T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİSEL FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İBRAHİM TUZCUOĞLU

DANIŞMAN

DOÇ. DR. ÖMER KİŞİ

BARTIN-2021

T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SEZGİSEL FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim TUZCUOĞLU

BARTIN-2021

KABUL VE ONAY

İbrahim TUZCUOĞLU tarafından hazırlanan “SEZGİSEL FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK” başlıklı bu çalışma, 28.06.2021 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	Doç. Dr. Ömer KİŞİ	……………
Üye	:	Doç. Dr. Erhan GÜLER	……………
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Nimet AKIN	……………

Bu tezin kabulü Lisansüstü Eğitimi Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ..…/..…/20… tarih ve 20…../…..-….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. H. Selma ÇELİKYAY
Enstitü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Ömer KİŞİ danışmanlığında hazırlamış olduğum "SEZGİSEL FUZZY *n*-NORMLU UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

28.06.2021

İbrahim TUZCUOĞLU

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilgilerini, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ömer Kişi’ ye (Bartın Üniversitesi), engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, değerli tez izleme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Erhan GÜLER’e (Bartın Üniversitesi), jüri üyesi Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nimet AKIN’a (Afyon Kocatepe Üniversitesi), bu bölümde okumam için beni yönlendiren, tüm fedakârlığıyla beni destekleyen aileme en içten dileklerimle teşekkür ederim.

İbrahim TUZCUOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SEZGİSEL FUZZY n-NORMLU LİNEER UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İbrahim TUZCUOĞLU

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2021, sayfa: 43

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde toplanabilme teorisinde yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde önemli kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde sezgisel fuzzy normlu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiştir. Ayrıca, yeni bir kavram Fibonacci lacunary istatistiksel tamlık verilmiş ve sezgisel fuzzy normlu her uzayın Fibonacci lacunary istatistiksel tam uzay olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde sezgisel fuzzy n-normlu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiştir. Bu uzaylarda Fibonacci istatistiksel yakınsaklık ve Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki kapsama ilişkileri incelenmiştir. Bununla birlikte sezgisel fuzzy n-normlu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisi tanımı verilmiş ve bu kavramın Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci dizisi; Fibonacci istatistiksel yakınsaklık; Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık; Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisi.

Bilim Alanı Kodu: 502.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FIBONACCI LACUNARY STATISTICAL CONVERGENCE IN INTUITIONISTIC FUZZY n-NORMED LINEAR SPACES

İbrahim TUZCUOĞLU

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2021, pp: 43

This master thesis includes of five chapters. In the first section, the studies on summability theory are mentioned. In the second section, some noteworthy notations are given. In the third section, the concept of Fibonacci lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces (IFNS) is examined. Also, a new concept, that is, Fibonacci lacunary statistical completeness is given and it is shown that every IFNS is Fibonacci lacunary statistically complete. In the fourth section, Fibonacci lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy *n*-normed linear spaces (IFnNS) is given. Some inclusion relations between Fibonacci statistically convergent and Fibonacci lacunary statistically convergent sequences in IFnNS are examined. Also, Fibonacci lacunary statistical Cauchy sequence in an IFnNS is defined and it is shown that Fibonacci lacunary statistical Cauchy sequence is equivalent to Fibonacci lacunary statistically convergent sequence in IFnNS.

Keywords: Fibonacci sequence; Fibonacci statistical convergence; Fibonacci lacunary statistical convergence; Fibonacci lacunary statistical Cauchy sequence.

