine bölümlerinin gerginlik durumlarının hesabı temel problemlerden biri olmuştur. Farklı faktörlerden, levhalardan, kabuklardan ve örtüklerden oluşan çeşitli yapılar hesaplanmasında modern mühendis düzeneklerinden yararlanılır.

Çelik konstrüksiyonlarının azaltılması amacıyla yapı-teknolojisi bakımından istismar şartına bağlı olarak bu yapı parçacıklarının bütünlüğü çeşitli deliklerle, çatlaklarla vb. faktörlerle zayıflatılırlar. Bu faktörlerin etrafındaki gerginlik konsantrasyonu ile yararlanılır ki, onun da değeri birçok hallerde bu malzemeler için bakılan gerginlik değeri artabilir.

Yapı parçacıklarının yük taşıma kabiliyetleri gerginliklerin maksimum olan yerlerinde, parçanın dayanıklılık ve gerginlik durumu belli olur. Çünkü yalnız gerginliklerin fazla olduğu yerlerde cisim çöküş gösterir. Farklı levhalarda ve makine parçalarının iş kabiliyeti bunlarda oluşan gerginliklere bağlıdır. Buna göre de parçada oluşan deliklerden, çatlaklardan vb. oluşumların etrafında gerginlik ve deformasyonların paylaşımını öğrenmek elastiklik teorisinin esas amaçlarındanıdır.

Deformasyona uğrayan katı cisimler mekaniğinin esas problemlerinden biri yukarıdaki oluşumların gerginlik deformasyon durumlarının belli edilmesidir. Son zamanlarda çeşitlik kuvvetler altında ve zor durumlarda parçacıkların durumunu (gerginlik ve deformasyon durumunu) belli etmek için matematiksel olarak esas olmuş elastiklik teorisinin metotlarından yararlanılır. Malumdur ki, elastiklik teorisinin en etkili metotlarından biri analitik ve konform inikas fonksiyonları metodudur.

Gösterilen etkiler etrafındaki gerginlik durum problemlerini inceleyen birçok bilim adamı vardır. Gerginlik durumunu ilk defa Q.Kirş göstermiştir. Birçok levhannın yuvarlak deliği etrafındaki gerginlikleri belli etmekle meşgul olmuştur. Sonra 1909 yılında Q.V.Kolosov işe düzlem deformasyon ve düzlem gerginlik durumlarında yer değiştirme ve gerginlik

bileşenlerini iki analitik $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları aracılığıyla ifade etmiştir. Bu metoda sonraları N.İ.Musxelişvili tarafından ele alınmıştır (Kolosov, 1935).

Bu çalışmada elastiklik teorisinin izotrop malzemeler üzerindeki etkilerle meydana gelen gerginlikler ve deformasyonları düzlemsel olarak matematiksel fonksiyonlarla incelenmiştir. Konform inikas fonksiyonların yardımı ile düzlem meselelerinde belli sınır şartlarını karşılayan analitik fonksiyonları yapılması işlenip hazırlanmıştır.

1.1 Elastiklik Teorisinin Esas Denklemleri

Mutlak katı cisim; herhangi bir güçten dolayı keyfi iki nokta arasındaki mesafenin hiçbir zaman değişmediği cisimdir. Deformasyona uğrayan katı cisim ise belli güçlerin etkisiyle, önceki durumdan yeni durumuna geçen cisimlerin, noktaların arasındaki mesafe değişir. Cisim önceki durumundan yeni durumuna geçtiği zaman noktaları arasında mesafe sabit kalırsa, mutlak bir katı cisim gibi yer değiştirme gerçekleşir. Böyle yer değiştirmeye halis yer değiştirme, bazen ise sert sürtünme de denir.

Bütün muhit; moleküler-kristal yapısında hiçbir boşluk, yarık olmayan cisimlere denir. Elastiklik ise tabiiatta bulunan bütün cisimler bu veya diğer derecede elastiklik özelliğine sahip olurlar. Cisimlere etki eden kuvvetleri ortadan kaldırdıktan sonra cisimler ilk hallerine gelirler ve deformasyon yok olur.

Elastiklik teorisinde cisme etki eden harici kuvvetler genel olarak iki türdür:

- Yüzeysel kuvvetler: Böyle kuvvetler cismin yüzeyinde paylaşılan kuvvetlerdir. Mesela bir cismin diğer cisme etkisi, hidrostatik basınç böyle kuvvetlerdendir.
- Hacim kuvvetleri: Cisim bütün kütlesi üzerinde paylaşılan kuvvetlerdir (ağırlık kuvveti, manyetik kuvvet, atalet kuvveti).

Cismin bütün noktalarında elastiklik özellikleri aynı olursa o cisim bir cins cisim denir. İzotrop cisim ise bütün yerlerinde fiziki-kimyevi özellikleri aynı olan cisimlerdir

1.2 Gerginlik

Cismin yüzeyinin dS elemanına etki eden kuvvet \overline{dF} olsun, burda:

$$\overline{Tn} = \frac{\overline{dF}}{dS}$$

İfadesi yüzeyinden bakılan M noktasında birim yüzeye düşen kuvvetini belli eder. Bu \overline{Tn} kuvveti yüzey kuvvetinin yoğunluğudur.

Cisme etki eden bütün kuvvetlerin baş vektörü (\overline{R}) ve keyfi seçilmiş 0 noktasına göre baş momenti (\overline{Mo}) aşağıdaki formüllerle belli olurlar:

$$\overline{R} = \int_S \overline{Tn} dS, \overline{Mo} = \int_S (\overline{\rho} \times \overline{Tn}) dS \quad (1)$$

Burada integral bütün yüzey üzerinde görülür. $\overline{\rho}$ Kuvvetinin uygulandığı keyfi M noktasının seçilmiş 0 noktasına teorik durumunu belli eden Radius- vektörüdür.

Analoji olarak eleman $dm = \gamma dV_i$ kütesine etki eden, \overline{dQ} hacim kuvvetlerinin baş vektörü ve baş momenti için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\overline{R} = \int_V \gamma \overline{F} dV_i, \overline{Mo} = \int_V (\overline{\rho} \times \overline{F}) \gamma dV_i \quad (2)$$

Burada $\overline{F} = \frac{d\overline{Q}}{dm}$ birim kütleye düşen kuvvet ve integral bütün hacim üzerinde görülür.

Keyfi $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_n$ Kuvvetler etkisi altında olan cismin partikülleri arasındaki karşılıklı etki kuvvetlerinden oluşur. Bu oluşum iç kuvvetleri belli etmek için kesikler metodu denilen yöntemden yararlanılır.

Böyle ki, cisim mm kesiti vasıtasıyla iki A ve B bölümlerine ayrılıp onların herhangi birinin durumuna (gerginlik-deformasyon durumuna) bakılır. Alınan parçaların her biri ona etki eden harici kuvvetlerin ve mm kesiti üzerine paylaşılan iç kuvvetler etkisinden dengede olur. Böylece, bu zaman mm kesiti üzerine paylaşılan iç kuvvetler şimdi ise cismin A bölümü (veya B bölümü) için yüzeysel kuvvet-dış kuvvet olur (Şekil 1.1). mm enine kesit üzerine paylaşılan dış kuvvetlerin değeri onların yoğunluğu ile belli olur. Başka

deyişle birim yüzeye düşen kuvvet ile belli olur. Bu mm kesiti üzerine etki eden dış kuvvetlerin yoğunluğu gerginlik adlandırır. Zıt etkisinin beraberlik prensibine uygun olarak cismin A bölümünün B bölümüne dS alanı üzerinde gösterdiği etki $\bar{T}ndS$ olsa burda B bölümünün A Bölümüne olan etkisi $(\bar{T} - ndS)$ olur.

Klasik elastiklik teorisi bütün muhitler (cisimler) modeline esaslıdır. Cismin parçaları arasındaki ilişki yalnız merkezi karşılığı etki kuvvetleri ile olur:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta S} = \frac{d\bar{R}}{dS} = \bar{T}n, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{M}}{\Delta S} = 0 \quad (3)$$

Cismin A bölüğünün mm keşiğinin elemanlar dS alanın normali \bar{n} , uygun olarak B bölümündeki mm keşiğinin dS alanının normali $(-\bar{n})$ ile gösterilir (Şekil 1.2). Cismin bütün olarak dengede olduğundan anlaşılır ki (Newton'un üçüncü kanununa esasen):

$$\begin{aligned} -\bar{T}ndS &= \bar{T} - ndS; \\ \bar{T} - n &= -\bar{T}n \end{aligned} \quad (4)$$

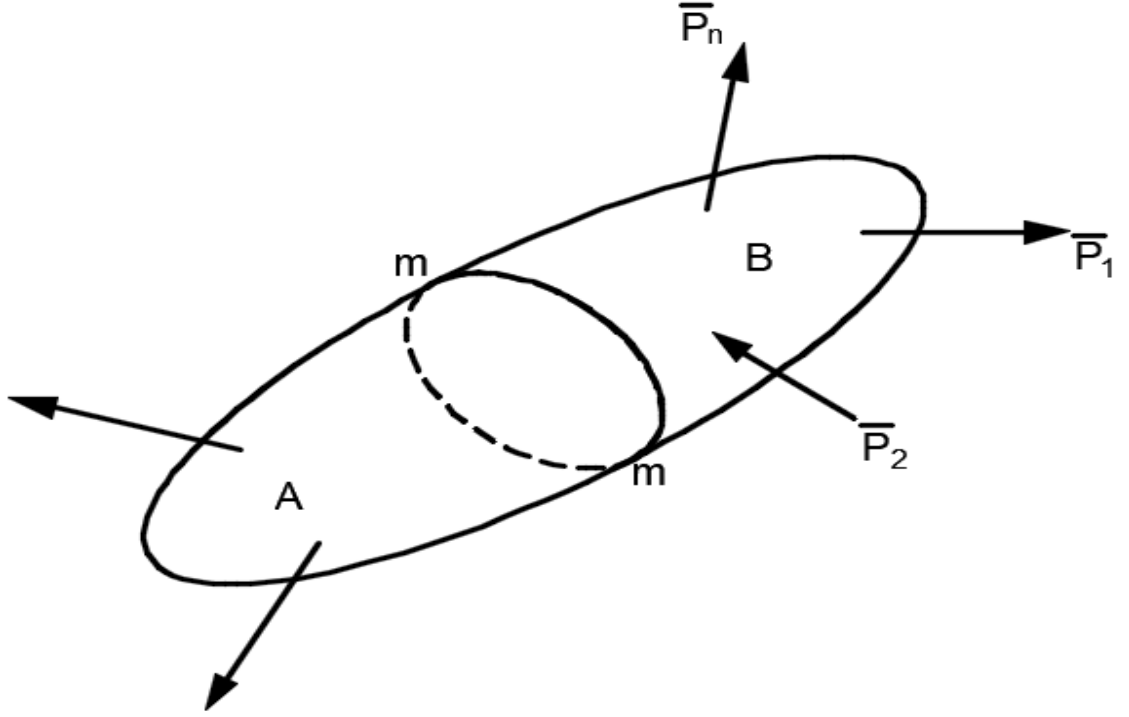
$\bar{T}n$ Vektörüne gerginlik vektörü denir. Gerginlik vektörü $\bar{T}n$, cismi iki bölgeye ayıran mm kesitinin düzlemine bağlı değildir. Cismin keyfi M noktasından geçen temel yüzeyler için gerginlik vektörü $\bar{T}n$ olur.

Cismin keyfi görülmüş M noktasından geçen çoklu $\bar{T}n$ gerginlik vektörleri toplamı bakılan M noktasındaki gerginlik durumunu belli eder. Aşağıdaki şekillerde bu durum gösterilmeye çalışılmıştır. Cismin farklı yüzeylerine etki eden kuvvetler gösterilmiştir (Şekil 1.1).

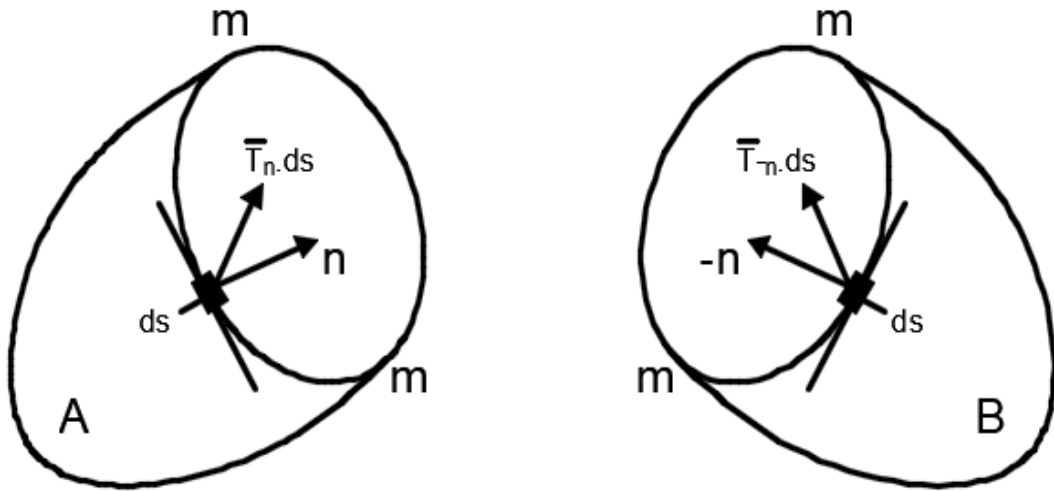
Cismin mm kesiti alındığında A ve B taraftarındaki gerilme ve normal gerginlikler belli olur. Bu gerginlikler $\bar{T}n$ gerginlik vektörlerinin toplamı ise M noktasındaki gerginlik durumunun şiddetini ve etkisini belli eder. Şekillerde de görüldüğü gibi cisme etki eden kuvvetlerin yönü farklı olduğu gibi şiddetini de farklı olabilir (Şekil 1.2).

Cismin bütün notlarındaki gerginlik durumunu incelemek için cismin her bir yerindeki kuvvetlerinin şiddetinin ve yönünü incelemekle belli olunur. Bunun için de aşağıdaki

şekillerdeki tüm kuvvetlerin ve gerginliklerin incelenmesinin önemi de çok büyüktür. Her bir noktadaki gerginlikleri bilmemiz gerekmektedir.



Şekil 1. 1: Cisme etki eden kuvvetlerin gösterimi.



Şekil 1. 2: Cismin A ve B keşiği üzerindeki harici kuvvetler.

Cismin bütün noktalarındaki gerginlik durumlarının toplamı genel gerginlik durumunu belli eder.

Gerginlik vektörü $\bar{T}n$ iki toplama ayrılır.

1. Normal toplanan, yüzeyin normali \bar{n} yönünde olup dS alanında düşey olur. Onun sembolik olarak σ_n gösterilir. Bu σ_n toplanan normal gerginlik denir.
2. Dokunarak toplanan, bu toplanan $\bar{T}n$ ve \bar{n} vektörlerinden geçen düzlem ile mm kesim düzleminin kesişmesinden alınan çizgide bakılan noktada çekilen dokunan üzere toplana (yani dS elemanlar yüzey üzerinde yerleşiyor). Bu toplanan sembolik olarak τ_n gösterilir ve değinen gerginlik olarak adlandırılır.

Normal gerginliğin yönü yüzeyin normali \bar{n} ile aynı yöne yönelirse, normal gerginlik (σ_n) olumlu (+), aksi yönde olursa olumsuz (-) işaretli olur. Eğer gerginlik vektörü $\bar{T}n$ yüzeyin normali \bar{n} üzerine yönelirse onda:

$$\sigma_n = T_n \text{ ve } \tau_n = 0 \quad (5)$$

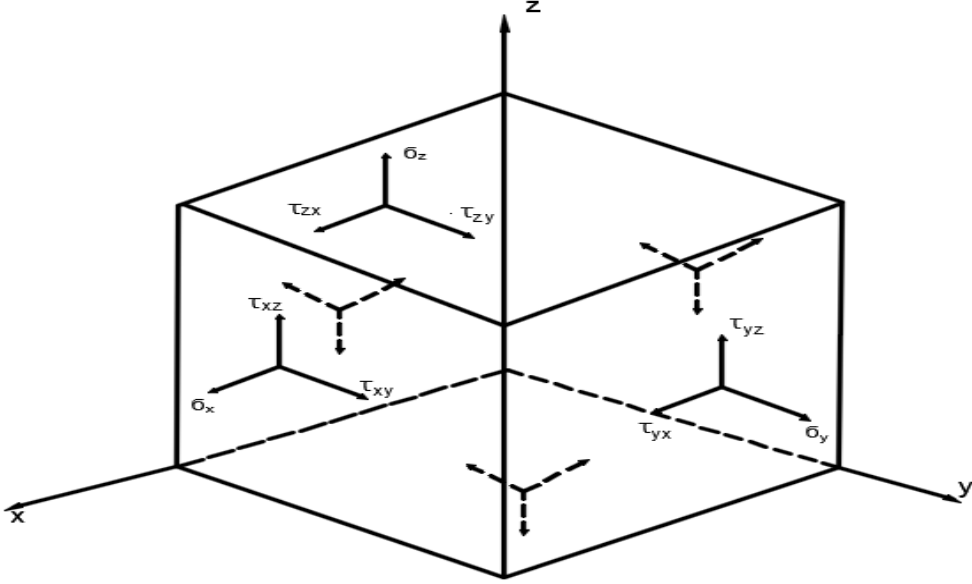
Cismin keyfi M noktasında, ondan küp şekilli bölgeye ayırıp, onun bir birine düşey olan gerginliklerine bakalım (Şekil 3). Temel parçacıklarındaki gerilme için aşağıdaki geleneksel işaretler benimsenmiştir (Dekart koordinat sisteminde). Küpün OX yönüne dik olan yüzeyinde oluşan gerilmeler σ_x, T_{xy} ve T_{xz} ile gösterilir. OY yönüne dik olan yüzeyine etki eden gerilmeler uygun olarak σ_y, T_{yx} ve T_{yz} ile gösterilir. OZ yönüne dik olan yüzeyde oluşan gerilmeler σ_z, T_{xz} ve T_{yz} ile gösterilir.

Böylelikle cisim keyfi M noktasında gerginlik durumu dokuz gerginlik bileşenleri ile ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, T_{xy}, T_{yx}, T_{yz}, T_{xz}, T_{zx}, T_{zy}$) belli olur. Bu gerginlik bileşenlerinden üçü $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ normal gerginliklerdir, kalan altısı ise $T_{xy}, T_{yx}, T_{yz}, T_{xz}, T_{zx}, T_{zy}$ dokunma gerginliğidir.

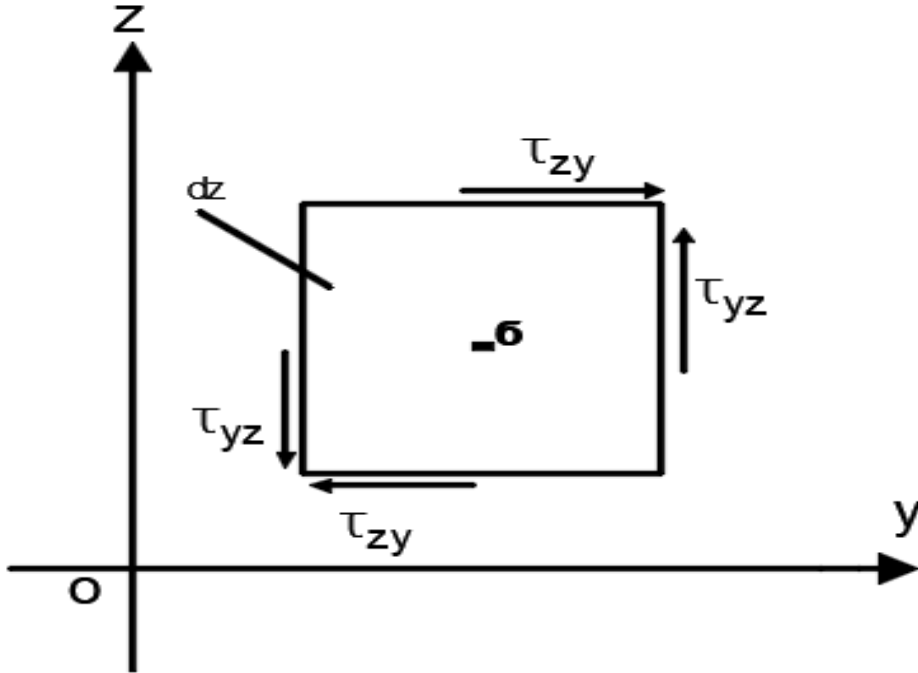
Birçok yazılarda gerginlik bileşenleri çeşitli işaretlerle gösterilir. Mesela dokuz gerginlik birleşenleri kompakt şekilde σ_{ij} böylede gösterilebilir. Burada $i, j = 1; 2; 3$ değerlerini alır. Bazen σ_{ij} gerginlik bileşenleri aşağıdaki matriste de gösterilebilir.

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (6)$$

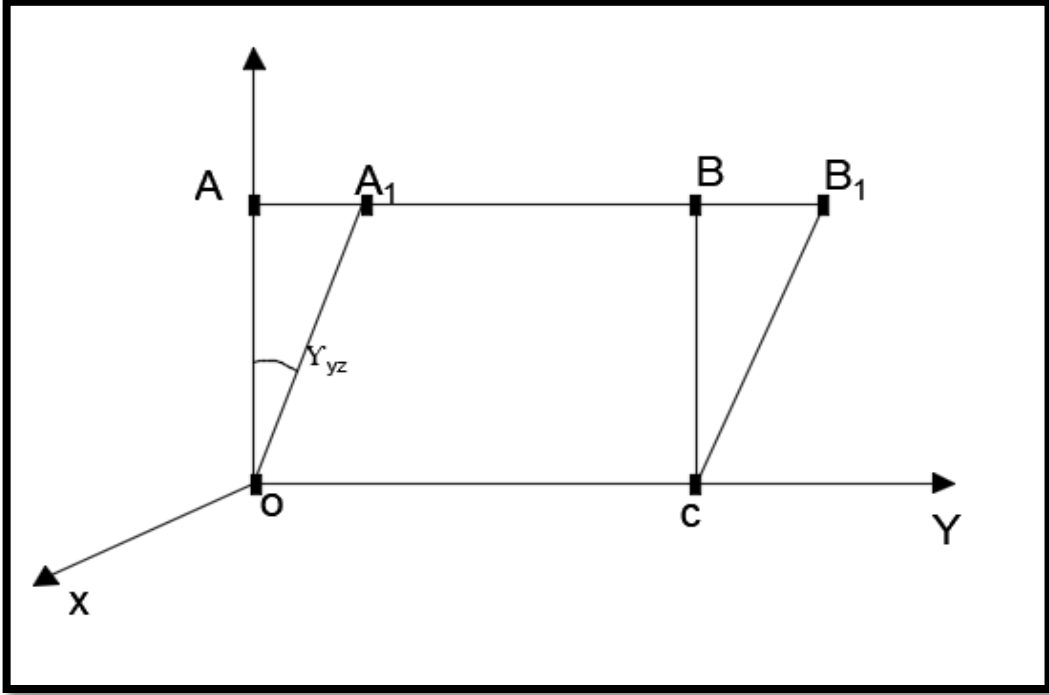
Matrisin baş köşegeni normal gerginlikleri, kalanları işe dokunan gerginlikleri gösterir.



Şekil 1. 3: Küpün düşey olan gerginlikleri.



Şekil 1. 4: Y ve Z düzlemlerindeki gerilmeler.



Şekil 1. 5: A ve B noktalarının kayma sonucu yeni konumları.

Bilindiği gibi üç boyutlu uzayda cismin keyfi noktasının koordinatları Dekart koordinat sisteminde x, y, z , ve silindirik koordinat sisteminde r, θ, z ve küresel koordinat sisteminde r, θ, φ ile gösterilir. Buna göre de Eşitlik 6 ifadeleri silindirik (r, θ, z) koordinat sisteminde böyle yazılır:

$$\begin{vmatrix} \sigma_r & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{r\theta} & \sigma_\theta & T_{\theta z} \\ T_{rz} & T_{\theta z} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (7)$$

Küresel koordinat sisteminde ise (r, θ, φ) Eşitlik 6 ifadesi yardımı ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{vmatrix} \sigma_r & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{r\theta} & \sigma_\theta & T_{\theta\varphi} \\ T_{r\varphi} & T_{\theta\varphi} & \sigma_\varphi \end{vmatrix} \quad (8)$$

Burada ispat edildiği gibi dokunan gerilmeler çift karşılığı olup bire bir benzerlerdir. Cisimden çıkarılan ve ölçüleri dx, dy, dz olan elemanların bölünmesinin her bir yüzeyinde

oluşan kuvvetlerin moment denklemlerini yazalım (denge halinde momentlerin toplamı sıfıra eşittir).

$T_{zy} dx dy dz = T_{yz} dx dy dz$ İfadelerini alarak böyle bir sonuca gelinir (Şekil 1.4):

$$T_{zy} = T_{yz} ; T_{xz} = T_{zx} \text{ ve } T_{xy} = T_{yx}$$

Başka bir deyişle gösterilen dokuz gerginlik bileşenleri yerine altı bileşen alır. Yani cismin istenilen M noktasının gerginlik durumu üç normal ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) ve üç dokunan (T_{xy}, T_{yx}, T_{yz}) gerginliklerle belli olur. Böylelikle $T_{zy} = T_{yz}, T_{xz} = T_{zx}$ ve $T_{xy} = T_{yx}$ olur. Görüldüğü gibi Eşitlik 6 matrisinin başköşelerinin sağ-solunda duranlar simetrik olup bire bir aynıdır. Gerginlik vektörünün $\bar{T}n$ Dekart koordinat yönü üzerinde durumları aşağıdaki denklemlerle belli olur.

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x \cdot n_1 + T_{xy} \cdot n_2 + T_{xz} \cdot n_3 \\ T_{ny} &= T_{xy} \cdot n_1 + \sigma_y \cdot n_2 + T_{yz} \cdot n_3 \\ T_{nz} &= \sigma_x \cdot n_1 + T_{xy} \cdot n_2 + T_{xz} \cdot n_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Burada $n_1 = \cos(\bar{n}, x), n_2 = \cos(\bar{n}, y), n_3 = \cos(\bar{n}, z)$ yönlendirici kosinüstür. Burada bilinmelidir ki gerginlik bileşenleri $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, T_{xy}, T_{yz}, T_{xz}$ gerginliklerini temsil eder. Gerginlik katsayısı ikidir. Gerginlik tenorunun silindirik (r, θ, z) ve küresel (r, θ, φ) koordinat sistemlerinde ifadesi Eşitlik 7 ve 8'deki gibidir.

Teorik mekaniği dersinden bellidir ki, keyfi güçler etkisi altında olan cisim dengede olması için etki eden kuvvetlerin baş vektörü (\bar{R}) ve baş momenti ($\overline{M_O}$) sıfıra eşit olmalıdır. Katı cisim için bu şartlar altı tane denge denklemleri ortaya koyar. Deformasyona uğrayan katı cisim için bu denge şartları bütünlüğüne bakılan cisim için doğru olduğu gibi, bu şartlar cisimden hayalen istenilen ölçüde çıkarılmış bölünmeler için de uygulanmış olmalıdır.

Böylelikle gerginlik bileşenleri cismin denge halinde aşağıdaki diferansiyel denklemleri elde edilir (Dekart koordinat sisteminde):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Burada X,Y ve Z hacim kuvvetlerin koordinat okları üzerinde toplananlardır. Bu denklem tekniklerinin yardımı ile cismin hareket denklemlerinde yazılabilir. Bunun için denge denklemlerinin sağ tarafına atalet kuvvetlerini de ilave etmek lazımdır. Öyledir ki atalet kuvveti cismin kütlesi ile ivmesi beraber olup, ivme vektörü ile ters yöndedir. Cismin yer değiştirme vektörünün (\bar{u}) ok üzerindeki yansımalarından (u, v, w) zamana göre ikinci türevi, ivme vektörünün \bar{a} uygun yansımalarını verdiği için, atalet kuvvetinin oklar üzerinde toplananları bu ifadelerle belli olur.

$$F_x^{at} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad F_y^{at} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad F_z^{at} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (11)$$

Denge denklemleri Eşitlik 9'da silindirik (r, θ, z) ve küresel (r, θ, φ) kordinat sistemlerinde de yazılabilir.

Silindirik koordinat sisteminde bu denklemler aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0$$

Burada F_r, F_θ, F_z silindirik kordinat sisteminde hacim kuvvetlerin toplamıdır. Silindirik koordinat sistemi için atalet kuvvetinin toplamları uygun olarak böyle gösterilir:

$$F_r^{at} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad F_\theta^{at} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2}; \quad F_z^{at} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (13)$$

Küresel koordinat sisteminde ise Eşitlik 9'da hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \cdot \text{ctg} \theta) + F_r &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \cdot \text{ctg} \theta + 3 \cdot \tau_{r\theta}) + F_\theta &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\varphi} \cdot \text{ctg} \theta + 3\tau_{r\varphi}) + F_\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Burada F_r, F_θ, F_φ uygun olarak hacim kuvvetlerin küresel koordinatların (r, θ, φ) üzerinde yansımalarıdır. Küresel koordinat sisteminde atalet kuvvetlerinin toplamları uygun olarak şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
F_r^{at} &= \gamma W_r = \gamma \cdot \frac{\partial^2 \cdot u_r}{\partial t^2} \\
F_\theta^{at} &= \gamma W_\theta = \gamma \cdot \frac{\partial^2 \cdot u_\theta}{\partial t^2} \\
F_\varphi^{at} &= \gamma W_\varphi = \gamma \cdot \frac{\partial^2 \cdot u_\varphi}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

Birçok hallerde gerginlik birleşenleri bir koordinat isteminde malum olduğunda başka koordinat sistemindeki ifadelerini de bilmek gerekir. Evvelki koordinat sisteminin okları x, y, z olduğu halde, yeni koordinat sisteminin okları ise x^1, y^1, z^1 ile gösterilirse gerginlik bileşenleri yeni koordinat sisteminde ifadeleri aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\sigma_{kv}^l = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \cdot n_{kj} \cdot n_{vj} \tag{16}$$

$$\sigma_{kv}^l = \sigma_{ij} \cdot n_{kj} \cdot n_{vj} \quad i, j, k = 1; 2; 3 \tag{17}$$

Burada n_{kj} ve n_{vj} önceki kordinat sistemi okları ile yeni kordinat sistemi okları arasında kalan açılarının kosinüsleridir (Tablo 1). Örneğin; $n_{11} = \cos(x^l, x)$; $n_{23} = \cos(y^l, z)$ gibi.

Bu Eşitlik 17 ifadesinde k ve v indeksleri sabit olur, i ve j indeksleri ise 1/3 değerlerini alarak limitler toplanır. Aynı kural ile yeni koordinat sisteminden önceki koordinat sistemine geçildikçe gerginlik bileşenleri aşağıdaki formülle belli olur.

Tablo 1.1: Eski ve yeni koordinat sistemi okları arasındaki kalan açılarının kosinüsleri.

	X	Y	Z
\mathbf{x}^l	n_{11}	n_{12}	n_{13}
\mathbf{y}^l	n_{21}	n_{22}	n_{23}
\mathbf{z}^l	n_{31}	n_{32}	n_{33}

$$\sigma_{ij} = \sigma_{kv}^l \cdot n_{kj} \cdot n_{vj} \quad (18)$$

Burada ise i ve j sabittir, k ve v ise 1/3 değerlerini alır ve toplanır. Eşitlik 17 ve 18 formüllerinde görüldüğü gibi önceki kabul ettiğimiz gerginlik bileşenlerinin sembolik işaretleri değişmiştir:

$$\sigma_x = \sigma_{11}; \quad \sigma_y = \sigma_{22}; \quad \sigma_z = \sigma_{33}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{12}; \quad \tau_{xz} = \sigma_{13}; \quad \tau_{yz} = \sigma_{23}$$

Olur.

Eşitlik 17 ifadesine bakılarak, silindirik koordinat sistemindeki gerginlik bileşenleri ile Dekart koordinat sistemindeki gerginlik bileşenleri arasındaki bağlantı şu şekilde olur:

$$\sigma_r = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (19)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{xz} \cdot \cos \theta + \tau_{yz} \cdot \sin \theta$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{xz} \cdot \sin \theta + \tau_{yz} \cdot \cos \theta; \quad \sigma_z = \sigma_z$$

Bu durumda n_{ij} yönlendiren kosinüs için düzenlenen tablo bu şekildedir (Tablo 1.2):

Tablo 1.2: X, Y ve Z koordinatlarında kosinüs değerleri.

	X	Y	Z
x^l	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
y^l	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
z^l	0	0	1

1.3 Deformasyon

Bütün cismin deformasyonu denilince, belli kuvvetler etkisinde cismin noktaları arasındaki mesafe değişmiş olur. Deformasyonların kesintisiz olduğu kabul edilir. Belli kuvvetler altında cisim önceki halinden (V) yeni haline (V^l) geçince cismin keyfi M noktası ise M^l halini alır. Bu zaman $\bar{u} = \overline{MM^l}$ vektörü (yani M noktasının başlangıç ve son halini birleştiren vektör) yer değiştirme vektörü denir.

Yer değiştirme vektörünün \bar{u} bileşenleri u_j keyfi M noktasının koordinatları ile ifade edilir (buna langraj usulü denir). Son haline uygun gelen M^l noktasının koordinatları ifade edilir (buna ise eyler usulü denir).

Klasik elastiklik teorisine esasen langura usulünden yararlanılır. Hidromekanik te ise eyler usulünden yararlanılır. Yer değiştirme vektörü \bar{u} dekart koordinat sisteminde toplananları (okları üzerinde izdüşümleri) uygun olarak u, ϑ ve ω ile gösterilir. Malumdur ki, cismin bakılan $M(x, y, z)$ noktasında deformasyonu üç bağıl uzama ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) ve üç bağıl açı yer değiştirmesi ile ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) belli olur. Buna deformasyon bileşenleri denir.

Dekart koordinat sisteminde yer değiştirme vektörünün izdüşümü (u, ϑ, ω) ile deformasyon bileşenleri ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) arasında aşağıdaki bağılıklar vardır.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (20)$$

Bu ifadelerde $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve ε_z uygun olarak x,y ve z yönleri istikametinde nisbi uzama, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ise nisbi sapma deformasyonları belli olur (mesela ε_x deformasyon bileşeni önceden x yönüne paralel olan hattı deformasyona uğradığında OX yönünde nisbi uzama gösterir). Böylece de γ_{xy} nisbi kayma deformasyonu xz ve yz düzlemleri arasında olan dikdörtgenin $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ kadar azaldığını yani göreceli açı yer değişmesini gösterir.

Bu Eşitlik 20 ifadesini ilk defa Koşi (1789-1850) bulduğu için bazen Koşi'nin diferansiyel bağımlıkları da denir. Silindirik koordinat sisteminde (r, θ, z) Eşitlik 20 ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta}; \gamma_{rz} = \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (21)$$

Küresel koordinat sisteminde (ρ, θ, φ) ise aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \varepsilon_\theta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{\rho} \cdot \text{cgt } \theta + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\ \gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cdot \text{cgt } \theta \right) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} + \frac{u_\varphi}{\rho} \\ \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho} \end{aligned} \quad (22)$$

Eğer deformasyon bileşenlerinden birisinden başka, mesela ε_x den başka hepsi sıfır olursa anlaşılır ki, cismin bütün elemanları yalnız OX yönünde aynı oranda uzayacak. Bu duruma basit veya bir cins sıkıştırma denir. Benzer durumda ε_y ve ya ε_z bileşenleri için de geçerlidir.

Eğer göreceli kayma deformasyonlarından birinde, mesela γ_{yz} başka kalan bütün deformasyon bileşenleri sıfır olursa, burda YOZ düzlemi üzerine götürülmüş herhangi OABS dikdörtgeninde y yönüne paralel olan AB tarafı göreceli kaymadan sonra A_1B_1 durumunu alır.(yüksek dereceli sonsuz küçük miktarlar göz önüne almazsak). Bu durum basit veya bir cins kayma denir (Şekil 1.5). Doğrusal deformasyonlar $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve ε_z pozitif işaretli olduğunda cisim olumlu-doğrusal uzanır, aksi halde ise cisim sıkıştırılmış doğrusal elemanlar görülür. Açık deformasyonları ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) pozitif işaretli olunca doğrusal elemanla kordinat okları arasındaki açılar (mesela Şekil 5 COA) küçülür, aksi halde bu açılar büyür. Deformasyona uğrayan cismin durumunun yer değiştirme vektörünün toplamlarını (u, ϑ, ω fonksiyonlarını) bilmekle belli olur.

Deformasyonların kesilmez olması için deformasyon bileşenleri ($\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{xy}$) arasındaki matematiksel bağ ifadelerini ilk defa (1860) Sen-Venanın bulduğu için Sen-Venanın beraberlik prensibi bazen de deformasyonların kesilmeyen prensibi denir. Bunlar aşağıdakilerdir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{23}$$

1.4 Gerginlik Ve Deformasyon Arasındaki Bağlantılar (Genelleşmiş Hooke Kanunu)

Gerginlik ve deformasyon bileşenlerinin ifadelerini belli ederken kabul edilir ki, bakılan cisim bütün muhittir. Yani alınan sonuçlar (formüller) istenilen cisim için (katı cisim, sıvı, gaz, elastik ve ya elastik plastik cisimler vb.) doğrudur. Açıkça bu durumda gerginlik bileşenleri ile deformasyon bileşenleri birbirinden ayrılmış halde verilemez. Onlar arasında belirli ilişki vardır.

Gerginlik bileşenleri ile deformasyon bileşenleri arasında benzerliklere elastiklik teorisinin asıllı kanunu genelleşmiştir. Buna hooke kanunu denir. Cismin bakılan noktasında gerginlik bileşenleri uygun deformasyon bileşenlerinin doğrusal ve tek fonksiyonlarıdır. Bu kanun matematiksel olarak şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{xz}; \\
\sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{yz} + c_{26}\gamma_{xz}; \\
\sigma_z &= c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{yz} + c_{36}\gamma_{xz}; \\
\gamma_{xy} &= c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{yz} + c_{46}\gamma_{xz}; \\
\gamma_{yz} &= c_{51}\varepsilon_x + c_{52}\varepsilon_y + c_{53}\varepsilon_z + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{yz} + c_{56}\gamma_{xz}; \\
\gamma_{xz} &= c_{61}\varepsilon_x + c_{62}\varepsilon_y + c_{63}\varepsilon_z + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{yz} + c_{66}\gamma_{xz};
\end{aligned} \tag{24}$$

Böylece deformasyon bileşenleri uygun gerginlik bileşenlerine bağımlılık hali genelleşmiştir. Hooke kanunu Dekart koordinat isteminde ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= A_{11}\sigma_x + A_{12}\sigma_y + A_{13}\sigma_z + A_{14}\tau_{yz} + A_{15}\tau_{xz} + A_{16}\tau_{xy}; \\
\varepsilon_y &= A_{21}\sigma_x + A_{22}\sigma_y + A_{23}\sigma_z + A_{24}\tau_{yz} + A_{25}\tau_{xz} + A_{26}\tau_{xy}; \\
\varepsilon_z &= A_{31}\sigma_x + A_{32}\sigma_y + A_{33}\sigma_z + A_{34}\tau_{yz} + A_{35}\tau_{xz} + A_{36}\tau_{xy}; \\
\gamma_{yz} &= A_{41}\sigma_x + A_{42}\sigma_y + A_{43}\sigma_z + A_{44}\tau_{yz} + A_{45}\tau_{xz} + A_{46}\tau_{xy}; \\
\gamma_{xz} &= A_{51}\sigma_x + A_{52}\sigma_y + A_{53}\sigma_z + A_{54}\tau_{yz} + A_{55}\tau_{xz} + A_{56}\tau_{xy}; \\
\gamma_{xy} &= A_{61}\sigma_x + A_{62}\sigma_y + A_{63}\sigma_z + A_{64}\tau_{yz} + A_{65}\tau_{xz} + A_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{25}$$

Bu ifadelerdeki C_{ij} ve A_{ij} ($i, j = 1; 2; 6$) katsayıları elastiklik sabitleridir. Genel halde bu katsayıları 36 olur. Lakin bu katsayılar Eşitlik 24 ve 25 ifadelerinin baş köşegenlerine simetrik olduklarından, onlar çift olup bire bir aynıdır. Ona göre de bu katsayılar arasında $C_{ij} = C_{ji}$ ve $A_{ij} = A_{ji}$ gibi benzerlikler olur. Böylelikle C_{ij} ve A_{ij} katsayılarının 21'e azalır.

1.5 Cisimlerin Elastiklik Simetrik Halleri (Türleri)

Yukarıda belirtmiştik ki, eğer cismin istenilen noktasında istenilen yönlerde elastiklik özellikleri aynı olursa bu cisim izotrop cisim diye adlandırılır. Aksi halde, yani çeşitli

yönlere cismin elastiklik özellikleri de değişik olsa bu cisimler ise anizotrop cisimler olarak adlandırılır. Diğer taraftan da kayıt etmiştik ki, cismin bütün noktalarında elastiklik özellikleri aynı olduğunda o bir cins cisim, aksi halde yani çeşitli noktalarında elastiklik özellikleri de değişik olursa bu cisimler gayri bir cins cisimler olarak adlandırılır.