Scientific Field Code: 502.03.01

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$(X, \|\|.\|\|)$	: Normlu uzay
$d(T)$	: T kümesinin doğal yoğunluğu
χ_T	: T kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\|T\|$	: T kümesinin eleman sayısı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
S_θ	: Lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$x_k \to \xi \left(S(\hat{F})_{IFN}\right)$	:(x_k) dizisi ξ'ye Fibonacci istatistiksel yakınsaktır
$x_k \xrightarrow{(\phi,\omega)} \xi \left(S_\theta(\hat{F})\right)$	: (x_k) dizisi ξ'ye Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaktır
$S(\hat{F})_{IFN}$	: Fibonacci istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F})$	: Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\mathcal{A} = (\mathcal{X}, \phi, \omega, *, o)$	:Sezgisel fuzzy n-normlu lineer uzay

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramına genel bir bakış açısı kazandıran istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast tarafından tanımlanmıştır (Fast, 1951). İstatistiksel yakınsaklığa farklı bir bakış açısı kazandıran çalışmalar toplanabilme teorisi üzerine yapılan uygulama çalışmalarıdır (Šalát, 1980; Fridy, 1985). Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı, Fridy ve Orhan'ın makalesinden sonra önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir (Fridy ve Orhan, 1993).

“2 normlu uzay” kavramı Gähler tarafından tanımlanmış ve geliştirilmiştir (Gähler, 1963). Kavramın tanımlanmasından sonra pek çok araştırmacı önemli sonuçlar elde etmişlerdir (White, 1969; Gähler, 1969; Gähler ve Gupta, 1975; Siddiqi, 1980; Gunawan ve Mashadi, 2001a; Gürdal ve Pehlivan, 2004). Gunawan ve Mashadi “2-normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve Cauchy” kavramını vererek alanla ilgili birçok çalışmanın öncüsü olmuştur (Gunawan ve Mashadi, 2001b). Gürdal ve Pehlivan, 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklığı tanımlayarak bir çeşit yeni bir analiz kavramını ortaya koymuşlardır (Gürdal ve Pehlivan, 2004).

Bulanık mantık; matematik, bilim, mühendislik, tıp gibi birçok alana katkılar sunmuştur. Bu kavram ilk olarak Zadeh tarafından literatüre kazandırılmıştır (Zadeh, 1965). Zadeh tarafından yayınlanan bu çalışma belirsizlik kavramının ölçülmesinde önemli bir başlangıç olarak kabul edilir. Zadeh, bu çalışmada kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu fuzzy küme teorisini ve bu kümenin cebirsel özelliklerini ortaya koydu. Fuzzy kümeler bizim günlük hayatımızda sık sık kullandığımız belirsizlikle ilgilenmenin daha doğru bir yoludur. Örneğin, bir kase içerisinde erikler olduğunu düşünülürse, bu durumda kasedekiler erik mi? sorusuna evet, kasedekiler kiraz mı? sorusuna hayır cevabı verilecektir. Tabaktaki erikler arasında bir kiraz olduğunu düşünelim. Aynı sorulara klasik küme teorisine göre nasıl cevap verileceği net değildir. Çünkü klasik küme teorisinde ya "evet" (hepsi erik) ya da "hayır" (hiç birisi erik değildir) cevaplar mümkündür. Fakat bu gibi durumlar fuzzy küme teorisi ile açıklanabilir; çünkü bu teoride nesneler kümeye kısmen ait olabilirler.

Fuzzy kavramı birçok araştırmacı tarafından sibernetik, yapay zeka, uzay sistem ve bulanık kontrol, örüntü tanıma, işlem araştırması, karar verme, görüntü analizi, olasılık teorisi, tarım ve hava tahmini gibi bir çok alanda kullanılmaktadır. Son zamanlarda, bulanık mantık, metrik ve topolojik uzaylar, fonksiyonlar teorisi gibi matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bulanık mantık ayrıca, dizi uzaylarında ve toplanabilme teorisinde çalışan bilim insanlarının yeni dizi uzayları tanımlamak ve bu uzayların karakteristik özelliklerini incelemek için ilgisini çekmektedir.