Genelleştirilmiş Hooke kanununun ifadesinden Eşitlik 24 ve 25 denkelmelerinde görebiliriz ki, ona dahil olan C_{ij} ve A_{ij} sabitlerinin sayı değeri 21 olur. Ancak V.V.Novojilov ve S.Q.Lexnitskiy gösterebilir ki, onları öyle belli istikamette götürmemiz lazım ki, umumi halde bu C_{ij} ve A_{ij} sabitlerinin sayısı 21 olur yoksa azalıp 18 olur. Genelleşmiş hooke kanununun her iki seçenekte de yazılışını aşağıda sade formüller ile verilebilir (Globenko, 1975).

Gerginliklere göre:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (26)$$

Deformasyona göre:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (27)$$

Bu ifadelerde aşağıdaki şartlar kabul edilir:

- $A_{ij} = A_{mnl}; \quad C_{ij} = C_{mnl}; \quad i, j = 1;2;3.$
- $A_{ij} = 2A_{mnl}; \quad C_{ij} = 2C_{mnl}; \quad \text{eğer } i \text{ ve } j = 4, 5, 6 \text{ olursa.}$
- $A_{ij} = 4A_{mnl}; \quad C_{ij} = 4C_{mnl}; \quad \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ her ikisi } 4, 5, 6 \text{ olursa.}$

Eğer anizotrop cismin yapısı her hangi bir simetriye sahipse, onda o cismin elastiklik özelliklerinde de simetri tespit edilir. Elastiklik simetrisinin esas dört özel halleri ayırt edilir.

1.5.1 Elastiklik Simetri Düzlemi

Bu halde cismin keyfi noktasından geçen düzlem bu özelliklere sahip olur. Bu düzleme nazaran simetrik olan keyfi iki istikamet elastiklik özelliklerine göre eşdeğerlerdir. Bu

elastik simetrik düzlemlere düşey olan istikamette baş istikamet (bazen baş elastik istikameti) denir. Bu halde koordinat oklarından birini, mesela z okunu bu simetrik düzleme normal yöneltsek ve diğer iki oklar (x ve y) aynı düzlem üzerinde yerleşse, onda Eşitlik 25'e dahil olan aşağıdaki elastiklik katsayıları (A_{ij}) sıfır olur:

$$A_{14}=A_{24}=A_{34}=A_{46}=A_{15}=A_{25}=A_{35}=A_{56} = 0 \quad (28)$$

Onda A_{ij} Katsayılarının sıfırdan farklılarının sayısı azalıp 13 olur. Bu zaman genelleşmiş Hooke kanunu Eşitlik 25 (deformasyonlarla) bu şekli alırlar:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= A_{11} \cdot \sigma_x + A_{12} \cdot \sigma_y + A_{13} \cdot \sigma_z + A_{16} \cdot T_{xy} \\ \varepsilon_y &= A_{12} \cdot \sigma_x + A_{22} \cdot \sigma_y + A_{23} \cdot \sigma_z + A_{26} \cdot T_{xy} \\ \varepsilon_z &= A_{13} \cdot \sigma_x + A_{32} \cdot \sigma_y + A_{33} \cdot \sigma_z + A_{36} \cdot T_{xy} \\ \gamma_{xz} &= A_{45} \cdot T_{xy} + A_{55} \cdot T_{xy} \\ \gamma_{xz} &= A_{44} \cdot T_{xy} + A_{45} \cdot T_{xy} \\ \gamma_{xz} &= A_{16} \cdot \sigma_x + A_{26} \cdot \sigma_y + A_{36} \cdot \sigma_z + A_{66} \cdot T_{xy} \end{aligned} \quad (29)$$

1.5.2 Üç Elastik Simetrik Düzlem (Ortotrop Cisim)

Eğer cisim bir birine düşey olan iki elastik simetri düzleme sahipse, bu düzleme düşey olan üçüncü düzlem de elastik simetrik düzlem olur. Ona göre de üç elastik simetrik düzlem haline bakılır. Cismin her bir noktasından bir birine düşey olan üç elastik simetrik düzlem içinden geçen ve aynı adlı düzlemlerin bütün noktaları karşılıklı bir birine paraleldirler. Bu halde $axyz$ koordinat sisteminin okları aynı düzlemlere normal olarak yöneltse Eşitlik 28 ifadesindeki katsayılara ek, aşağıdaki katsayılarda sıfır olur:

$$A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{45} = 0 \quad (30)$$

Bu halde genelleşmiş Hooke kanunu Eşitlik 25'de aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= A_{11} \cdot \sigma_x + A_{12} \cdot \sigma_y + A_{13} \cdot \sigma_z \\ \varepsilon_y &= A_{12} \cdot \sigma_x + A_{22} \cdot \sigma_y + A_{23} \cdot \sigma_z \\ \varepsilon_z &= A_{13} \cdot \sigma_x + A_{32} \cdot \sigma_y + A_{33} \cdot \sigma_z \end{aligned}$$

$$\gamma_{yz} = A_{44} \cdot T_{yz}; \quad \gamma_{xz} = A_{55} \cdot T_{xz}; \quad \gamma_{xy} = A_{66} \cdot T_{xy}; \quad (31)$$

Bütün noktalarında üç ortogonal elastik simetrik düzleme sahip olan cisimlere ortogonal anizotrop cisim ve ya sade olarak ortotrop cisimler denir. Görüldüğü gibi Eşitlik 31 ifadesinde serbest değişen katsayıların değeri dokuzdur. Eğer Eşitlik 31 ifadesinde dahil olan A_{ij} elastik sabitleri yerine uygun teknik sabitleri E_i, G_{ij} ve V_{ij} dahil edersek (31) denklemleri aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_x - \frac{V_{21}}{E_2} \cdot \sigma_y - \frac{V_{31}}{E_3} \cdot \sigma_z \\ \epsilon_y &= -\frac{V_{12}}{E_1} \cdot \sigma_x + \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_y - \frac{V_{32}}{E_3} \cdot \sigma_z \\ \epsilon_z &= -\frac{V_{13}}{E_1} \cdot \sigma_x - \frac{V_{23}}{E_2} \cdot \sigma_y + \frac{1}{E_3} \cdot \sigma_z \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}} \cdot T_{yz}; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \cdot T_{xz}; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \cdot T_{xy} \end{aligned} \quad (32)$$

Eğer Eşitlik 31 ve 32'in ifadelerini eğer karşılaştırsak onda altı Poisson katsayılarından ($V_{12}, V_{21}, V_{31}, V_{13}, V_{32}$ ve V_{23}) yalnız üçü serbest değişendir, Çünkü bu karşılaştırma aşağıdaki üç bağıntı yer alınır.

$$E_1 V_{21} = E_2 V_{12}; \quad E_2 V_{32} = E_3 V_{23}; \quad E_3 V_{13} = E_1 V_{31};$$

1.5.3 İzotrop Düzlemi (Dönme Simetri Oku) Transversalizotrop Cisim

Cismin bütün noktalarından paralel elastik simetrik düzlemlerin içinden geçiyorsa, onların da üzerinde bütün yönlerde elastik özellikler eşdeğerdir. Böyle cisimler, bütün noktalarından elastik simetri oku geçen cisim gibi de davranır. Bu özelliğe sahip cisimlere transversal-izotrop cisimler denir.

Böyle cisme birde her bir noktasından en yüksek dereceli elastik simetrik oku sayılan dönme oku geçen cisim gibi de bakılabilir. Eğer z okunun izotrop düzlemine normal olarak yönelirsek ve x, y oklarına ise bu düzlem üzerine götürürsek, burada Eşitlik 25 genelmiş Hooke kanununun ifadesi şu şekilde olur:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= A_{11} \cdot \sigma_x + A_{12} \cdot \sigma_y + A_{13} \cdot \sigma_z \\
\varepsilon_y &= A_{12} \cdot \sigma_x + A_{22} \cdot \sigma_y + A_{23} \cdot \sigma_z \\
\varepsilon_z &= A_{13} \cdot \sigma_x + A_{32} \cdot \sigma_y + A_{33} \cdot \sigma_z \\
\gamma_{yz} &= A_{44} \cdot T_{yz}; \gamma_{xz} = A_{44} \cdot T_{xz}; \\
\gamma_{xy} &= 2 \cdot (A_{11} - A_{12}) \cdot T_{xy}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Görüldüğü gibi bu Eşitlik 33 ifadelerinde birbirine bağlı olmayan serbest sabitlerinin sayı değeri 5 olur. Eğer Eşitlik 33 ifadelerine teknik özellikler (E_i, G_{ij}, V_{ij}) dahil olursa aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) - \frac{\nu^l}{E^l} \cdot \sigma_z; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G^l} \tau_{yz}; \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) - \frac{\nu^l}{E^l} \cdot \sigma_z; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G^l} \tau_{xz}; \\
\varepsilon_z &= \frac{\nu^l}{E^l} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E^l} \cdot \sigma_z; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G^l} \tau_{xy};
\end{aligned} \tag{34}$$

E ve E^l uygun olarak izotrop düzlemi üzerinde ve ona normal yönde sıkıştırılma için yung modülüdür. ν ve ν^l Gösterilen yönlerde Poasson katsayısıdır. G ve G^l aynı yönlerde (izotrop düzlemi ve ona normal düzlemi üzerinde) kayma modülüdür.

1.6 İzotrop Cisimler

Elastiklik sabitleri cismin bütün noktaları için aynı olduğu zaman böyle cisimler bir cins cisimler denir. İzotrop cisimlerin bütün yönlerindeki özellikleri aynı olur. Genellikle doğada tam ideal İzotrop cisim yoktur (mesela ağaç, kristal cisimler izotrop değil). Ancak birçok malzemeler izotrop cisim kabul edilir (örneğin metaller). İzotrop cisim gibi kabul edebiliriz.

İzotrop cisimler için C_{ij} ve A_{ij} katsayıları kordinat eksenleri durumuna (orentasijasından) bağlı olmadığından bu katsayıların 2'ye ulaşır. Böylelikle izotrop cisimler için genelleşmiş Hooke kanunu Eşitlik 24 aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x & \tau_{xy} &= 2\mu\gamma_{xy} \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y & \tau_{yz} &= 2\mu\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z & \tau_{xz} &= 2\mu\gamma_{xz}
\end{aligned} \tag{35}$$

Bu ifadelerdeki λ ve μ Lyame (1795-1870) katsayıları denir. Her bir malmeze uygulama yolu ile bulunur. $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ hacim deformasyonudur (göreceli hacim genişlemesidir).

Eşitlik 26 formülünden yararlanılarak, izotrop cisimler için deformasyon bileşenleri (ε_{ij}) gerginlik bileşenleri (σ_{ij}) vasıtasıyla ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= 2 \cdot \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} &= 2 \cdot \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{yz} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{xz} &= 2 \cdot \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xz}
\end{aligned} \tag{36}$$

Burada $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ elastiklik modülü veya yung (1773-1829) modülü denir. $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

Puasson emsalidir. Kayıt etmek lazımdır ki, bütün metaliyeler için E ve ν katsayıları olumlu değerlerdir, yani $E > 0$; $\nu > 0$. E ve ν katsayılarının yukarıda gösterilen ifadelerden λ ve μ sabitleri için:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

Eğer Eşitlik 34 ifadeleri $E = E^I$; $\nu = \nu^I$ ve $G = G^I = \frac{E}{2(1+\nu)}$ kabul edersek alınan sonuç

izotrop cisimler için çıkarılmış Eşitlik 36 ifadesi ile üst üste düşer. μ Katsayısı kayma modülüdür ve birçok hallerde (konularda) G gibi de gösterilir. λ ve μ sabitlerinin ifadelerdede görüldüğü gibi Puasson katasısı ν hep 1/2 den küçük değildir (çünkü λ ifadesinde payda da $(1 - 2\nu)$ durur ki, o da sıfır olamaz ($1 - 2\nu \neq 0$)).

Doğada rastgele birçok izotrop metaliyeler için Puasson katsayısı 1/3'e yakın değerler alır. (35) ifadelerinde normal gerginlikler ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) toplanırsa:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2\mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu)\theta \quad (37)$$

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \frac{1}{3} = \sigma_0$$

$$K = (3\lambda + 2\mu)/3$$

Eşitlik 37 ifadesi böyle olur.

$$\sigma_0 = K\theta \quad (38)$$

Burada σ_0 normal gerginliklerin orta değeridir. K hacim genişlemesi (veya hacim sıkıştırması katsayısıdır). Bunu kayıt etmek lazım, yukarıda gösterilen elastik simetri hallerinden başka, bir sıra diğer simetri hallerinde vardır. İspat edilir ki, genel olarak onların sayısı 32 olur. Mesela bütün kristallerin 32 geometrik simetrisi vardır.

Ortotrop malzeme olan kvarts için V.Foyqt kendinin ünlü (kristallofizika) araştırmalarında A_{ij} katsayıları için aşağıdaki değerleri almıştır:

$$A_{11} = A_{22} = 12,73 \cdot 10^{-7}; \quad A_{33} = 9,71 \cdot 10^{-7};$$

$$A_{12} = -3,67 \cdot 10^{-7}; \quad A_{13} = A_{23} = -1,49 \cdot 10^{-7}; \quad (39)$$

$$A_{44} = A_{55} = 19,66 \cdot 10^{-7}; \quad A_{66} = 2(A_{11} - A_{12});$$

$$A_{56} = A_{14} = -A_{24} = -4,23 \cdot 10^{-7}$$

Kalan katsayıları sıfır olur. Transversal-izotrop malzeme olan dağ-maden kaynaklarından biri olan alevorit için uygulama şekli ile elastiklik sabitlerinin değeri alınır (kg/sm^2) (Globenko, 1975):

$$E = 6,21 \cdot 10^5; \quad G = 2,25 \cdot 10^5; \quad \nu = 0,22;$$

$$E^l = 5,68 \cdot 10^5; \quad G^l = 2,29 \cdot 10^5; \quad \nu^l = 0,24; \quad (40)$$

Çam ağacına transversal-izotrop malzeme gibi bakıldığında (liflerin boyu, liflerin enine sıkıştırıldığında) elastiklik sabitleri için aşağıdaki değerleri alır (Globenko, 1975):

$$E_1 = 1,0 \cdot 10^5; \quad E_2 = 0,042 \cdot 10^5; \quad G_{12} = 0,075 \cdot 10^5;$$

$$\nu_{12} = 0,01; \quad \lambda = \frac{E_2}{E_1} = 0,042; \quad B = \frac{E_2}{2G_{12}} - \nu_{21} = 0,27 \quad (41)$$

Kayıt edelim ki, E.K.Aşkenazi ve E.V.Qapovun kitabında 12 çeşitli ağaç türünün elastik katsayıları bulunup bir cetvel şeklinde verilmiştir (Tablo 1.3). Aşağıda bir yalnız tekniğinde çok rastgelen dört çeşit için bu elastiklik sabitlerini veririz. Gösterilen konularında stekloplastik (cam plastik) malzemelerin dört çeşidi için elastik sabitleri cetvel şeklinde verilmiştir (Tablo 4). Aşağıda biz stekloplastik malzemenin iki çeşidi için elastik sabitlerini verdik (Bowie, 1956).

Tablo 1.3: Ağaçların elastiklik sabitleri.

Elastiklik sabitleri	Marka adı			
	Toz ağacı	BS-1	BFS	FSF
E_1	$1,2 \cdot 10^5$	$1,10 \cdot 10^5$	$1,48 \cdot 10^5$	$1,09 \cdot 10^5$
E_2	$0,6 \cdot 10^5$	$0,85 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$0,87 \cdot 10^5$
G	$0,24 \cdot 10^5$	$0,30 \cdot 10^5$	$0,44 \cdot 10^5$	$0,28 \cdot 10^5$
V_1	$0,7 \cdot 10^5$	$0,09 \cdot 10^5$	$0,135 \cdot 10^5$	$0,079 \cdot 10^5$
V_2	0,71	0,076	0,88	0,174
	0,036	0,06	0,062	0,038

Tablo 1.4: Malzemenin elastiklik sabitleri.

Elastiklik sabitleri Kg/cm ²	Armırleşmiş Stekloplastik	Cam malzemeye dayanan stekloplastik
E_1	$3,68.10^5$	$1,79.10^5$
E_2	$2,68.10^5$	$1,31.10^5$
E_3	$1,10.10^5$	$0,43.10^5$
G_{12}	$0,5.10^5$	$0,28.10^5$
G_{23}	$0,41.10^5$	$0,24.10^5$
G_{31}	$0,45.10^5$	$0,24.10^5$
ν_{12}	0,105	0,15
ν_{23}	0,431	0,31
ν_{31}	0,405	0,08

Cismin denge haline bakarken, kabul edebiliriz ki, bütün deformasyonlar izotropik halde oluşur. Yani cismin her elemanın sıcaklığı sabit kalır. Bu halde deformasyonların potansiyel enerjisi ile bir olan potansiyelin varlığına aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_x}; & \sigma_y &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_y}; & \sigma_z &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_z}; \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{yz}}; & \tau_{xz} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{xz}}; & \tau_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{xy}};\end{aligned}\quad (42)$$

Burada V deformasyonun birim hacme düşen potansiyel enerjisidir. Bu formüllere Qrin formülleri denir. Bu altı ifadeleri integralleri alınrsa, V potansiyelinin ifadesini alırız:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} [C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{xz} + C_{16}\gamma_{xy}] \cdot \varepsilon_x + \dots + \frac{1}{2} [C_{16}\varepsilon_x + C_{26}\varepsilon_y + \\ &C_{36}\varepsilon_z + C_{46}\gamma_{yz} + C_{56}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{xy}] \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (43)$$

Burada kare parantezinin içerisindeki ifadelerin Eşitlik 24'e esasen uygun olarak $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ ve τ_{xy} olduğunu bilerek sade bir denklem aşağıdaki gibi olur:

$$V = \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}] \quad (44)$$

Elastiklik potansiyeli V için Eşitlik 42 denklemlerine benzer olarak σ_{ij} gerginlik bileşenleri yardımı ile ifade edilen formülü alıp, Eşitlik 25'i ele alırsak, onun yerine Eşitlik 44 ifadesini bulmuş oluruz. Eşitlik 42 ifadelerine benzer olarak elastik potansiyelinin deformasyon bileşenleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_z}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial \tau_{yz}}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial V}{\partial \tau_{xz}}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial \tau_{xy}}; \end{aligned} \quad (45)$$

Bu ifadelere Kostilyano formülleri de denir. Her iki Eşitlik 42 ve 45 ifadelerini sade olarak böyledir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_m}; & \sigma_m &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_m}; \\ \gamma_{mn} &= \frac{\partial V}{\partial \tau_{mn}}; & \tau_{mn} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_{mn}}; \end{aligned} \quad (46)$$

Bu ifadelerden $C_{ij} = C_{ji}$ ve $A_{ij} = A_{ji}$ sonuçlarına ulaşılır.

1.7 Elastiklik Teorisinin Esas Teknikleri

Yukarıda bahsedilenlere esasen izotrop elastik cisimlerin gerginlik ve deformasyon bileşenlerin ifadelerini Eşitlik 35 ve 36 arasındaki bağlantıları belli ettikten sonra, cismin denge ve hareket denklemlerinin tam sistemini yazabiliriz. Bu sistem denklemleri üç grupta incelenir. Birinci grup denklemleri elastik izotrop cisimlerinin denge ve hareket denklemleri dahildir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

Cisim dengede olduğunda bu denklemlerin sağ tarafları sıfıra eşit olur (denge halinde cisim kendi veya keyfi noktasında ivmesi sıfır olur). İkinci grup denklemleri Koşinin diferansiyel bağımlıkları ve Sen-Vena'nın deformasyonların kesilmez (beraberlik) şartları dahildir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} + \left[\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \tag{48}$$

Üçüncü grup denklemleri her iki seçenekte genelleşmiş Hooke kanunu dahildir (bu denklemlere fiziki denklemlerde denir).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pi\theta + 2\mu\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \pi\theta + 2\mu\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \pi\theta + 2\mu\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned}$$

Bu Eşitlik 47, 48 ve 49'da sistem denklemlerine normal \bar{n} olan yüzey üzerindeki \bar{T}_n gerginlik vektörünün toplananları (oklar üzerindeki yansımaları) için aşağıdaki sınır koşulunda ilave etmek gerekir.

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x \cdot \cos(\bar{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\bar{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\bar{n}, z); \\ T_{ny} &= \tau_{xy} \cdot \cos(\bar{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\bar{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\bar{n}, z); \\ T_{nz} &= \tau_{xz} \cdot \cos(\bar{n}, x) + \tau_{yz} \cdot \cos(\bar{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\bar{n}, z) \end{aligned} \quad (50)$$

Böylelikle, yukarıda gösterilen sistem denklemlerinin yardımı ile belli kuvvetler etkisi altında olan cisim gerginlik ve deformasyon hallerinin belli edilmesi için çözülmüştür. Bu sistem denklemlerde 15 bilinmeyen işlev var: altı gerginlik bileşenleri ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$), altı deformasyon bileşenleri ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) ve üç yer değiştirme toplananlarıdır (u, v, w).

Verilen ve aktarılanlara bağlı olarak Eşitlik 47, 48, ve 49 denklemleri sistemin çözümü de farklı şekilde yapılır. Görüldüğü gibi elastiklik teorisinin temel denklemlerine Eşitlik 35 ve 37 aynı zamanda hem gerginlik hem de yer değiştirme bileşenleri dahildir. Ancak öyle sistem denklemleri vardır ki, yalnız bu hallerden biri (ya gerginlik bileşenleri ya da yer değiştirme bileşenleri) dahil olsun.

Elastiklik teorisinin birçok pratik konuları gösterir ki, bu konularda kullanılan Eşitlik 47, 48 ve 49'da denklemler sistemi yalnız gerginlik bileşenlerinden olursa daha uygundur. Bunun için izotrop cisimlerin deformasyon bileşenlerini gerginlik bileşenleri vasıtasıyla ifadelerini Sen-Van'ın deformasyonların birlikteliği şartı da Eşitlik 48 göz önüne alınırsa aşağıdaki gibi olur (hacmi kuvvetlerin sabit veya sıfır olması şartı için):

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0; & \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \Delta \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0; & \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0; & \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Buradan $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ olur. Bu Eşitlik 51 ifadeler Beltram-Mitçell'in gerginliklerin

birliği denklemleri denir. Kayıt etme lazımdır ki, Eşitlik 51 sistem denklemleri yalnız izotrop bir cins cisimler için doğru olduğu halde, Sen-Venan'ın deformasyonlarının birliği denklemleri Eşitlik 36 istenilen cisim için doğrudur. Yani Eşitlik 36 sistemi Eşitlik 39 nispeten daha geneldir. Böylece eğer Eşitlik 37 deki birinci grup ifadeleri (yani gerginliklerin ifadeleri) Eşitlik 35'i göz önüne alsak katı cismin hareket ve denge yer değiştirmelerle ifade edilen diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + X &= \gamma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta u + Y &= \gamma \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta u + Z &= \gamma \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

Δ sembolü ise laplas operatörüdür.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{53}$$

Kayıt etmek lazımdır ki, henüz 1821'inci yılda Fransız alimi Navye (1785-1836) bu denklemleri analog sisteme almıştır. Eğer bu denklemlerde $\lambda = \mu$ kabul edersek burda Navye'nin aldığı ifadelerle çakışır.

Yukarıda bahsettiğimiz gibi elastiklik teorisinin problemlerinin çözümleri verilen ve aktarılan değerlere göre çeşitli olduğundan bu problemler üç sınır meselesine ayrılır.

1.7.1 Birinci Esas Sınır Meselesi

Cismin yüzeyinde verilen kuvvetlere (gerginliklere) göre, cismin bütün V hacminde gerginlik ve deformasyon bileşenlerinin bulunması. Bu halde esas amaç, verilmiş harici kuvvetlere (gerginliklere) göre öyle $u, \vartheta, \omega, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz},$ ve τ_{yz} fonksiyonları bulunmalıdır ki, Eşitlik 47, 48 ve 49 esas denklemleri ve Eşitlik 50 sınır şartlarını karşılasın.

1.7.2 İkinci Esas Sınır Meselesi

Cismin yüzeyinde verilen yer değiştirme bileşenlerine (u, ϑ, ω) göre, cismin bütün hacmi üzerinde gerginlik ve deformasyon bileşenleri bulunsun. Bu halde esas amaç, Eşitlik 47 ve 49'da denklemler öyle halini bulmak lazımdır ki, o cismin yüzeyinde verilen aşağıdaki sınır şartlarını bulsun.

$$u = f_1(x, y, z) \quad \vartheta = f_2(x, y, z) \quad \omega = f_3(x, y, z)$$

1.7.3 Esas Karışık Sınır Meselesi

Cismin yüzeyinin bir bölümünde kuvvetler (gerginlikler) diğer bölümünde ise yer değiştirme bileşenleri verilir, cismin gerginlik ve deformasyon bileşenleri aranır. Kayıt olunan her üç meselede kabul olunur ki, hacmi kuvvetler önceden bilinmektedir (ya sabittir, ya da sıfırdır). Bütün bu üç sınır meselelerinde kabul edilir ki, u, ϑ, ω kesin fonksiyonlardır ve onların kesintisiz türevleri vardır. Aynı zamanda kabul edilir ki, yer değiştirme ve gerginlik bileşenleri V hacminin yüzeyine kadar yer yerde kesilmelidir.

Gösterilen her üç meselelerin varlığı ve tekliği matematiksel ifadelerle ispat edilmesi birçok konularda olduğundan, onu burada göstermeye ihtiyaç duymadık. Yalnız onu kayıt etmek lazımdır ki, bu meselelerin çözümünün varlığı için esas sert cisim denge durumunda ona etki eden, bütün kuvvetlerin (ister yüzeysel, ister hacmi) baş vektörü $(\overline{R^t})$ ve baş momenti $(\overline{M_o})$ sıfıra eşittir. Alınmış teorik haller örneklerle gözlemlendiğinde E, G ve ν katsayıların sayısal değeri ve aynı zamanda normal ve dokunan gerginliklerin bırakılabilen değerlerini bilmek lazım olduğundan, gösterilen miktarlar aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 1.5).

Tablo 1.5: Malzemelerin dokunan gerginliklerinin değerleri.

Malzeme	Yunę modülü $E \text{ kQ/sm}^2$	Kayma modülü $G \text{ kQ/sm}^2$	Puasson katsayısı ν
Çelik	$(1,9 \div 2,2) \cdot 10^6$	$(7,95 \div 8,5) \cdot 10^6$	$0,25 \div 0,33$
Gri dökme demir (C412-28; C415-32 gibi)	$(0,8 \div 1,5) \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^6$	$0,23 \div 0,27$
Bakır	$(1,1 \div 1,3) \cdot 10^6$	$469 \cdot 10^6$	–
Bronz	$(0,75 \div 1,24) \cdot 10^6$	–	$0,32 \div 0,36$
Pirinç	$(1,05 \div 1,2) \cdot 10^6$	–	$0,32 \div 0,34$
Alüminyum	$(0,7 \div 0,72) \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^6$	$0,33$
Nikel	$2,1 \cdot 10^6$	$7,5 \cdot 10^6$	$0,33$
Beton	$(0,15 \div 0,23) \cdot 10^6$	–	$0,16 \div 0,18$
Ağaç (liflerin uzunluğuna)	$(9 \div 16) \cdot 10^4$	$(4,5 \div 6,5) \cdot 10^4$	–
Ağaç (liflerin enine)	$(0,4 \div 1,0) \cdot 10^4$	–	–
Faner (havacılık)-lif boyunca	$13 \cdot 10^4$	–	–
-lif enine	–	–	–
Tekstolit	$6,5 \cdot 10^4$	–	–
Organik cam	$(2,9 \div 4,1) \cdot 10^4$	–	$0,35 \div 0,36$
Stekloplast	$35 \cdot 10^4$	–	–
Kapron	$(1,4 \div 2,0) \cdot 10^4$	–	–

Teknik birimler sistemin ölçü birimleri ile uluslararası birimler sisteminin ölçü birimleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Tablo 1.6: Uluslararası birimler sisteminin ölçü birimleri (Bowie, 1956).

Ölçülen miktar	Teknik birimler sistemi	Uluslararası birimler sistemi
Kuvvet	kQ	9,81N
Kuvvetin ve gücün momenti	$kQ.m$	9,81N.m
İş	$kQ.m$	9,81N = 9,81joule
Gerginlik	$\begin{cases} kQ/sm^2 \\ kQ/mm^s \end{cases}$	$\begin{aligned} &9,81.10^4 \frac{N}{m^2} \\ &= 0,0981 \frac{N}{mm^2} \\ &9,81.10^6 \frac{N}{m^2} \\ &= 9,81 \frac{N}{mm^2} \end{aligned}$
Güç	$\begin{cases} kQ/san \\ \text{at kuvveti (a.k)} = 75kQ.m/san \end{cases}$	$\begin{aligned} &\frac{9,81Nm}{san} = 9,81Vt \\ &735,5Vt \end{aligned}$
Mega-gram	$Mg = 10^6 g$	
Kilo Newton	$kN = 10^3 n$	
Mikrometre	$MkM = 10^{-6} m$	

Üçüncü sağlamlık teorisine göre dokunan gerginliklerin maksimum değerleri $\tau_{max} \leq [\tau]$ gibi olur. Burada $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ bırakılan dokunan gerginliklerdir. Her bir malzeme için $[\sigma]$ tablo 1.7'den seçilir. Bırakılabilen gerginlikler $[\sigma] kQ/sm^2$.

Tablo 1.7: Malzemeler için gerginlik değerleri (Bowie, 1956).

Malzeme	Germe	Sıkıştırma
Dökme demir	280-800	1200-1500
Çelik	1400-1500	
Bakır	300-1200	
Pirinç	700-1400	
Bronz	600-1200	
Alüminyum	300-800	
Düralüminium	800-1500	
Tekstolit	300-400	
Ağaç –lif boyunca	70-100	
Lif enine	15-25	
Beton	1-7	10-90

BÖLÜM 2

ELASTİKLİK TEORİSİNİN DÜZLEM PROBLEMİ

Elastiklik teorisinin problemlerinin üç ölçütlü cisimler için halli zamanda meydana çıkan ciddi matematiksel zorluklar, bu veya diğer derecede geniş yayılmış özel pratik problemlerin etkili hallerinin bulunmasını sağlar. Bu tür problemlerinin çokluğuna örnek olarak elastiklik teorisinin düzlem problemlerini gösterebiliriz.

Düzlem problemlerin izahı, ilk defa Q.V.Kolosov tarafından verilmiş kompleks değişen fonksiyonlarla ifadeler esaslıdır. Düzlem problemlerinin hallerinin sonraki dönemlerde gelişimi işte bu problemlerin kompleks değişen fonksiyonlarla ifade edilir. Son dönemlerde ister geçmiş SSRİ mekanında, isterse de yakın ve uzak harici ülkelerde çok sayıda bu tür problemlerin hali buna sabittir (Kolosov, 1935).

Elastiklik teorisinin düzlem problemlerinde üç çeşit elastiklik durumuna bakılır.

- Düzlem deformasyonuna
- Düzlem gerginlik haline
- Genelleşmiş düzlem gerginlik hali

2.1 Düzlem Deformasyon

Eğer yer değiştirme bileşenlerinden u, v, w -biri örneğin w sıfır olup, diğer u ve v yer değişme bileşenleri yalnız x ve y değişenlerinden asılı olsa, onda cismin böyle hali düzlem deformasyon olarak adlandırılır. (ve ya başka deyişle cisim sabit edilmiş yüzeye paralel olan düzlemi üzerinde yerleşen noktalarının yer değiştirmeleri düzlemler arasındaki mesafeye bağlı olmaz). Bu halde gerginlik bileşenleri izotrop cisimler için yazılmış Eşitlik 49 ifadesine esasen böyle denklemler oluşur:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y; & \sigma_z &= \lambda\theta; & \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Burada Eşitlik 48'in denklemlerinden $\omega = 0$ olan hali yazalım.

$$\begin{aligned}\theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\end{aligned}\quad (55)$$

Görüldüğü gibi düzlem deformasyon halinde gerginlik z koordinatına bağlı olmaz (çünkü u ve ϑ bileşenleri z -ye bağlı değildir). Kayıt etmek lazımdır ki, σ_z gerginlik bileşenlerinin olması düzlem deformasyon durumuna destek olur. Değer taraftan, demek olur ki, düzlem deformasyon halinde değişen gerginlik bileşenlerinin sayısı üçtür: σ_x, σ_y ve τ_{xy} . Çünkü σ_z gerginlik bileşenleri σ_x, σ_y vaziyeti ile ifade edilir. Doğrudan da Eşitlik 54'de σ_x, σ_y ifadelerini toplayıp σ_z denklemlerine göz önüne alırsak:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 2\lambda\theta + 2\mu\theta; \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda\theta = \lambda \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2(\lambda + \mu)} = \nu(\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}\quad (56)$$

Burada $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ Poisson emsalidir. Elastik cisim dengesinin denklemleri Eşitlik 47'de düzlem deformasyon halinde aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\quad (57)$$

Burada $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ve $Z = 0$ olduğu ve ayrıca σ_z 'in z koordinatına bağlı olmadığı belli olur. Sen-Venanın deformasyonların beraberlik şartından Eşitlik 48 yalnız aşağıdaki gibi olur (diğer beş şart aynen çevrilir).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (58)$$

Beltrami-Mitaell denklemlerinden Eşitlik 51 bir cins izotrop cisimler için aşağıdaki şart alınır (hacmi kuvvetler göz önüne alınmadığı zaman):

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (59)$$

Bu denklem konularda Levi denklemi olarak tanınır. Burada $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ –Laplas operatörüdür.

Gösterilen düzlem deformasyon hali, yeterli kadar uzun prizmatik cisimlerde mevcut olur. Kendisi de bu cisimlerde yüzeysel ve hacmi kuvvetler en kesik düzlemlerinin üzerine yerleşip, simetri üzerine yönelen z koordinatına bağlı olmamalıdır. Bu halde Eşitlik 54 ve 57 denklemlerinin ödenmesi için (düzlem deformasyon halinin olması için) bu denklemlerden yapılan $u, \vartheta, \sigma_x, \sigma_y$ ve τ_{xy} bileşenleri silindirin yüzeyi üzerinde aşağıdaki sınır şartlarını karşılamalıdır.

$$\begin{aligned}\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n\end{aligned}\tag{60}$$

Burada X_n ve Y_n silindirin yüzeyine etki eden harici kuvvetlerin bileşenleridir, n -yüzeyin harici normalidir.

Gösterilen şartlar dahilinde Eşitlik 54 ve 57 denklemlerinin karşılayan $u, \vartheta, \sigma_x, \sigma_y$ ve τ_{xy} bileşenleri bulunduktan sonra Eşitlik 56 formülüne esasen σ_z gerginliği bulunur. Kendi de silindirin üst oturduğunda $(+\sigma_z)$ -normal gerginlik, alt oturduğunda ise $(-\sigma_z)$ normal gerginlik etki eder. Bu iki gerginliklerin etkisi neticesinde deformasyonların boyutları temin olur.

Eşitlik 57'nin denge diferansiyel denklemlerinde, Levinin, Eşitlik 59 ve 60 sınır şartlarında görülür ki, cisim düzlem deformasyon halinde onun istenilen enine kesiginde oluşan gerginlik hali elastik sabitlerine bağlı değildir. Eğer cisim bağlı olsa, onda gerginlik durumunun elastik sabitleri bağlı olamaması, bölgenin her bir yüzeyi üzerinde etki eden kuvvetlerin dengede olduğu şartına esasen temin olur.

Böylelikle, elastik cisimlerin düzlem deformasyon halinde esas denklemleri aşağıdakilerdir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \\
\sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x; \quad \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y; \quad \tau_{xy} = \mu \cdot \gamma_{xy}; \\
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\sigma_z &= \lambda \theta; \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{61}$$

2.2 Düzlem Gerginlik Durumu

Cisim fiksse edilmiş düzlemine paralel olan düzlemlerindeki gerginlik bileşenleri bütün hacim üzerinde sıfıra eşitse, cisim böyle durumunda düzlem gerginlik durumu denir. Eğer cisim kalınlığı $2h$ olduğu zaman orta düzleminde xoy koordinat düzlemi kabul edersek burada:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \tau_{yz} = \sigma_z &= 0; \\
Z &= 0
\end{aligned} \tag{62}$$

Bu halde Eşitlik 47 diferansiyel formülleri aşağıdaki halini alır:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0
\end{aligned} \tag{63}$$

Sen-Venanın deformasyonların birliği şartlarında yalnız biri kalır (düzlem deformasyon halindeki gibi):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{64}$$

Bu ifadeye $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$ yerine izotrop cisimler için yazılmış Eşitlik 49'un denklemlerini göz önüne alırsak, Eşitlik 64 şartı böyle olur:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{65}$$

Diğer taraftan $\sigma_z = 0$ olduğu için Eşitlik 35 denklemlerinden ikincisi böyle olur (veya Eşitlik 49 sisteminde σ_z için olan ifade):

$$0 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z$$

Veya;

$$\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z = 0$$

Buradan;

$$\varepsilon_z = \frac{\partial\omega}{\partial z}$$

Yapıp Hooke kanununda Eşitlik 49'da yerine yazsak:

$$\sigma_x = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial\vartheta}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \right) \quad (66)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0;$$

Görüldüğü gibi elastiklik teorisinin esas denklemlerinin sadeleşmesine bakmayarak, yine de mesele üç ölçülü mesele gibi kalır, çünkü z oku denklemleri yok edilmez. Ancak Faylon, bakılan meselelerde cismin kalınlığının (z oku üzerinde olan ölçü) çok küçük olduğu hal için bakılan meselenin iki ölçülü olması fikrini ileri sürmüştür. Bu fikrin esas amacı, kalınlığı çok küçük olan cisimlerde hesaplanmış gerginlik ve deformasyon bileşenlerinin orta değeri, yeterli derecede net olarak cismin düzlem gerginlik durumunu belli eder. Bu fikre Lyaviyye esasen genelleşmiş düzlem gerginlik hali denir.

2.3 Genelleşmiş Düzlem Gerginlik Durumu

Yüksekliği 2h olan keyfi en kesğine sahip silindir oturacak düzlemlerine paralel olan harici kuvvetler etki eder ve bu kuvvetler cismin orta düzlemine nazaran simetrik olarak paylaşırlar. Silindirin oturacakları harici kuvvetlerden bağımsızdır. Hacmi kuvvetlerden

de orta düzleme düşey olanının sıfır olduğunu ve diğer iki toplananların ise orta düzleme nazaran simetrik olduklarını farz ederiz. Bakılan cisimde oluşan gerginlik durumuna genelleşmiş düzlem gerginlik durumu denir. Şarta göre silindirin $z \neq h$ oturduğunda τ_{xz} , τ_{yz} ve σ_z sıfır olduğundan Eşitlik 47 diferansiyel denklemlerin biri olan:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (67)$$

Denklemden alırız ki:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (68)$$

Görüldüğü gibi bakıldığı halde σ_z gerginliğinin $z = \pm n$ olunca sadece kendisi sıfır olur, hem de onun z koordinatına göre türevi de sıfır olmalıdır. Buradan şöyle bir sonuca gelinir ki, cismin çok küçük kalınlığında σ_z gerginliğinin değeri de çok küçük olur ve biz yaklaşık olarak onu sıfır kabul edebiliriz. Yani $\sigma_z = 0$ olduğunu kabul ederiz. Burada Eşitlik 47 diferansiyel denklemlerinin yalnız ikisi kalır:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (69)$$

Orta düzlemi üzerinde keyfi noktaların ω yer değişmesinin z oku üzerinde yansımaları da sıfır olur (bakılan cismin orta düzlemine nazaran simetriye sahiptir). Ona göre de ω yer değişme bileşenlerinin cismin z koordinatı üzerinde de değişmesi çok küçük olduğundan bütün noktalarda $\omega(x, y, z) = 0$ olduğu kabul edilir. Diğer taraftan $u(x, y, z)$ ve $\vartheta(x, y, z)$ bileşenlerinin cismin yüksekliği üzerinde değişmesi çok küçük olduğundan u ve ϑ değerlerinin yerine onların orta kıymetleri u^* ve ϑ^* böyle olur:

$$u^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u dz ;$$

$$\vartheta^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \vartheta dz \quad (70)$$

(69) diferansiyel denklemlerinin her iki tarafı $(2h)^{-1} dz$ ile çarpılıp $z = \pm h$ koordinatı üzerine integral alalım. Burada:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz &= \frac{1}{2h} [\tau_{xz}]_{-h}^h = 0 ; \\ \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz &= \frac{1}{2h} [\tau_{yz}]_{-h}^h = 0\end{aligned}\quad (71)$$

Olduğundan gösterilen diferansiyel denklemler aşağıdaki şekille getirilir (* yıldız işareti miktarların orta değerlerini gösterir):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + X^* &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + Y^* &= 0\end{aligned}\quad (72)$$

Buradan;

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_x dz ; \\ \partial \tau_{xy}^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \tau_{xy} dz ; \\ \sigma_y^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_y dz ; \\ X^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X dz ; \\ Y^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h Y dz\end{aligned}\quad (73)$$

Yukarıda düzlem gerginlik hali için yazılmış Eşitlik 66'daki denklemini Hooke kanununda orta değere geçerse alırız (burada $\sigma_z = 0$ olduğunu sağlamak lazımdır).