Lineer uzaylarda fuzzy norm kavramı ilk olarak Katsaras tarafından tanımlanmıştır (Katsaras, 1984). Son boyutlu fuzzy normlu uzaylarda yapılan en önemli çalışmalar Felbin'e ait çalışmalardır (Felbin, 1992; 1999). Sezgisel bulanık kümeler teorisi ilk olarak Atanassov tarafından incelenmiştir (Atanassov, 1986). Sezgisel fuzzy metrik kavramı ilk olarak Park tarafından, sezgisel fuzzy norm kavramı ise Saadati ve Park tarafından tanımlanmıştır (Park, 2004; Saadati ve Park, 2006). Son yıllarda, sezgisel fuzzy norm üzerine önemli çalışmalar yapılmış ve kavramın birçok özelliği araştırılmıştır (Karakuş vd., 2008; Mursaleen ve Mohiuddine, 2009a; Mursaleen ve Mohiuddine, 2009b; Debnath, 2012; Savaş ve Gürdal, 2014a; Savaş ve Gürdal, 2015).

Normlu uzay kavramı pek çok araştırmacı tarafından incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin; 2 normlu uzay ve *n*-normlu lineer uzay (Malceski, 1997; Gunawan ve Mashadi, 2001b; Gürdal ve Şahiner, 2008; Savaş ve Gürdal, 2014b; Savaş ve Gürdal, 2016; Turan, 2020), fuzzy normlu lineer uzay (Chang ve Mordesen, 1994; Felbin, 1999; Bag ve Samanta, 2003; Bag ve Samanta, 2005), fuzzy *n*-normlu lineer uzay (Narayanan ve Vijayabalaji, 2005), sezgisel fuzzy *n*-normlu lineer uzay (Narayanan vd., 2007, Sen ve Debnath, 2011a; Sen ve Debnath, 2011b; Thillaigovindan vd., 2011; Debnath, 2016; Konwar ve Debnath, 2017) gibi matematiğin temel alanlarında ve özellikle klasik Fonksiyonel Analiz ile olan ilişkisi nedeniyle bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir.

Fibonacci dizisi, ilk olarak 1202'de yazılan Fibonacci'nin Liber Abaci kitabında verilmiştir. Ancak, bu kavram daha eski bir tarihe dayanmaktadır. Fibonacci dizileri Hint matematiğinde Virahanka sayıları olarak tanımlanmıştı. Liber Abaci'de Fibonacci dizisi 1 ile başlar, günümüzde ise Fibonacci dizisi ya $f_0 = 0$ ya da $f_1 = 1$ ile başlar.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

şeklindeki sayı dizisine Fibonacci dizisi denir (Koshy, 2001). Burada $n = 1,2,3, \ldots$ için

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

sağlanır. Bununla birlikte Fibonacci dizileri $n \geq 2$ için

$$f_n = f_{n+1} - f_{n-2}$$

eşitliği ile birlikte tek türlü olarak gösterilir.

Fibonacci sayılarının oldukça hızlı arttığı bilinmektedir. Bu sayıların hangi hızla arttığının bulunması önemli bir problem haline dönüşmüştür. Ardışık Fibonacci sayılarının oranlarına bakıldığında:

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{5}{3} = 1.666666, \quad \frac{8}{5} = 1.6,$$
$$\frac{13}{8} = 1.625, \quad \frac{21}{13} = 1.615384615, \quad \frac{34}{21} = 1.619047619, \quad \frac{55}{34} = 1.617647059, \quad \frac{89}{55} = 1.618181818, \quad \frac{144}{89} = 1.617977528, \quad \frac{233}{144} = 1.618055556, \quad \frac{377}{233} = 1.618025751, \ldots$$

bulunmaktadır. İlk birkaç değeri göz ardı edersek ardışık Fibonacci sayılarının oranının 1.618'e çok yakın olduğunu ve Fibonacci sayılarının geometrik bir dizi oluşturduğu görülmektedir. Bu ise Fibonacci sayıları ile binlerce yıldır mükemmel güzelliğin gizli formülü olduğu düşünülen altın oran arasındaki ilişkiyi vermektedir.

$$lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha, \text{(altın oran)}$$

Fibonacci sayıları ile ilgili bilinen bazı temel özellikler:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1 \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$\sum_k \frac{1}{f_k} \quad \text{yakınsaktır}$$

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

$$(f_{n+1})^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n$$

şeklindedir.