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \lambda^* \theta^* + 2\mu \varepsilon_x^* ; \\ \sigma_y^* &= \lambda^* \theta^* + 2\mu \varepsilon_y^* ; \\ \tau_{xy}^* &= \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) ;\end{aligned}\quad (74)$$

Burada aşağıdaki ilaveler yapılır:

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-\nu)}; \\
\theta^* &= \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* ; \\
\varepsilon_x^* &= \frac{\partial u^*}{\partial x} ; \\
\varepsilon_y^* &= \frac{\partial \vartheta^*}{\partial y} ; \\
\varepsilon_{xy}^* &= \gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x}
\end{aligned} \tag{75}$$

Gerginlik bileşenlerinin ortak değeri olan σ_x^* , σ_y^* ve τ_{xy}^* ile yer değişme bileşenlerinin orta değerleri olan u^* ve ϑ^* arasındaki ilişki formülde olan Eşitlik 74'ün denklemleri düzlem deformasyon hali için yazılmış Eşitlik 61 ifadelerinden yalnız Lyame katsayısı denilen λ elastiklik sabiti ile farklılaşırlar. Böyle ki, düzlem deformasyon halinde Eşitlik 61 ifadelerinde λ sabiti yer aldığı halde, Eşitlik 74 ifadelerinde ise λ^* sabiti yer alır. Böylelikle böyle bir sonuca gelebiliriz ki, elastiklik teorisinin düzlem meselelerinin hem düzlem deformasyon hali hem de genelleşmiş düzlem gerginlik durumu matematiksel bakış açısıyla aynı bir meseledir. Ancak genelleşmiş düzlem gerginlik durumunun miktarları orta değerlerinin götürülmeli olmasını unutmamalıyız. Dinilebilir ki, izotrop cisimler için düzlem deformasyon ve genelleşmiş gerginlik durumlarında elastiklik teorisinin denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 ; \tag{76}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 ;$$

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x ;$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y ;$$

$$\tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \tag{77}$$

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ;$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} ;$$

Bu denklemleri yalnız yer değiştirme de yazabiliriz. Eğer Eşitlik 77 ifadelerini Eşitlik 76'da yerine koyarsak aşağıdaki ifadeleri alırız:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) &= \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + X = 0 ; \\(\lambda + \mu) &= \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta \vartheta + Y = 0 ;\end{aligned}\tag{77}$$

Burada $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplas operatörüdür. Bu sistemin herhangi bir çözümlü yapıldığından sonra, Eşitlik 77 ifadelerine esasen gerginlik bileşenleri sadece olarak bulunan u ve ϑ ifadelerini diferansiyel almakla belli olurlar. Aynı Eşitlik 76 ve 77 sistemlerinin yalnız gerginliklerle ifade edilir. Bunun için Eşitlik 76 sistemine bir ilave etmek de şarttır. Bu şartı Sen-Venanın deformasyonların kesilmezlik şartında yapmak olur. Düzlem deformasyon halinde yukarıda gösterdik ki, Sen-Venanın beraberlik şartlarından bir şart kalır:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

Bu şartta eğer:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_x + \sigma_y) \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_y - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_x + \sigma_y) \right];\end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}$$

İfadelerini yazarsak:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{79}$$

Bu talep olunan şarttır. Diyelim ki, Eşitlik 76 ve 79'un denklemler sisteminin elastiklik teorisini düzlem meselelerinin gerginliklerle ifade edilir.

2.4 Gerginlik Fonksiyonu

Elastiklik teorisinin düzlem meselelerinin her ikisinin belli, hacmi kuvvetleri göz önüne alındığında çok sadeleşme olur. Ona göre de bu kuvvetleri göz önüne almıyoruz. Bu halde gerginlik bileşenlerini bir fonksiyon ile ifade etmek mümkün olur. Bu fonksiyonu ilk defa Eri yaptığı için onun adını alır ve Erinin gerginlik fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu gerginlik fonksiyonu elastiklik teorisi meselelerinde büyük rol oynar.

Eğer, hacmi kuvvetleri (X ve Y toplananları) göz önüne almazsak Eşitlik 76 diferansiyel denklemleri aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (80)$$

Bu denklemlerin birincisine esasen demek olur ki, öyle bir $\varphi_1(x,y)$ fonksiyonu var ki, onun x ve y' ye göre türevleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial x} &= -\tau_{xy} \\ \frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial y} &= \sigma_x\end{aligned}\quad (81)$$

Bu ifadeleri Eşitlik 80 sistemindeki birinci denklemlerde yerine yazarsak, denklem tamamlanır. Eşitlik 81 denklemlerinin ikincisine esasen denilebilir ki, öyle bir $\varphi_2(x,y)$ Fonksiyonu var ki, onun x ve y ye göre hususi türevleri aşağıdaki ifadelere eşit olsun:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial x} &= \sigma_y; \\ \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y} &= -\tau_{xy}\end{aligned}\quad (82)$$

Bu ifadeleri Eşitlik 80 sistemine dahil olan ikinci denklemde yerine yazsak denklem tamamlanır. Eğer Eşitlik 81 ve 82 ifadelerinde τ_{xy} gerginlik bileşenlerinin ifadelerini birebir birleştirecek burada $\varphi_1(x,y)$ ve $\varphi_2(x,y)$ fonksiyonları için böyle bir şart ortaya

çıkar:

$$\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y} \quad (83)$$

Bu ifadeye esas böyle bir sonuca geliriz ki, öyle bir $F(x,y)$ Fonksiyonu var ki, onun x ve y ye göre hususi türevleri uygun olarak $\varphi_1(x,y)$ ve $\varphi_2(x,y)$ fonksiyonuna eşit olur:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial y} ; \\ \varphi_2(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x} ; \end{aligned} \quad (84)$$

Bu ifadeleri Eşitlik 81 ve 82'de göz önüne alsak gerginlik bileşenleri için aşağıdaki denklemleri yazarız:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (85)$$

Bu ifadeleri ilk defa 1862 yılda Eri bulduğu için fonksiyon erinin gerginlik fonksiyonu olarak bilinir. Yer değiştirme bileşenlerini (u ve v) Üçüncü dereceye kadar türevleri kesilmez olduğu için Eşitlik 78 ifadelerini esasen gerginlik bileşenleri σ_x , σ_y ve τ_{xy} bir kesin (bir kıymetli) fonksiyonlar olup, ikinci dereceye kadar kesilmez olmalıdırlar. Onda Eşitlik 77 ifadelerine esasen $F(x,y)$ gerginlik fonksiyonu için dördüncü dereceye kadar türevleri kesilmez olmalıdır ve kendi de ikinci dereceden türevinden başlayarak bütün bölgede bir kesin kıymete sahip olmalıdır.

Diğer taraftan Eşitlik 85 ifadeleri ile belli edilen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerginlik bileşenleri Eşitlik 77 diferansiyel denklemlerini karşılarsa da, öyle demek olmaz ki, yapılan gerginlik bileşenleri gerçek deformasyonlara uygundur. Bunu için yapılan gerginlik bileşenleri yukarıda gösterilen deformasyonların beraberlik şartı olan Eşitlik 59'un denklemi:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (86)$$

Karşılmalıdır. Eğer Eşitlik 85 ifadelerine esasen:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Delta F \quad (87)$$

Olduğunu göz önüne alırsak Eşitlik 86 aşağıdaki denkleme getirilir:

$$\Delta \Delta F = 0$$

Veya

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (88)$$

Bu denklem biharmonik denklem olarak adlandırılır ve onu harici çözümü biharmonik fonksiyon olur. Eşitlik 88 ifadelerinin mevcutluğu ilk defa Maksvell tarafından gösterilmiştir. Gerginlik fonksiyonları yapıldıktan sonra Eşitlik 85 ifadeleri vesilesi ile gerginlik bileşenleri yapılır. Görüldüğü gibi gerginlik fonksiyonu biharmonik fonksiyonu olup ikinci dereceden türevlerinden başlayarak o bütün seçim birliği (bir manalı) olmalıdır. Başka bir deyişle gerginlik fonksiyonu F bakılan cisim gerginlik vaziyetini tam net belli etmek için onun biharmonik fonksiyon olması yeterlidir. Gerginlik fonksiyonu $F(x,y)$ bilerek u ve ϑ yer değiştirme bileşenleri Eşitlik 77 ifadesine esasen aşağıdaki gibi belli olur (bu ifadeleri ilk defa Lyavi almıştır).

Öncelikle Eşitlik 85 ifadelerini Eşitlik 77'de göz önüne alırsak yazabiliriz ki:

$$\begin{aligned} \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} ; \\ \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} ; \end{aligned} \quad (89)$$

Buradan uygun olarak aşağıdaki ifadeler alınır:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta F ; \\ 2\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta F ; \end{aligned} \quad (90)$$

Bu sonuncu ifadeleri bir sıra matematiksel çevirmelerden sonra (integrallersek, Koşu-

Riman şartını karşılayan p ve q Fonksiyonları dahil etmekle) alırız:

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} p ; \\ 2\mu v &= -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} q ; \end{aligned} \quad (91)$$

p ve q Fonksiyonları:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} \Delta F ; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial x} ; \end{aligned} \quad (92)$$

Şartlarında yapılır.

2.5 Kolosov-Musxelişvilinin Kompleks Potansiyelleri

Malumdur ki her hangi $F(x, y)$ biharmonik fonksiyonu $z = x + iy$ kompleks değişenin iki fonksiyonun toplamı şeklinde gösterilir. Elastiklik teorisinin düzlem meselelerinin hallerini kompleks değişkenlerle ifade edilmesi bu meselelerin efektif hallerine büyük önem verilmiştir. İlk defa olarak biharmonik fonksiyonun iki kompleks değişken fonksiyonlarının toplamı şeklinde verilmesini Qurs göstermiştir. Ancak elastiklik teorisi meselelerinin aynı fonksiyonların yardımı ile çözüm metodu ilk defa Q.M.Kolosov ve N.İ.Musxelivi vermişlerdir.

Qursa göre her hangi biharmonik F fonksiyonu:

$$F = R_e[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (93)$$

Şeklinde belli olur. Burada R_e sembolü parantez ifadenin gerçek hissesinin götürüldüğünü gösterir. Eğer göz önüne alsak ki, $\bar{z} = x - iy$ gibidir, burada Eşitlik 93 ifadesini böyle yazabiliriz:

$$2F = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad (94)$$

Burada $\bar{z} = x + iy$ ve $z = x - iy$ olduklarından hususi türevleri için:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right);\end{aligned}\tag{95}$$

Olur. Burada Eşitlik 94 hususi türevleri bu şekli alır:

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial F}{\partial x} &= \varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + X^l(z) + \overline{X^l(z)} \\ 2 \frac{\partial F}{\partial y} &= i[-\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z\overline{\varphi'(z)} + X^l(z) - \overline{X^l(z)}]\end{aligned}\tag{96}$$

Şimdi eğer bu ifadelerin birincisine x 'e göre, ikincisini de y 'e göre diferansiyel alsak ve sonuçları toplasak şöyle olur:

$$\Delta F = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4R_e[\varphi'(z)]\tag{97}$$

Burada görülyor ki, ΔF harmonik fonksiyondur. Biharmonik F fonksiyonunu belli ettikten sonra yer değişme ve gerginlik bileşenlerini de kompleks değişenlerle ifade edebiliriz. Doğrudan da eğer Eşitlik 91 ifadelerinden ikincisini i ile çarpıp birincisi ile toplarsak:

$$2\mu(u + i\vartheta) = -\left[\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \varphi(z)\tag{98}$$

Burada $\varphi(z) = p + iq$ olduğu göz önüne alınır. Eğer bu Eşitlik 98 ifadesinde, Eşitlik 96 ifadesini göz önüne alırsak aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$2\mu(u + i\vartheta) = \varrho e. \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\tag{99}$$

Bu ifadelerden böyle bir sonuca varmak mümkündür:

$$\varrho e = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3 - 4\nu\tag{100}$$

sadeleşmesi yapılır. Genelleşmiş düzlem gerginlik durumu için λ yerine λ^* getirildiği için (Eşitlik 75 ifadesine) Eşitlik 100 ifadesi böyle olur:

$$\varrho e^* = \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + \mu} = \frac{3-4\nu}{1+\nu} \quad (101)$$

Açıktır ki, hep $\varrho e > 1$; $\varrho e^* > 1$. Şimdi de gerginlik bileşenlerinin $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ kompleks değişen fonksiyonlarla ifadelerini alırız. Bunun için Eşitlik 85 ifadelerini Eşitlik 60 yüzey şartına yazsak:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos(n, y) \\ Y_n &= \tau_{xy} \cdot \cos(n, x) + \sigma_y \cdot \cos(n, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos(n, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos(n, x) \end{aligned} \quad (102)$$

Bu ifadelerde;

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \cos(t, y) = \frac{dy}{ds} \\ \cos(n, y) &= -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad (103)$$

Olduğunu göz önüne alsak, alırız (burada t pozitif yöndedir):

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right); \\ Y_n &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (104)$$

Ve ya kompleks seklinde yazarsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$X_n + iY_n = \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial F}{\partial y} + i \frac{\partial F}{\partial x} \right] = -i \cdot \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right] \quad (105)$$

Bu denklemde (96) göz önüne alırsa:

$$[X_n + iY_n] \cdot ds = -id [\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\psi(z)}] \quad (106)$$

Eğer ds elemanı oy istikametine yönelirse:

$$\begin{aligned} ds &= dy; & dz &= idy; \\ d\bar{z} &= -idy \end{aligned} \quad (107)$$

$$X_N = \sigma_x ; \quad Y_n = \tau_{xy} ;$$

Burada Eşitlik 106 ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$\sigma_x + i. \tau_{xy} = \varphi^l(z) + \overline{\varphi^l(z)} - \overline{z\varphi^{ll}(z)} - \overline{\psi^l(z)} ; \quad (108)$$

Şimdi de ds elemanı ox istikametine yönelirsek:

$$\begin{aligned} ds &= dx ; & dz &= d\bar{z} ; \\ d\bar{z} &= dx & & \\ X_N &= -\tau_{xy} ; & Y_n &= -\sigma_y ; \end{aligned} \quad (109)$$

Olduğu için Eşitlik 106 bu şekli alır (önce i ile çarptık):

$$\sigma_x - i. \tau_{xy} = \varphi^l(z) + \overline{\varphi^l(z)} + \overline{z\varphi^{ll}(z)} + \overline{\psi^l(z)} ; \quad (110)$$

Bu Eşitlik 108 ve 109 formülleri gerginlik bileşenlerinin kompleks değişken fonksiyonlarla ifadeleridir. Bu denklemlerin daha sade şekilde de ifade edebiliriz. Böyle ki, Eşitlik 108 ve 110 ifadelerini taraf tarafa toplarsak ve çıkarırsak şöyle olur:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi^l(z) + \overline{\varphi^l(z)}] = 4R_e[\varphi^l(z)]; \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi^{ll}(z) + \psi^l(z)] \end{aligned} \quad (111)$$

Bu ifadelerde eğer;

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi^l(z) \\ \Psi(z) &= \psi^l(z) \end{aligned} \quad (112)$$

Eşitlik 111 aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 4R_e[\Phi(z)]; \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi^l(z) + \Psi(z)] \end{aligned} \quad (113)$$

Her iki Eşitlik 111 ve 113 ifadelerini de ilk defa Q.V.Kolosov tarafından bulunmuştur. Şimdi de cismin her hangi AB eğrisinin n normalinin pozitif yön tarafından etki eden kuvvetlerin baş vektörünün (\vec{R}) ve aynı kuvvetlerin koordinat başlangıcına nazaran baş momentinin (\overline{M}_o) kompleks değişken fonksiyonlarla ifadelerini belli edelim. Eğer baş vektörün (\vec{R}) oklar üzerinde toplananların uygun olarak X ve Y ile işaret etsek Eşitlik 105 ifadesine esasen yazabiliriz (kayıt etmek lazımdır ki, şimdi X ve Y hacmi kuvvetlerin ifade etmez, çünkü hacmi kuvvetlerin sıfır olduğunu kabul etmiştik):

$$X + iY = \int_{AB} (X_n + iY_n) ds = -i \left[\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right]_A^B = -i [\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B \quad (114)$$

Burada $\left[\quad \right]_A^B$ sembolü, parantez içindeki ifadenin AB doğrusu üzerinde A -dan B -ye doğru yer değiştirme zamanında aldığı artışı gösterir. Eğer A noktasının fikir edilmiş hesabını yapsak ve B noktasının ise değişken kabul etsek Eşitlik 114 ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f(x, y) = [\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\psi(z)}] = i \int_{AB} (X_n + iY_n) ds = i[X + iY] + const \quad (115)$$

Görüldüğü gibi baş vektör AB yayında asılı değil, ta ki, bu yay bakılan cismin S bölgesinden kenara çıkmış olmasın. Şimdi de baş momentinin (\overline{M}_o) ifadesini bulalım. AB yayının pozitif yönünde etki eden kuvvetlerin koordinat başlangıcına nazaran baş momenti bu şekilde belli olur:

$$M_o = \int_{AB} (y \cdot X_n + x \cdot Y_n) \quad (116)$$

Eğer bu ifadede Eşitlik 104'ün denklemlerini göz önüne alırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$M_o = - \int_{AB} \left[x d \frac{\partial F}{\partial x} + y d \frac{\partial F}{\partial y} \right] \quad (117)$$

Bu ifadenin integrali (bölge-bölge integral) aşağıdaki sonucu verir:

$$M_o = - \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + x \frac{\partial F}{\partial x} \right]_A^B + \int_{AB} \left[\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right] \quad (118)$$

Ve ya sağ taraftaki sonuncu toplananın tam diferansiyel olduğu göz önüne alırsak, Eşitlik 118 ifadesi şu şekli alır:

$$M_o = - \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + x \frac{\partial F}{\partial x} \right]_A^B + [F]_A^B \quad (119)$$

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = R_e \left[z \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] \quad (120)$$

Olduğunu ve Eşitlik 93'ün denklemine esasen:

$$F = R_e [\bar{z}\varphi(z) + X(z)]$$

Olduğunu göz önüne alırsak, sonuç itibariyle baş moment için böyle bir ifade alırız:

$$M_o = R_e [X(z) - z\varphi(z) - z.\bar{z}.\varphi'(z)]_A^B \quad (121)$$

Bu ifadeyi ilk defa N.İ.Musxelişvili bulmuştur. Şimdi de önceden verilen gerginlik ve ya yer değiştirme bileşenlerine göre $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonlarının ne derece de belli olacağı meselesine bakalım.