Fibonacci dizileri ise ilk defa Kara ve Başarır (2012) tarafından dizi uzaylarında kullanılmaya başlanmıştır. Kara (f_n) dizisini kullanarak $\hat{F}$ Fibonacci fark matrisini tanımlamış ve bu matris yardımıyla yeni dizi uzayları tanımlamıştır. Son yıllarda Fibonacci dizileri ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır (Kara, 2012; Kara ve Başarır, 2012; Kara, 2013; Alotaibi vd., 2015; Candan, 2015; Demiriz vd., 2015; Kara vd., 2015; Kara ve Demiriz, 2015; Kara ve Ilkhan 2016a; Kara ve Ilkhan 2016b).

Kirişci ve Karaisa Fibonacci tipi istatistiksel yakınsaklığı tanımlamış ve temel özelliklerini incelemişlerdir (Kirişci ve Karaisa, 2017). Sonra, Kirişci sezgisel fuzzy normlu uzaylarda Fibonacci istatistiksel yakınsaklık kavramını vermiştir (Kirişci, 2019).

Bu tez çalışmasında, önce sezgisel fuzzy normlu uzaylarda sonra ise sezgisel fuzzy *n*-normlu uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır. Aynı zamanda bu uzaylarda Fibonacci istatistiksel yakınsak ve Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak kavramları arasındaki kapsama bağıntıları verilecek ve ispat edilecektir. Örneklerle konunun daha iyi pekiştirilmesi sağlanacaktır.

2. TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak önemli kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. χ_P, P kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere herhangi bir $P \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için

$$d_n(P) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_P(k)$$

verilsin.

$$\underline{d}(P) = \liminf_{n\to\infty} d_n(P), \qquad \overline{d}(P) = \limsup_{n\to\infty} d_n(P)$$

P kümesinin alt ve üst doğal yoğunluğu olmak üzere eğer

$$d(P) = \lim_{n\to\infty} d_n(P)$$

mevcut ise bu limite *P'*nin doğal yoğunluğu denir (Niven, 1951).

Tanım 2.2. $w = (w_p)$ bir dizi, $\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(\{p \le n: |w_p - \xi| \ge \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{p \le n: |w_p - \xi| \ge \varepsilon\}| = 0$$

sağlanıyorsa w dizisi $\xi \in \mathbb{R}$'ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim w = \xi$ ile gösterilir (Fast, 1951).

Tanım 2.3. $\theta = \{k_r\}$ dizisi $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ sağlayacak şekilde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir. $I_r = (k_r, k_{r-1}]$ ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{p \in I_r : \left|w_p - \xi\right| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

sağlanıyorsa, (w_p) dizisi ξ'ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim w_p = \xi$ ile gösterilir (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 2.5. $*:\ [0,1] \times\ [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi eğer,

(i) $*$ birleşmeli ve değişmeli,

(ii) $*$ sürekli,

(iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,

(iv) $\forall\ a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$

şartlarını sağlıyorsa $*$ işlemine sürekli *t*-norm denir (Schweizer ve Sklar, 1960).

Tanım 2.6. $\diamond : [0,1] \times\ [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi eğer,

(i) $\diamond$ değişmeli ve birleşmeli,

(ii) $\diamond$ sürekli,

(iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a \diamond 0 = a$,

(iv) $\forall\ a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a \diamond b \leq c \diamond d$

şartlarını sağlıyorsa $\diamond$ işlemine sürekli *t*-conorm denir (Schweizer ve Sklar, 1960).