Elastik cismin denge hali durumunda σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerginlik bileşenleri ile $\Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ kompleks değişken fonksiyonlar arasında Eşitlik 111, 112 ve 113 bağlar vardır. Verilen σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerginlik bileşenleri ile başka bir $\varphi_1(z)$ ve $\psi_1(z)$ ($\Phi_1(z)$ ve $\Psi_1(z)$) fonksiyonları arasında da aşağıdaki bağılıklar vardır:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4R_e[\Phi_1(z)] \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}.\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)] \\ \varphi_1(z) &= \int \Phi_1(z) dz \\ \psi_1(z) &= \int \Psi_1(z) dz \end{aligned} \quad (122)$$

Sonuncu ifadelere dahil olan $\varphi_1(z), \psi_1(z), \Phi_1(z)$ ve $\Psi_1(z)$ fonksiyonlar ile Eşitlik 111

ve 113 ifadelerindeki $\varphi(z), \psi(z), \Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ fonksiyonları arasındaki farklılıklara bakalım. Eğer Eşitlik 113 sistemin birinci ifadesi ile Eşitlik 122 sistemin birincisi ile karşılaştırma yaparsak görürüz ki, $\Phi_1(z)$ ve $\varphi_1(z)$ fonksiyonlarının gerçek bölümleri aynıdır, yani onların yalnız hayali hisseleri farklarını belirler. Böylelikle yazılabilir ki:

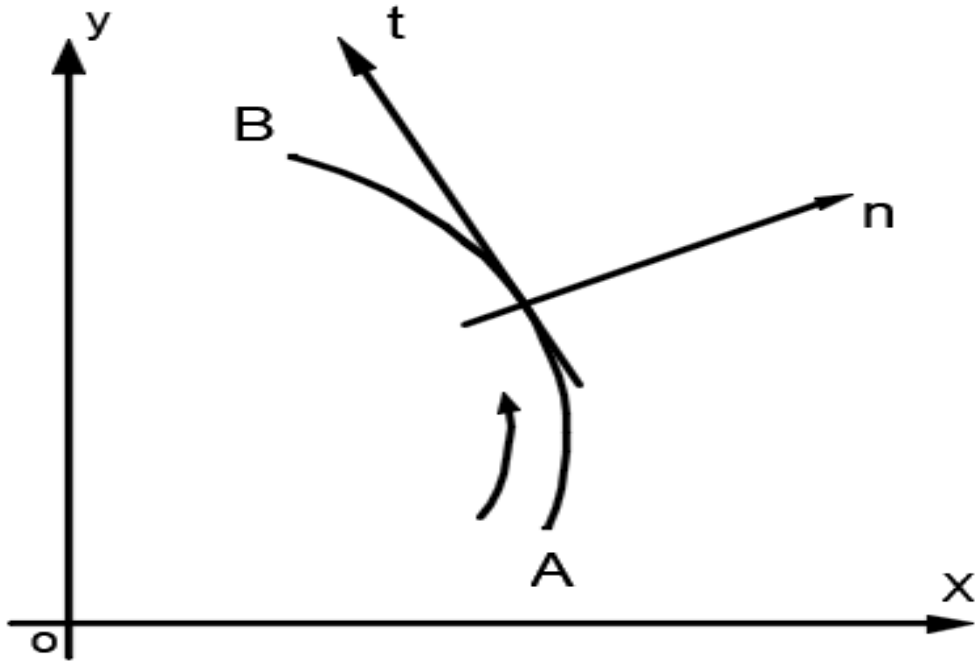
$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + i.C \quad (123)$$

Burada C herhangi gerçek sabittir. Onda Eşitlik 111 ve 121'in sistemlerindeki ifadelere esasen alırız:

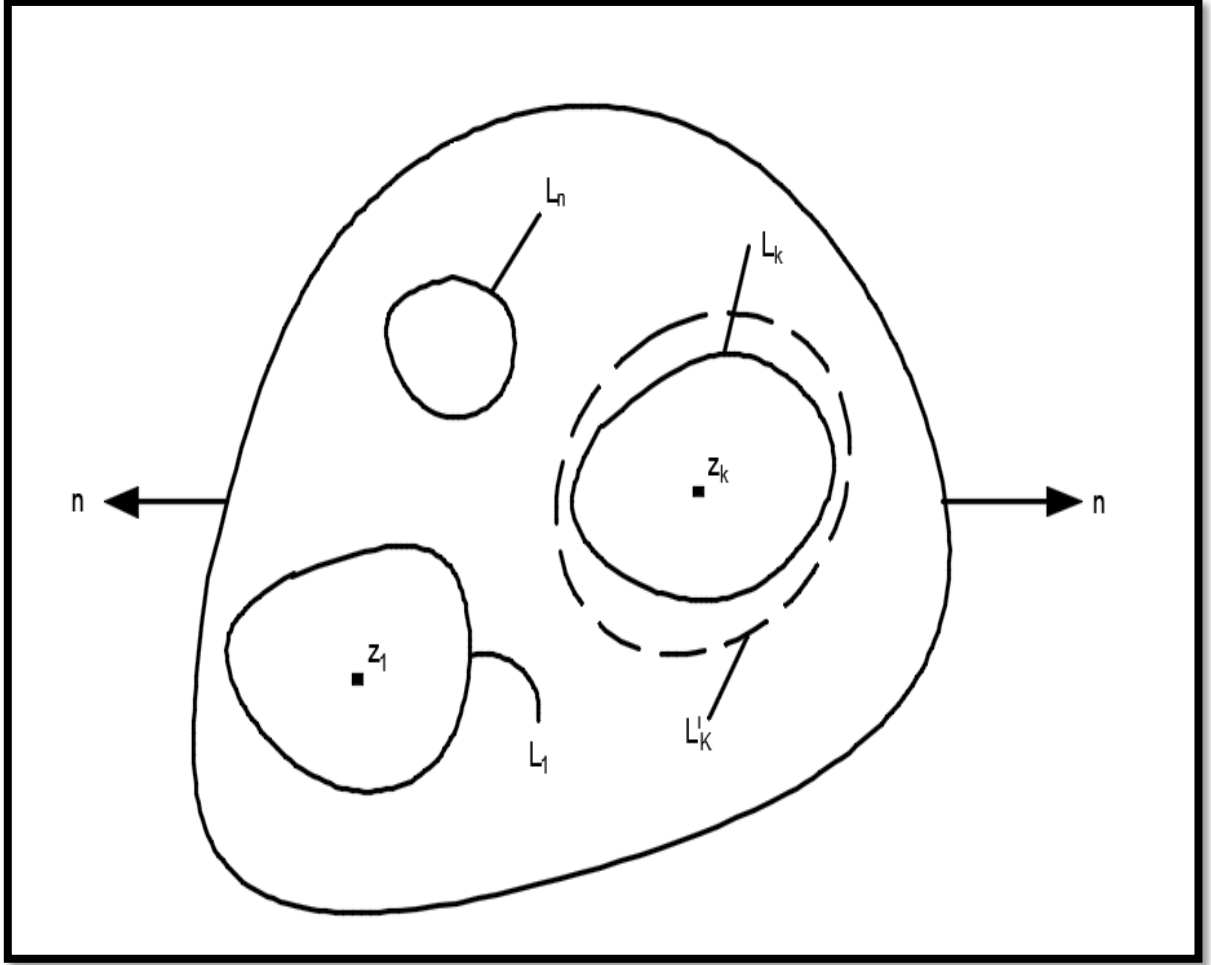
$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi(z) + i.C.z + \gamma_1 \\ \psi_1(z) &= \psi(z) + \gamma_2 \end{aligned} \quad (124)$$

Burada $\gamma_1 = a_1 + i.\beta_1$ ve $\gamma_2 = a_2 + i.\beta_2$ kompleks adetleridir. Aynı zamanda Eşitlik Eşitlik 111 sistemin ikinci ifadesi ile 112 sisteminin ikinci ifadesinin karşılaştırmadan alırız ki:

$$\psi_1(z) = \psi(z) \quad (125)$$



Şekil 2. 1: A ve B yayının x ve y koordinatlarındaki harici kuvvet etkileri.



Şekil 2. 2: L konturlarının rastgele n kuvvet alanlarındaki halleri.

Böylelikle verilen gerginlik durumuna göre $\Psi(z)$ fonksiyonu tamamen belli olur, $\Phi(z)$ fonksiyonu ise iC toplanan kadar netlikle belli olur, $\varphi(z)$ fonksiyonu $i.C.z + \gamma_1$ netliği ile nihayet $\psi(z)$ fonksiyonu ise γ_2 kompleks sabiti kadar netlikle belli olur. Bu anlatılanların tersine de demek olur, yani eğer biz $\varphi(z)$ fonksiyonu yerine:

$$\varphi(z) + iCz + \gamma_1 \quad (126)$$

Götürürsek, hem de $\varphi(z)$ fonksiyonu yerine:

$$\varphi(z) + \gamma_2 \quad (127)$$

Getirsek cismin gerginlik durumu değişmez. Bu halde $\Phi(z)$ fonksiyonu $\Phi(z) = \varphi'(z)$ olduğunda $\Phi(z) + iC$ olur, ancak $\Psi(z)$ fonksiyonu değişmez.

Şimdi de göstermek gerekir ki u ve ϑ yer değiştirme bileşenleri verildiği halde $\varphi(z), \psi(z), \Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ fonksiyonlarının seçilmesinde ne derece de serbestlik mevcuttur. Biliriz ki u ve ϑ yer değişme bileşenleri gerginlik bileşenlerini tamamen belli eder. Ona göre de yer değiştirme bileşenleri verilen $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonlarının Eşitlik 126 ve 127 yerlerinden farklı yere koyamayız. Yukarıda gösterilen Eşitlik 126 ve 127 yerleri Eşitlik 99 ifadesini (yani u ve ϑ yer değişme bileşenlerinin ifadesini) ne derecede karşıladığına bakılır. Eşitlik 126 ve 127 yerlerinde Eşitlik 99 yerine yazsak $2\mu(u + i\vartheta)$ İfadesi $2\mu(u_1 + i\vartheta_1)$ ifadesine geçer:

$$2\mu(u_1 + i\vartheta_1) = 2\mu(u + i\vartheta) + (1 + \varepsilon e).iCz + \varepsilon e.\gamma_1 - \gamma_2 \quad (128)$$

Bu ifadelerden görülür ki, eğer analitik fonksiyonlar için Eşitlik 126 ve 127 belirlemeler edilirse, yer değiştirme bileşenlerinin yer değişmemesi için mutlak:

$$C = 0; \quad \varepsilon e.\gamma_1 - \gamma_2 \quad (129)$$

Şartı sağlanmalıdır. Burada görülür ki u ve ϑ Yer değiştirme bileşenleri verildiği halde C , γ_1 ve γ_2 Sabitleri keyfi olarak görülmeyebilir, γ_1 ve γ_2 sabitlerinden yalnızca birinin keyfi olarak görebiliriz. Gerginlik bileşenleri verildiği halde C , γ_1 ve γ_2 sabitlerini öyle seçmeliyiz ki:

$$\begin{aligned} \varphi(z_0) &= 0; \\ \lim \varphi'(z_0) &= 0; \\ \psi(z_0) &= 0; \end{aligned} \quad (130)$$

Şartları sağlansın.

Burada z_0 bölgesi fikir edilmiş noktadır. Eğer yer değiştirme bileşenleri verilirse burada γ_1 ve γ_2 sabitlerini öyle seçmeliyiz ki:

$$\varphi(0) = 0 \text{ ve ya } \psi(0) = 0 \quad (131)$$

Şartı sağlansın. Bu şartlardan herhangi biri $\varphi(z)$ Ve $\psi(z)$ Analitik fonksiyonları ile

tamamen fikir edilir. Böylelikle eğer deformasyona uğrayan cisim ortak bölgeye sahip olursa $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları aynı bölgede belirgin fonksiyonlar olur. Bu halde bölgenin her hangi AB yayına etki eden kuvvetlerin baş vektörü ve baş momenti Eşitlik 114 ve 121 ifadelerine esasen sıfır olurlar. Bakılan cisim çok bölgeye sahip olduğunda $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları belirgin olmayabilirler. Önceden sonlu bölgeler de $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonlarının özelliklerini araştırdık. Bakılan cisim bölgesi çok geniş olduğundan bu bölgelerin konturları L_0, L_1, \dots, L_n ile işaret edelim, böyle ki, L_0 yerde kalan tüm konturları kapsar (Şekil 7). L_n konturlar dahilinde keyfi noktaların gösterimini z_k ile işaret edelim: $k = 1, 2, \dots, n$. Aydındır ki, gerginlik bileşenleri bakılan bölgede fiziki olarak aynı olmalıdırlar. Ona göre de Eşitlik 92 ifadesine esasen:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4R_e[\Phi(z)]$$

Eşitliğin sağ tarafında duran $\Phi(z)$ fonksiyonunun her gerçek bölgeleri de aynı olmalıdır. Ancak hayali bölge çok değerli olur. Böyle ki, bakılan bölgenin herhangi L_n konturunu kapsayan L_k^l konturunu saat akrebi hareketin tersine bir defa devir ederse, $\Phi(z)$ fonksiyonunun hayali bölgesi herhangi iB_k artımı alır (ve ya $B_k = 2\pi A_k$ gibi görürsek, artım $2\pi i A_k$ olur). Şimdi de böyle bir fonksiyonu gözden geçirelim:

$$\Phi^*(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k) \quad (132)$$

L_k konturunu bir defa devir ettikçe $\ln(z - z_k)$ ifadesi $2\pi i$ artımı olur, yani $A_k \ln(z - z_k)$ ifadesi sonuç itibarıyla $2\pi i A_k$ artımını alır. Kalan sınırlar kendi yerinde durur (yani önceki değerini alır). Netice itibari ile $\Phi^*(z)$ fonksiyonu istenilen konturun üzerinde devir ettikçe önceki değerinde kalır. Başka sözle $\Phi^*(z)$ fonksiyonu holomorf fonksiyonudur. Eşitlik 112 ifadesinden:

$$\Phi^*(z) = \Phi(z) + \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k) \quad (133)$$

Sonra (112) ifadesine esasen;

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z \Phi(z) dz + const$$

Olur. Burada (133) ifadesini göz önüne alırsak, aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_{z_0}^z \Phi(z) dz + const \\ &= \sum A_k [(z - z_k) \cdot \ln(z - z_k) - (z - z_k)] + \int_{z_0}^z \Phi_*(z) dz + const\end{aligned}\quad (134)$$

Burada z_0 bakılan çok amaçlı S bölgesinin her hangi fikir edilen noktasıdır. Ancak Eşitlik 134 ifadesindeki:

$$\int_{z_0}^z \Phi_*(z) dz;$$

İntegral kompleks değişken fonksiyonu olduğu için her hangi L_k konturunu bir defa devir ettikçe $2\pi i C_k$ artımı olur. Ona göre de yazabiliriz ki (Eşitlik 133 ifadesine analogi olarak):

$$\int_{z_0}^z \Phi_*(z) dz = \sum_{k=1}^n C_k \ln(z - z_k) + \text{net olmayan işlev}\quad (135)$$

Eğer Eşitlik 135 ifadesini Eşitlik 134 ifadesinde göz önüne alsak, benzer oranlar (mesela $A_k \ln(z - z_k)$ ve ya $C_k \ln(z - z_k)$ gibi oranlar) toplanırsa yazarız ki:

$$\varphi(z) = z \cdot \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^n \gamma_k \ln(z - z_0) + \varphi_*(z)\quad (136)$$

Burada γ_k kompleks sabitidir, $\varphi_*(z)$ bakılan S bölgesinde holomorf fonksiyonudur. Şimdi eğer Eşitlik 113 ifadesinde ki ikinci eşitliği göz önüne alsak orda $\Psi(z)$ fonksiyonu holomorf olduğunu biliriz. Burada $\Psi(z)$ fonksiyonu için:

$$\psi(z) = \int \Psi(z) dz;$$

İntegraline esasen (135)'e analogi olarak böyle bir ifade yazabiliriz:

$$\psi(z) = \int \Psi(z) dz = \sum \gamma_k^l \cdot \ln(z - z_k) + \psi_*(z)\quad (137)$$

Burada γ_k^l kompleks sabitidir, $\psi_*(z)$ bakılan S bölgesinde holomorf fonksiyonudur. Aynı

kural ile (Eşitlik 135, 134 ve 135 ifadeleri gibi):

$$x(z) = \int \Psi(z) dz;$$

Fonksiyonu için:

$$x(z) = z \cdot \sum \gamma_k^l \cdot \ln(z - z_k) + \sum \gamma_k^n \cdot \ln(z - z_k) + x_*(z) \quad (138)$$

Burada γ^n kompleks sabitidir, $x_*(z)$ holomorf fonksiyonudur. Analitik $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları için alınan Eşitlik 136 ve 137 ifadelerini Eşitlik 99'un denkleminde yerine yazsak:

$$2\mu[u + i\vartheta]_{L_k^l} = 2\pi i [(1 + \varepsilon e) \cdot z \cdot A_k + \varepsilon e \cdot \gamma_k + \gamma_k^l] \quad (139)$$

Burada $[u + i\vartheta]_{L_k^l}$ sembolü, parantez içindeki ifadenin L_k^l konturunu saat yönünün tersine bir defa devir edince aldığı artımı gösterir. Böylelikle yer değiştirmelerin aynı olmaları şartı sağlanması için aşağıdaki eşitlikler olmalıdır:

$$A_k = 0; \quad \varepsilon e \cdot \gamma_k + \gamma_k^l \quad (140)$$

γ_k ve γ_k^l kompleks sabitlerinin L_k konturlarının harici n normali tarafından etki eden kuvvetlerin baş vektörü (X_k, Y_k) vesilesiyle belli olur. Doğrudan da Eşitlik 114'ün denklemini kapalı L_k^l konturu için aşağıdaki şekilde yazılır:

$$X_k + iY_k = -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{L_k^l};$$

Eşitlik 136 ve 137 ifadelerini ele alsak, sonuçta böyle bir eşitlik ortaya çıkar:

$$X_k + Y_k = -2\pi(\gamma_k - \overline{\gamma_k}) \quad (141)$$

Görüldüğü gibi baş vektör (X_k, Y_k) bölgesinin L_k^l seçilmesine bağlı değildir. Böylelikle Eşitlik 140 ve 141 ifadelerine esasen γ_k ve γ_k^l sabitleri için böyle denklemler yazılır:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{X_k + iY_k}{2\pi(1 + \epsilon e)}; \\ \gamma_k^l &= \frac{\epsilon e(X_k + iY_k)}{2\pi(1 + \epsilon e)};\end{aligned}\quad (142)$$

Böylelikle $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları çok noktalı sonlu S bölgesi için aşağıdaki ifadelerle belli olur:

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) - \frac{1}{2\pi(1 + \epsilon e)} \cdot \sum_{k=1}^n [X_k + iY_k] \cdot \ln(z - z_k) \quad (143)$$

$$\psi(z) = \psi_*(z) + \frac{1}{2\pi(1 + \epsilon e)} \cdot \sum_{k=1}^n [X_k - iY_k] \cdot \ln(z - z_k) \quad (144)$$

Bu denklemler bakılan S bölgesinin her hangi sonlu bölgesi için de doğrudur. Şimdi de $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları sonsuz çok noktalı bölgede alacağı ifadeleri belli eden (mesela sonlu sayıda kavisli deliklere sahip sonsuz düzlem bölgesidir). Eğer önceki baktığımız S bölgesinin L_0 konturu sonsuz kadar ise sonsuz bölge göz önüne alınır.

Eğer merkezi koordinat başlangıcına yerleşen yeterli kadar büyük Radiuslu L_R çevresini çıkarsak onda bütün L_k konturları bu çevrenin dahilinde yerleşecektir. Böyle halde L_R çevresi haricinde yerleşen z noktası için:

$$|z| > |z_k|;$$

Olur. Burada $\ln(z - z_k)$ ifadesi bu hale gelir:

$$\begin{aligned}\ln(z - z_k) &= \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) = \ln z - \frac{z_k}{z} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_k}{z}\right)^2 + \dots \\ &= \ln z + \text{qolomorf fonksiyonu}\end{aligned}\quad (145)$$

Bu ifade de Eşitlik 143 ve 144 denklemlerini göz önüne alırsak:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi_{**}(z) - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \epsilon e)} \cdot \ln z \\ \psi(z) &= \psi_{**}(z) + \frac{X + iY}{2\pi(1 - \epsilon e)} \cdot \ln z\end{aligned}\quad (146)$$

Burada $X = \sum_{k=1}^n X_k$, $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$ bütün L_k konturlarına etki eden kuvvetlerin baş vektörüdür. $\varphi_{**}(z)$ ve $\psi_{**}(z)$ çok büyük çekilen L_R çevresinden kenardaki holomorf fonksiyonlardır. Kayıt etmek lazımdır ki, L_R çevresi kenarında holomorf olan $\varphi_{**}(z)$ ve $\psi_{**}(z)$ fonksiyonları Loran teoremine esasen böyle gösterilirler:

$$\begin{aligned}\varphi_{**}(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^n; \\ \psi_{**}(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k z^n;\end{aligned}\tag{147}$$

Bu Eşitlik 147 sıralarını önceden Eşitlik 146 ve alınan sonuç ifadesini ise Eşitlik 111'de yerine yazıp, gerginlik bileşenlerinin sonsuzlukta sınırlı olduklarını göz önüne alsak $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları için böyle ifadeler yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi_0(z) + \Gamma \cdot z - \frac{X+iY}{2\pi(1+x)} \cdot \ln z \\ \psi(z) &= \psi_0(z) + \Gamma^l \cdot z + x \cdot \frac{X-iY}{2\pi(1+x)} \cdot \ln z\end{aligned}\tag{148}$$

Burada Γ ve Γ^l kompleks sabitleri olup $|z|$ sonsuzluğa yaklaştığında Eşitlik 111 ifadesinin aldığı değere esasen yapılır. Böyle ki $|z| \rightarrow \infty$ olduğunda:

$$\begin{aligned}\lim[\sigma_x + \sigma_y] &= 4 \cdot R_e \Gamma; \\ \lim[\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}] &= 2\Gamma^l\end{aligned}\tag{149}$$

Eğer sonsuzlukta baş gerginliklerin değerleri $\sigma_x^\infty = N_1$ ve $\sigma_y^\infty = N_2$ olarak kabul edersek Γ ve Γ^l sabitleri için böyle ifadeler ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}R_e \Gamma &= \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) = \frac{1}{4}[N_1 + N_2] \\ \Gamma^l &= -\frac{1}{2}[N_1 + N_2] \cdot e^{-2ia}\end{aligned}\tag{150}$$

Burada a açısı N_1 gerginliği yönlerindeki baş okla ox okunun ortaya çıkardığı açıdır (N_1 ve N_2 yönleri arasındaki açı bilindiği gibi $\frac{\pi}{z}$ 'ye eşittir). Eşitlik 148 ifadelerine dahil olan $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ fonksiyonları L_R çevresinin kenarındaki holomorf fonksiyonlarıdır.

Malumdur ki, bu fonksiyonlar L_R çevresinin kenarında böyle bir sıra şeklinde görülür:

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \\ \psi_0(z) &= b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots\end{aligned}\quad (151)$$

Görüldüğü gibi Eşitlik 111 $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ holomorf fonksiyonlarında dahil olan a_0 ve b_0 katsayıları gerginlik durumuna hiç etki etmezler, buna göre de bu katsayıları sıfır kabul ederiz:

$$a_0 = 0; \quad b_0 = 0;$$

Buna göre de Γ katsayısının hayali bölgesinde hep sıfır olur:

$$Im\Gamma = 0;$$

$\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ fonksiyonlarının sonsuz çok iletişimli bölgeler için yazılan Eşitlik 149 ifadelerine esasen, yer değişime bileşenlerinin (u, ϑ) sonsuzlukta alacağı değerler şu şekilde olur (Eşitlik 99'un denklemine esasen):

$$\begin{aligned}2\mu(u + i\vartheta) &= -\vartheta e \cdot \frac{X+iY}{2\pi(1+\vartheta e)} \cdot \ln(z \cdot \bar{z}) \\ &+ (\vartheta e\Gamma - \Gamma^l) \cdot z - \Gamma^l z^l + \dots\end{aligned}\quad (152)$$

Burada $|z|$ noktaları sonsuzluğa yaklaştıkça kalan değerleri alabileceği sınır değerlerini gösterir. Eşitlik 152 ifadesinden görülür ki, yer değiştirme sonsuzlukta sınır değerlerini almazlar. Yer değiştirme bileşenlerinin sonsuzlukta sınır değerleri alması için aşağıdaki şartlar gereklidir:

$$X = Y = 0; \quad \Gamma = \Gamma^l = 0\quad (153)$$

Yani bölgenin bütün konturlarına etki eden kuvvetlerin baş vektörü ve gerginlikleri sonsuzlukta sıfır olmalıdır. Eğer sonsuzlukta gerginlikler sıfır olup (yani $\sigma_x^\infty = 0$, $\sigma_y^\infty = 0$), baş vektör ise sıfırdan farklı olursa (yani $X \neq 0$, $Y \neq 0$) burda yine de yer değiştirmeler

arta bilir, çünkü Eşitlik 152 ifadesine dahil olan $\ln(z \cdot \bar{z})$ çarpımı $\ln(z \cdot \bar{z}) = 2 \ln r$ gibi olur, yani r arttığında $\ln(z \cdot \bar{z})$ çarpımında artar. Bunu da kayıt etmek lazımdır ki, elastiklik teorisinin düzlem meselelerin genel hali yukarıda gösterilen $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ analitik fonksiyonlarda ifade edildiğinde yaptığımız gerginlik $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ ve yer değiştirme (u, ϑ) bileşenleri de analitik fonksiyonlardır. Buna göre de şöyle bir sonuç çıkarmak olur ki, eğer cisim her hangi sonsuz küçük hissesinde hiçbir gerginlik ve yer değiştirme olmasa (yani cisim doğal durumda olursa) burada o cisim bütün olarak hiç bir gerginliğe ve yer değiştirmeye maruz kalmaz. Hakikaten de eğer S bölgesinin bir hissesinde $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ olsa, burada bu gerginliklerin Eşitlik 111 ifadelerini dahil olan analitik $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ fonksiyonlar bölgenin bir hissesi sıfır, diğer hissesi ise sıfırdan farklı olamaz. Yani bütün S bölgesinde sıfırdan farklı olmalıdır.

Şimdi de $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ analitik fonksiyonların koordinat sistemlerinin değişmesinde kendilerinin ne yaptıklarına bakalım. Eğer xoy koordinat sistemi yeni bir $x_1o_1y_1$ koordinat sistemine geçer ise burada koordinat başlangıcı yeni sistemde:

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

Gibi olur.

Diğer taraftan yeni sistemin her hangi bir noktasının koordinatı x_1 ve y_1 olur.

Böylelikle yazabiliriz ki:

$$z = x + iy; \quad z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_1 = z + z_0$$

Koordinat başlangıcını değiştirmekle gerginlik durumunun değişmediğinden:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4R_e[\Phi(z)]$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2\pi_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

İfadesine esasen

(154)

$$\Phi(z) = \Phi_1(z_1) = \Phi_1(z - z_0)$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0 \cdot \bar{\Phi}_1'(z - z_0)$$

Olur. Böylelikle aşağıdaki fonksiyonlar için (yani $x_1o_1y_1$ sisteminde) bu ifadeleri alırız:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int \Phi(z) dz \\ \psi(z) &= \int \Psi(z) dz \\ \varphi(z) &= \varphi_1(z - z_0) \\ \psi(z) &= \psi_1(z - z_0) - \bar{z}_0 \cdot \bar{\varphi}_1'(z - z_0)\end{aligned}\tag{155}$$

Buradan bilinir ki, $\varphi(z)$ fonksiyonu yeni olan koordinat sistemine göre değişmezdir, ancak $\psi(z)$ fonksiyonu ise değişir, yeni koordinat başlangıcı yerine $z_1 = z + z_0$ getirmekle $\psi(z)$ fonksiyonu $\Psi_1(z_1)$ fonksiyonuna dönüşmez. Eğer x ve y okları koordinat başlangıcı ile değişmedikçe, O noktası tarafında her hangi a açısı kadar döndüğünde bakılan $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ fonksiyonların değişmeleri bakalım:

$$\begin{aligned}x &= x_1 \cos a + y_1 \sin a \\ x &= x_1 \sin a + y_1 \cos a \\ x + iy &= (x_1 + iy_1)e^{i\alpha} \\ z &= z_1 \cdot e^{i\alpha}; \quad z_1 = z \cdot e^{-i\alpha}\end{aligned}$$

Olur. Burada:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi_1(z \cdot e^{-i\alpha}); \\ \Psi(z) &= \Psi_1(z \cdot e^{-i\alpha}) \cdot 2^{-2i\alpha}\end{aligned}\tag{156}$$

Olurlar. Böylelikle $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları yeni $x_1 o_1 y_1$ sisteminde:

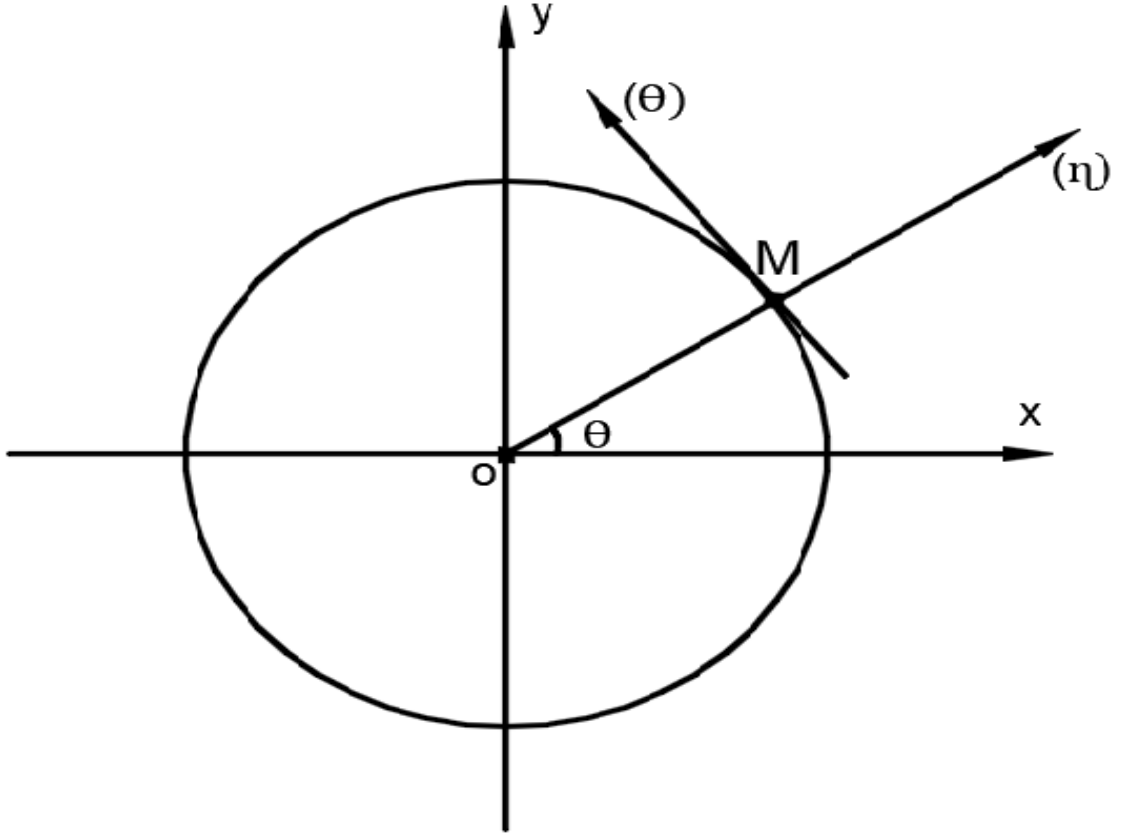
$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi_1(z \cdot e^{-i\alpha}) \cdot e^{i\alpha} \\ \psi(z) &= \psi_1(z \cdot e^{-i\alpha}) \cdot 2^{-2i\alpha}\end{aligned}\tag{157}$$

Şeklinde olurlar. Bu Eşitlik 157 ifadesinin sonuncusunu integrallersek:

$$x(z) = \int \psi(z) = x_1 \cdot (z \cdot e^{-i\alpha});$$

Sonucunu alırız. Bütün Eşitlik 154 ve 157 ifadelerini alınmasında gerginlik durumuna etki

etmeyen integral sabitlerini göz önüne alınmaz.



Şekil 2. 3: Polyar koordinat üzerindeki M noktası.

Birçok hallerde cisim gerginlik ve yer değiştirme bileşenlerini polyar koordinatlarla ifade etmek daha elverişli olur. Ona göre de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerginlik bileşenlerini ve önceden u ve ϑ yer değiştirme bileşenlerini polyar koordinat sisteminde ifadelerini yazarız. Eğer xoy sisteminin koordinat başlangıcını polyus kabul edersek burada ox polyar ox gibi kabul edebiliriz. Eğer r ve θ polyar koordinatlar olsa, düzlem üzerinde her hangi $M(x, y)$ böyle olur (Şekil 2.3):

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

Analitik geometrinin bilinen formüllerine esasen yer değiştirme bileşenlerinin polyar koordinatlarla ifadeleri aşağıdaki gibi olur (yer değiştirme bileşenlerini polyar koordinatlar üzerinde toplananları u_r ve u_θ ile işaret edelim):

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta$$

$$\vartheta = u_r \sin \theta - u_\theta \cos \theta$$

Burada;

$$u + i\vartheta = (u_r + iu_\theta)e^{i\theta}$$

Veya;

$$u_r + iu_\theta = (u + i\vartheta)e^{-i\theta}$$

Böylelikle Eşitlik 99 ifadesi polyar koordinat sisteminde aşağıdaki şekli alır:

$$2\mu(u_r + i\vartheta) = [\partial e. \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] e^{-i\theta} \quad (158)$$

Bu denkleme esasen u_r ve u_θ yer değiştirme bileşenlerini yaparken, z kompleks değişenin yerine $z = r.e^{i\theta}$ yazıp sağ tarafa da hakiki ve hayali bölümlerini ayırırız. Gerginlik bileşenlerini $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, polyar koordinat sisteminde dekart koordinat sisteminde olduğu gibi kalır. Buna göre de Eşitlik 111 ifadeleri polyar koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4R_e[\Phi(z)]$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta + 2\pi_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} \quad (159)$$

Bu ifadelerin yardımı ile aşağıdaki denklemi elde edebiliriz:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta} . [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (160)$$

Bu ifade $r = const$ olan çevre kavisi üzerinde merkezin ters tarafından etki eden gerginliğin ifadesidir. Şimdi de elastiklik teorisinin düzlem meselelerinin esas sınır meselelerini kayıt edelim. Üç ölçülü mühüt için denilen iç sınır meseleleri iki ölçülü mühüt için de geçerlidir. Böyle ki:

- Birinci sınır meselesi (mesele 1) = Bakılan S bölgenin L konturuna etki eden harici gerginliklere (kuvvetlere) esasen cismin elastik denge halinin yapılması.
- İkinci sınır meselesi (mesele 2) = Bakılan S bölgenin L konturunda ki noktaların yer değiştirmelerini bilerek cismin elastiklik durumunun yapılması.
- Esas karışık mesele = Cismin S bölgenin L konturunun bir bölümünde

gerginlikler (kuvvetler), diğer hissesinde ise yer değiştirmeler verildiği halde hemen cismin elastiklik denge durumunun belli olması.

Önceki araştırmalara esasen diyebiliriz ki, eğer S bölgesi sonsuz bölgelerde ise mesele 1 için gerginlik bileşenleri sonsuzlukta belli olmalıdır, bu da demektir ki, Eşitlik 150'de $R_{e\Gamma}$ ve Γ^l sabitleri verilmelidir. İkinci esas meselede eğer S bölgesi sonsuz bölgedir ise burada Eşitlik 152'a dayanarak sonsuzluğa:

$$\Gamma; \Gamma^l; X; Y$$

Belli olmalıdır, yani sonsuzlukta gerginliklerle beraber, baş vektörde de (X, Y) verilmelidir. Yukarıda denildiği gibi elastiklik teorisinin düzlem problemlerinde gerginlik ve yer değiştirme bileşenleri iki $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ analitik fonksiyonlarla ifade edilirler. Buna göre de gösterilen her üç sınır meseleleri bu iki fonksiyonun yapılması için gereklidir.

Eğer bakılan cismin S bölgesi sonlu bölge ise burada birinci esas sınır meselesinde $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur:

$$\varphi(t) + t \cdot \overline{\varphi^l(t)} + \overline{\psi(t)} = f_{ij} + i \cdot f_{2j} + C_j \quad (161)$$

L_j konturları üzerindedir. Burada Eşitlik 114 ve 115 ifadelerine esasen:

$$f_{ij} + i \cdot f_{2j} = i \int_0^S [X_n + i \cdot Y_n] ds;$$

Her bir kontur üzerinde verilen harici kuvvetlerin baş vektörleridir. $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları Eşitlik 143 ve 144 ifadeleri ile belli olurlar. Kayıt etmek lazımdır ki, Q.V.Koloso夫 nu Eşitlik 160 sınır şartları yerine aşağıdaki sınır şartlarından yararlanınız.

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{-2i\theta} [i\Phi^l(t) + \Psi(t)] = N - iT \quad (162)$$

L_j konturları üzerindedir. Bu ifadede L_j konturları üzerindedir:

$$2(N - iT) = \sigma_x - \sigma_y - (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \cdot e^{2i\alpha} \quad (163)$$

Eşitlik 159 denklemleri göz önüne alınır. N ve T uygun olarak her bir L_j konturuna etki eden harici kuvvetlerin konturun normali ve dokunanının üzerinde toplanırlar. Kayıt etmek lazımdır ki, bu her iki Eşitlik 161 ve 162'de sınır şartlarından sonuncusu daha uygun sayılır, çünkü $\Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ fonksiyonları hem bir özellikli hem de çok özellikli bölgelerde bir değerli olurlar. Sınır şartlarından ikinci mesele için bu şekilde olur:

$$\text{ə.e. } \varphi(t) + \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu(g_{1j} + ig_{2j}) \quad (164)$$

L_j konturları üzerinde

Burada $g_{1j} = g_{ij}(t)$ ve $g_{2j} = g_{2j}(t)$ bakılan L_j konturları üzerinde u ve ϑ yer değiştirme bileşenlerinin verilmiş değerleridir. Eğer bakılan S bölgesinin sonsuz bir bölge ise, burada Eşitlik 148'in ifadelerine esasen her üç sınır problemlerini $\varphi_0(z)$ ve $\psi_0(z)$ holomorf fonksiyonlarının bulunması gerekir.

Böyle ki, birinci sınır meselesi için sınır şartı aşağıdaki gibi olur:

$$\varphi_0(t) + \overline{t\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_{ij}^0 + if_{2j}^0 + C_i \quad (165)$$

Burada;

$$\begin{aligned} f_{ij}^0 + if_{2j}^0 &= f_{1j} + if_{2j} + \frac{X+iY}{2\pi(1+\text{əe})} \cdot (\ln t - \text{əe} \ln \bar{t}) \\ &+ \frac{X+iY}{2\pi(1+\text{əe})} \cdot \frac{t}{\bar{t}} - (\Gamma - \Gamma) \cdot t - \Gamma^l \cdot \bar{t} \end{aligned} \quad (166)$$

İkinci sınır meselesi için ise sınır şartları böyle olur:

$$\text{ə.e. } \varphi_0(t) - \overline{t\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 2\mu(g_{1j}^0 + ig_{2j}^0) \quad (167)$$

L_j konturları üzerindedir. Burada:

$$2\mu(g_{1j}^0 + ig_{2j}^0) = 2\mu(g_{1j} + ig_{2j}) + \frac{\partial e(X + iY)}{2\pi(1 + \partial e)} \cdot \ln(t \cdot \bar{t}) + \frac{X+iY}{2\pi(1+\partial e)} \cdot \frac{t}{\bar{t}} - (\partial e\Gamma + \bar{\Gamma}) \cdot t - \bar{\Gamma} \cdot \bar{t} \quad (168)$$

Gösterilen sonlu ve ya sonsuz bölgelerde L_j konturları üzerinde hareket öyle olmalıdır ki, bütün hallerde S bölgesi solda kalsın. Bu Eşitlik 165 ve 168 ifadelerinde logaritmik çarpımların konturu tam devir ettiğinde aldıkları artım yaklaşık olarak $\pm 2\pi i$ olur. Böyle ki $\ln t$ aldığı artım $(-2\pi i)$ olur. $\ln \bar{t}$ aldığı artım ise $(+2\pi i)$ olur. Kendi de hep $\ln(t \cdot \bar{t}) = 2 \ln|t|$ yazabiliriz.

Bunu da kayıt etmeliyiz ki, birinci sınır meselesinin bir özelliği de var ki, o da aktarılan $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ analitik fonksiyonların sonlu bölgeleri için Eşitlik 161 yapılması şartına λ ve μ elastik sabitleri dahil olmaz, yani sonlu bölgelerin gerginlik durumuna etki eden harici kuvvetlerden belli olur, ancak malzemenin λ ve μ elastik sabitleri bağımlı olmaz.

Çok noktalı rabiteli sonlu bölgeler için $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonlar malzemenin λ ve μ elastik sabitlerine bağlıdır (Eşitlik 143 ve 144'in ifadelerine dahil olan ∂e sabiti λ ve μ elastik sabitlerine bağlı olur). Ona göre de aynı bir $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları çeşitli malzemelerden olan cisimlerin gerginlik durumunu belli etmeleri için her bir L_k konturuna etki eden harici kuvvetlerin baş vektörleri $(X_k; Y_k)$ ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır (bu ise yukarıda gösterdiğimiz Eşitlik 143 ve 144'in ifadelerinden de bilinir). Bunu ilk defa Miçell göstermiştir. Bunu da kayıt etmek lazımdır ki, düzlem deformasyon durumunda dinilenler yalnız σ_x , σ_y , τ_{xy} gerginlik bileşenlerine ait edilmelidir, çünkü σ_z gerginlik bileşeni λ ve μ kat sayılarına bağlı olur (Eşitlik 56 veya 61 ifadeleri).

Yeterli kadar geniş sayıda bölgeler için elastiklik teorisinin düzlem meselelerin çözümünün esas metotları konform inikas fonksiyonlar metodu ve Koşi tipli integral metodudur. Kompleks değişenin $z = x + iy$ düzleminde sonlu ve ya sonsuz bir noktalı S bölgesinin $|\xi| < 1$ (veya $|\xi| > 1$) birim çevre etrafına bir noktalı karşılığı inikas ettirici fonksiyonu:

$$z = \omega(\xi) \quad (169)$$

Gibi olur. Malumdur ki, sonlu bölgelerde $\omega(0) = 0$ ve sonsuz bölgelerde ise $\omega(\infty) = 0$

olur. Burada z ve ξ kompleks değişenleri arasındaki Eşitlik 169'un bağlılığına göre S bölgesinin her bir noktasına ξ düzleminin bir noktası uygundur. Böyle olduğu halde denilir ki, z düzleminin S bölgesi, ξ düzleminin S' bölgesinin karşılığı konforma inikas olur. Konform inikas fonksiyonlardan yararlanmakla elastiklik teorisinin düzlem meselelerini hal etmek için Eşitlik 160 ve 164 sınır hallerini ξ değişeni ile ifade etmek gerekir.

Bu zaman $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ analitik fonksiyonlar için yeni ifadeler şunlardır:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi[\omega(\xi)] = \varphi_1(\xi) \\ \psi(z) &= \psi[\omega(\xi)] = \psi_1(\xi) \\ \text{Ve de} & \\ \Phi(z) &= \Phi[\omega(\xi)] = \Phi_1(\xi) = \frac{d\omega}{dz} = \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \\ \Psi(z) &= \Psi(\xi) = \frac{\psi'(\xi)}{\omega'(\xi)}\end{aligned}\tag{170}$$

Burada Eşitlik 160 ve 164 sınır şartları aşağıdaki şekli alırlar. Birinci sınır meselesi için:

$$\varphi_1(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \cdot \overline{\varphi_1'(\tau)} + \overline{\psi_1(t)} = f_{1j}(\tau) + f_{2j}(\tau)\tag{171}$$

İkinci sınır meselesi için ise:

$$\partial e \varphi_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \cdot \overline{\varphi_1'(\tau)} - \overline{\psi_1(t)} = 2\mu \left(g_{1j}(\tau) + i g_{2j}(\tau) \right)\tag{172}$$

Bu ifadelerde τ birim γ çevresinin noktalarından biridir. Gerçinlik bileşenleri için alınmış Eşitlik 159 ifadeleri şimdi yeni gördüğümüz ξ kompleks değişeni ile şu şekilde ifade edelim:

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= 4R_e[\Phi_1(\xi)] \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2\pi_{r\theta} &= \frac{2\xi^2}{r^2 \cdot \omega'(\xi)} \cdot [\overline{\omega(\xi)} \cdot \Phi_1'(\xi) + \omega'(\xi) + \Psi_1(\xi)]\end{aligned}\tag{173}$$

Bu ifadenin sonucundan alınması gereken ifade:

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} &= \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\xi)}{|\omega'(\xi)||d\xi|} = e^{i\theta} \frac{\omega'(\xi)}{|\omega'(\xi)|}; \\
dz &= e^{i\alpha} \cdot |dz|; \\
d\xi &= e^{i\theta} \cdot |d\xi|; \\
\xi &= r \cdot e^{i\theta}; \\
e^{i\theta} &= \frac{\xi}{r}; \\
e^{-i\theta} &= \frac{\bar{\xi}}{r}; \\
e^{-i\alpha} &= e^{-i\theta} \cdot \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{|\omega'(\xi)|} = \frac{\bar{\xi}}{r} \cdot \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{|\omega'(\xi)|} \\
e^{2i\alpha} &= \frac{\xi^2}{r^2} \cdot \frac{[\omega'(\xi)]^2}{|\omega'(\xi)|^2} = \frac{\xi^2}{r^2} \cdot \frac{[\omega'(\xi)]^2}{\omega'(\xi) \cdot \overline{\omega'(\xi)}} = \frac{\xi^2}{r^2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\overline{\omega'(\xi)}}
\end{aligned} \tag{174}$$

İfadeleri göz önüne alınır. Önceden kabul ettiğimiz $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları yerine $\varphi_1(\xi)$ ve $\psi_1(\xi)$ fonksiyonları bir noktalı bölgeler için ξ düzlemi üzerinde böyle bir sıra şekillinde getirebiliriz:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k \\
\psi_1(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^k
\end{aligned} \tag{175}$$

Burada a_k ve b_k katsayıları kompleks katsayılarıdır. Eğer bakılan bir noktalı S bölgesi herhangi R radüslü çevre ile kısıtlanmışsa, ona konform inikas fonksiyonu $z = \omega(\xi) = R \cdot \xi$ şeklinde verilmiştir, Eşitlik 175 ifadelerine esasen:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k \tag{176}$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{R}\right)^k$$

Şeklini alırlar. Böylelikle bilinir ki, eğer bakılan bir noktalı S bölgesi her hangi bir R radüslü çevre ile kısıtlanırsa, onda $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları Eşitlik 176 şeklinde görülür. Eğer bakılan bir noktalı S bölgesi çevreden farklı L konturu ile kısıtlanırsa, onda

$\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları Eşitlik 175'deki gibi görülmektedir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir noktalı S bölgesinde analitik fonksiyonsa, burada bu fonksiyonun bütün $z \in S$ noktalarındaki değeri, $f(z)$ fonksiyonunun sade kapalı L konturu üzerindeki sınır değeri sayesinde şöyle bir ifade ile belli olur:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (177)$$

Burada integral L konturunun olumlu yönünde yapılır. Eşitlik 177 integrali Koşi integrali olarak adlandırılır. Eğer z noktası L konturu üzerine götürülürse o zaman:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt = 0 \quad (178)$$

Olur. Bakılan S bölgesi çok noktalı sonlu bölge olduğundan da Koşi integrali Eşitlik 177 şeklinde olur, ancak bu zaman L konturu:

$$L = L_0^+ + L_0^- + \dots + L_n^-;$$

Şeklinde görülür. Burada L_0^+ bakılan S bölgesini haricinden kapsayan konturudur, (+) işaret kontur üzerinde hareketin saat akrebinin aksi yönde olduğunu gösterir (ya da söylemek lazımdır ki, konturlar üzerinde hareket zamanı S bölgesi hep solda kalır). Kalan $L_1 \dots \dots L_n$ konturlarının her biri sade kapalı konturlardır. Eğer bakılan S bölgesi bir noktalı sonsuz bölge ise, burada Koşi integrali L konturuna kenarda kalan bütün z noktalarında:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt = -f(z) + f(\infty) \quad (179)$$

Gibi olur. Burada L kapalı konturudur. L konturunun dahilindeki bütün z noktaları ise Koşi integrali:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt = f(\infty) \quad (180)$$

Değerini alır. Eğer $f(t)$ fonksiyonu sade kapalı L konturu üzerinde verilen kesilmez

fonksiyon ise, burada:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (181)$$

İntegrali Koşu tipli integral olarak adlandırılır. Eğer Eşitlik 181 integralindeki z noktası yerine L konturu üzerinde olan her hangi t_0 noktasını koysak burada aşağıdaki tekli integralin ifadesini alırız:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt &= \int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dt + f(t_0) \cdot \int_L \frac{dt}{t-t_0} = \\ &= \int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dt + i \cdot \pi \cdot f(t_0) \end{aligned} \quad (182)$$

Koşu tipli integralin Eşitlik 182 sınır değerleri aşağıdaki gibi olur. Eğer $z \rightarrow t_0$ konturuna dışarıdan yaklaşır, burada:

$$F^-(t_0) = \frac{1}{2} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt - \frac{1}{2} f(t_0) \quad (183)$$

Gibi olur. Eğer $z \rightarrow t_0$ konturuna içeriden yaklaşır, burada ise:

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt - \frac{1}{2} f(t_0) \quad (184)$$

Gibi ifade edilir. Bu Eşitlik 183 ve 184 ifadelerinde bulunan:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt;$$

Tekli integral, Koşu tipli integralin esas değeri olarak adlandırılır ve Eşitlik 182 ifadesi ile hesaplanır. Eşitlik 183 ve 184 ifadelerinin toplamı:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt = \frac{1}{2} [F^+(t_0) + F^-(t_0)] \quad (185)$$

Şeklini alır. Koşu tipli integralin L konturu üzerindeki t_0 noktasındaki değeridir. Eğer

bakılan L konturu sonsuz düz çizgi ise ($t = \pm\infty$), onda Koşu tipli integralin yukarı (S^+) ve aşağı (S^-) yarım düzlemlerinden L konturuna yaklaştığında aldığı değerler uygun olarak aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} F^+(t_0) &= \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} \\ F^-(t_0) &= -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} \end{aligned} \quad (186)$$

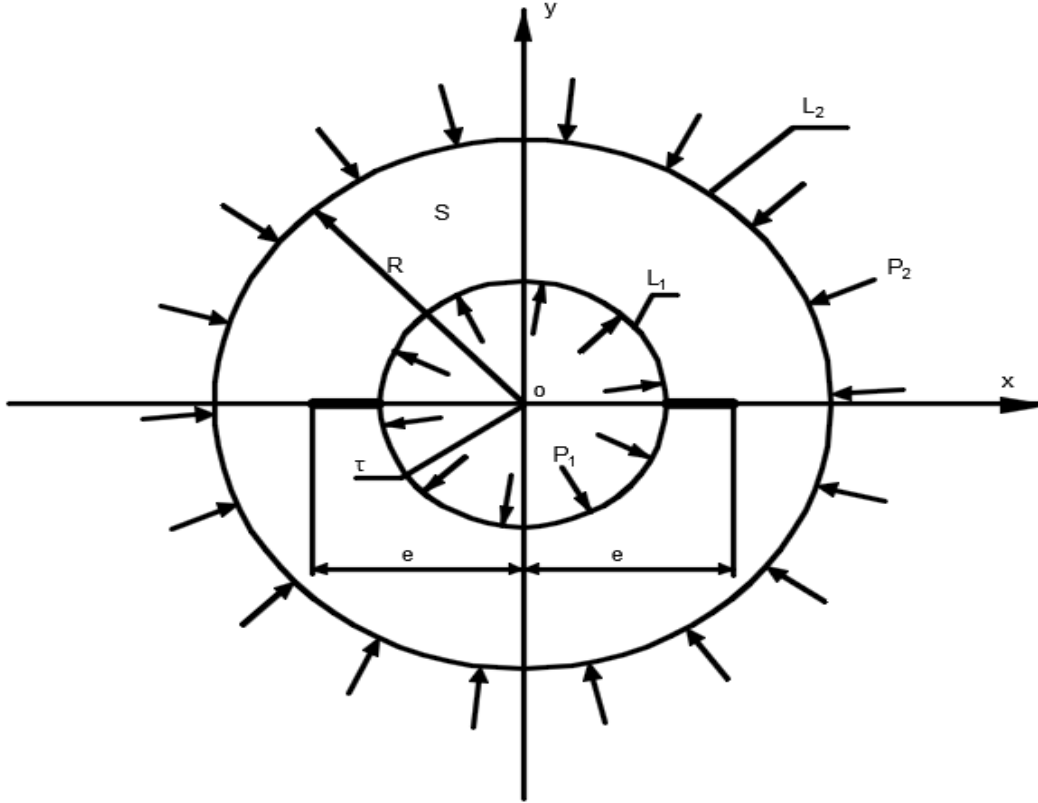
Burada $F^+(t_0)$ ve $F^-(t_0)$ uygun olarak $z \rightarrow t_0$ olduğunda $F(z)$ fonksiyonunu aldığı değerdir.

BÖLÜM 3

BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 Silindirik Levhanın Daire Deliği Ve Çatlağının Gerginlik Durumunun Analiz Sonuçları

Türkiye’de Yukarıdaki denklemlerimizi ele aldığımızda $m = 0; A = R$ kabulünü yaptığımızda harici L_2 konturu çevre şeklini alır. Silindirin gerginlik durumunu belli eden problem hesaplanır. Esas ölçüler aşağıda verilmiştir (Şekil 3.1).



Şekil 3. 1: Silindirik levhanın üzerine etki eden kuvvetler ve esas ölçüleri.

Rapor ettiğimiz zaman yukarıdaki denklemleri kullandığımızda gerginlikler aşağıdaki cetvel ile belli olur. Birinci daire için $r/R = 0.5$, $e = 0,6.R$, $l = 0,1.R$ ve ikinci daire için ise $r/R = 0.7$, $e = 0,8.R$, $l = 0,1.R$ değerlerini kullanarak oluşturuldu.

Tablo 3. 1: Silindirik levhaların etki kuvvetlerinin hesaplanan değerleri.

Daireler	Noktalar	σ_r/P		σ_θ/P	
		$P_1 = P;$ $P_2 = 0$	$P_2 = P;$ $P_1 = 0$	$P_1 = P;$ $P_2 = 0$	$P_2 = P;$ $P_1 = 0$
I $r/R = 0.5$ $e = 0,6.R$	1,21	-----	0,0012	1,68	-2,68
	1,3	1,0	-0,001	1,44	-2,44
	1,6	0,38	-0,62	0,96	-1,96
	2,0	0,0012	-1,003	0,47	-1,47
II $r/R = 0.7,$ $e = 0,8.R$	1,15	-----	-----	2,92	-3,92
	1,2	-1,00	-0,0023	2,15	-3,15
	1,3	-0,304	-0,71	1,66	-2,66
	1,43	-0,004	-1,00	1,05	-2,05

Etki eden P basıncının kritik değerleri için daire birde $P_{kr} = 1.46\sigma_b$ ve daire ikide ise $P_{kr} = 0.883\sigma_b$ kullanılarak cetvel oluşturulmuştur.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Dünya çapında birçok çalışmalarda yassı figürlerin biçimlerinin karmaşıklığından dolayı problemin çözümü karmaşık figürleri uygulanmıştır. Burada biz ilk kez Ş.A Kuliyeв, conformally-mapping functions of complex domains tarafından bulunmuş yani konform inikas fonksiyonları yardımı ile bu tür problem çözümü mühendislik için hassas şekilde çözülmüştür. Buna benzer problemlerin çözümü de birçok matematik işlemi yaptıktan sonra ortaya koyulmasını tarafımızdan incelenmiştir (Kuliyeв, 2017).

Burada dairesel, kare ve altıgen şekilli levhalarda Kolosov-Musxelişvili formülü ile levhalardaki uç noktalarda gerilme ve deformasyonların değerlerini hesaplamak başka yöntemlere göre daha kolay ve anlaşılırdır. Bu formülleri yardımı ile dairesel levhalardaki çatlaktaki gerilme probleminde de görüldüğü gibi karmaşık olarak verilen denklemlerin en basit hale getirerek çözüm yapılmıştır.

Gerginlik ve deformasyon bileşenlerini hesaplamak için karmaşık olan denklemleri en basit hale getirilerek bir çift $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ seçilerek çözüme varabilmek mümkün kılınmıştır. Karmaşık konfigürasyalı ve çatlaklı levhaların deformasyon gerilme durumu yüksek matematik kullanmakla sonuca varmayı sağlayacaktır.

KAYNAKÇA

- Adkins, J.E. (1955). Finite deformation of materials exhibiting curvilinear anisotropy. *Proc. Roy. Soc.*, 229 (1176): 119-134.
- Adkins, J.E. ve Green A.E. (1957). Plane problems in second order elasticity theory. *Proc. Roy. Soc.*, 239 (1219): 557-576.
- Bhargava, S. ve Levinson M. (1977). On physical nonlinear elasticity. *Journal of Elasticity*, 7 (3): 307-324.
- Bowie, O.L. (1956). Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating at the Boundary of an Internal Circular Hole. *Journal of Mathematics and Physics*, 35 (1-4): 60-71.
- Bueckner, H.F. (1958). The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *Transactions, ASME*, 80 (6): 1225-1230.
- Doyle, T.C. ve Ericksen, J.L. (1956). Nonlinear elasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 4: 53-115.
- Durelli, A.J. Parks, V.J. ve Chen, T.L. (1969). Stress concentration in a rectangular plate with circular perforations along its two bounded edges and subjected to restrained shrinkage. *Strain an International Journal for Experimental Mechanics*, 5 (1): 6-9.
- Durelli, A.J. ve Barriage J. (1955). Stress distribution in square plates with hydrostatically loaded central circular holes. *Journal of Applied Mechanics*, 22 (4): 41-47.
- Durelli, A.J. ve Riley, W.F. (1965). Introduction to Photomechanics, Ed.: Durelli, A.J. ve Riley; *Prentice-Hall international series in theoretical and applied mechanics*, Englewood Cliffs, Ann Arbor, s. 233-234.
- Evans, R.J. ve Pister, K.S. (1966). Constitutive equations for a class of nonlinear elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 2 (3): 427-445.
- Flynn, P.D. (1963). Stresses in Hollow hexagons under external pressure. *Experimental Mechanics*, 18 (2): 148-152.
- Globenko, I.G. (1975). On the stability of a balanced system with respect to its asymptotic state. *Siberian Mathematical Journal*, 16 (3): 495-497.
- Goldberg, J.E. ve Jabbour K.N. (1965). Stresses and Displacements in perforated Plates. *Nuclear Structural Engineering*, 2 (4): 360-381.
- Griffith, A.A. (1921). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Royal Society*, 221 (582-593): 163-198.

- Haddon, R.A.W. (1967). Stresses in an infinite plate with two unequal circular holes. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 20 (3): 277-291.
- Hartrant, R.J. (1968). Sih G. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks. *Studies in Applied Mathematics*, 47 (1-4): 276-291.
- Horvay, G. (1952). The Plane-Stress Problem of Perforated plates. *Applied Mechanics Section*, ASME, 74 (1): 355-360.
- Hütter, A. (1942). Die Spannungsspitzen im gelochten Blechscheiben und Streifen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 22 (6): 332-335.
- Isida, M. (1973). Method of Laurent series expansion for internal crack problems. *Mechanics of Fracture*, 1 (1): 56-130.
- Jindra, F. (1959). Wärmespannungen bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. *Archive of Applied Mechanics*, 28 (1): 109-116.
- Kirch, E.G. (1898). Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 42 (1): 797-807.
- Koiter, W.T. (1960). An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. *Ingenieur-Archiv*, 28 (1): 168-172.
- Kolosov, G. (1935). The theory of elasticity of the function of complex variables. Ed.: Kolosov G; L., M: ONTI., Moskova, s. 224
- Kraus, H., Rotondo P. ve Haddon W.D. (1966). Analysis of Radially Deformed Perforated Flanges. *Journal of Engineering for Industry*, 88 (2): 172-176.
- Kuliyev, S.A (1987). Stressed state of polygonal plate with central circular hollow and two linear cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 27 (6): 601-613.
- Kuliyev, S.A. (1993). The bending of an anisotropic plate with a central circular cavity and two rectilinear cuts. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 57 (2): 399-406.
- Kuliyev, S.A. (2017). Conformally Mapping Functions of Complex Domains. Ed.: Kuliyev S.A; Lambert Academic Publishing, Baku, s. 283.
- Leven, M.M. (1967). Photoelastic Analysis of a Plate Perforated with a Square Pattern of Penetra, *Westinghouse Research Memo*, 67 (1): 7.
- Mowbray, A.Q., Jr. (1953). Thee effect superposition of stress Raisers on members subjected to static or repeated to ads. *SESAL*, 10 (1): 15-23.
- Neugebauer, G.H. (1939). Stress Concentration Factors and Their Effect on Design, *ASME*, 14 (1): 82-85.

- Perlman, A.B. ve Sih, G.C. (1967). Circular-arc cracks in bi-material plates under bending. *International Journal of Fracture Mechanics*, 3 (3): 193-206.
- Rivlin, R.S. (1966). The Fundamental Equations of Nonlinear Continuum Mechanics. Ed.: Barenblatt G.I. ve Joseph D.D; *Springer Book Archive*, New York, s. 2721-2764.
- Signorini, A. (1959). Quisstioni di elasticita non linerarizzata ed semilinearizzata. *Rend. Mat*, 18 (1-2): 95-139.
- Sih, G.C. (1970). Bending of cracked plate with arbitrary stress distribution across the thickness. *Journal of Engineering for Industry*, 92 (2): 350-356.
- Stenberg, E. (1946). Nonlinear theory of elasticity with mall deformations. *Journal of Applied Mechanics*, 13 (1): 20-30.
- Tracy, P.G. (1979). Elastic analysis of radial cracks emanating from the outer and inner surfaces of a circular ring. *Engineering Fracture Mechanics*, 11 (2): 291-300.
- Truesdell, C. (1952). The mechanical foundations of elasticity and fluid Dynamics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1 (1): 125-300.
- Udoguti, T. (1949). Solutions of Some Plane Elasticity Problems. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 15 (11): 1-80.
- Williams, M.L. (1956). On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24 (1): 109-114.
- Zerna, W. (1950). The equilibrium of thin elastic shells. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics Sympos*, 3 (1): 9-22.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Mesut ÇAKMAK
Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa / 21.09.1994

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Bartın Üniversitesi Makina Mühendisliği
Yüksek Lisans Öğrenimi : Bartın Üniversitesi Makina Mühendisliği
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce (orta seviye)
Bilimsel Faaliyet/Yayımlar : GÖK M.S., Özcan M., Ünal R., Çakmak M., Ulaşır M., Aydoğdu E., Kiraz A.T., Boyuneri D., Güner E., Yılmaz H., Toraman E. Bartın Üniversitesi Mühendislik ve Teknoloji Bilimleri Dergisi Cilt 7 Sayı 1 (2019), 14-17. Tufal Takviyeli Polimer Matrisli Kompozitin Kuru-Kayma Aşınma Davranışları
Aldığı Ödüller :

İş Deneyimi

Stajlar : Çimtaş Boru İmalatları Ve Ticaret Ltd. Şti. (2015)
Borusan Mühendislik İnşaat Ve Sanayi Makineleri İmalat A.Ş. (2016)
Projeler ve Kurs Belgeleri :
Çalıştığı Kurumlar : Avcı Asansör

İletişim

E-Posta Adresi : mesutcakmakk16@gmail.com

Tarih : 16/07/2019 (Tez Savunma Tarihi)