$\mathcal{A}$ bir bulanık küme olmak üzere, x elemanının bu kümeye ait olma derecesi $\phi_{\mathcal{A}}(x)$, ait olmama derecesi $1 - \phi_{\mathcal{A}}(x)$ olarak ifade edilir. Küme ait olma derecesi ile kümeye ait olmama derecesi toplamı 1 olur. Fakat bazen bu yaklaşım gerçek hayattaki uygulamalarda belirsizliği ele almakta yetersiz kalmaktadır. Atanassov, bulanık küme teorisini sezgisel bulanık küme teorisine genelleştirerek ait olma derecesi ile ait olmama derecesinin toplamının 1'den küçük olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.7. $\mathcal{X} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ olsun. $\phi_{\mathcal{A}}(x): \mathcal{X} \to [0,1]$ ve $\omega_{\mathcal{A}}(x): \mathcal{X} \to [0,1]$ fonksiyonları tarafından ifade edilen $\mathcal{A} = \{(x, \phi_{\mathcal{A}}(x), \omega_{\mathcal{A}}(x)): x \in \mathcal{X}\}$ kümesine $\mathcal{X}'$de bir sezgisel bulanık küme denir (Atanassov, 1986).

Burada $\phi_{\mathcal{A}}(x)$ kümeye ait olma derecesi, $\omega_{\mathcal{A}}(x)$ ise kümeye ait olmama derecesi olarak gösterilir. $\forall x \in \mathcal{X}$için $0 \leq \phi_{\mathcal{A}}(x) + \omega_{\mathcal{A}}(x) \leq 1$ koşulu sağlanır. $\mathcal{X}'$de bir sezgisel bulanık küme kısaca $\mathcal{A} = (x, \phi_{\mathcal{A}}(x), \omega_{\mathcal{A}}(x))$ ile gösterilir.

Her bulanık küme $\mathcal{A} = \{(x, \phi_{\mathcal{A}}(x), 1 - \phi_{\mathcal{A}}(x)): x \in \mathcal{X}\}$ biçiminde sezgisel bulanık küme olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.8. $\mathcal{X}, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay,ϕ ve ω sırasıyla $(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in \mathcal{X}^n \times (0, \infty)'$a ait olma derecesi ve ait olmama derecesini göstermek üzere $\mathcal{X}^n \times (0, \infty)$ üzerinde bulanık kümeler olsun. $\mathcal{A} = \{(\mathcal{X}, \phi(x,t), \omega(x,t)): \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n\}$ formunda ifade edilen küme eğer

(i) $\phi(\boldsymbol{x}, t) + \omega(\boldsymbol{x}, t) \leq 1,$

(ii) $\phi(\boldsymbol{x}, t) \geq 0$

(iii) $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineer bağımlı olmasıdır,

(iv) $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $x_1, x_2, \dots, x_n'$nin herhangi bir permütasyonu altında değişmezdir.

(v) $\phi(x_1, x_2, \dots, cx_n, t) = \phi\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{t}{|c|}\right)$ eğer $c \neq 0$ ve $c \in \mathbb{F}$,

(vi) $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, s) * \phi(x_1, x_2, \dots, x_n', t) \leq \phi(x_1, x_2, \dots, x_n + x_n', s + t)$,

(vii) $\phi(\boldsymbol{x}, *): (0, \infty) \to [0,1]$ t'de süreklidir,

(viii) $\lim_{t \to \infty} \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 1$ ve $\lim_{t \to 0} \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$;

(ix) $\omega(\boldsymbol{x}, t) < 1$,

(x) $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineer bağımlı olmasıdır,

(xi) $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), x_1, x_2, \ldots, x_n$, nin herhangi bir permütasyonu altında sabittir,

(xii) $\omega(x_1, x_2, \ldots, cx_n, t) = \omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{t}{|c|}\right)$ eğer $c \neq 0$ ve $c \in \mathbb{F}$,

(xiii) $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, s) \diamond \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n{}', t) \geq \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n + x_n{}', s + t)$,

(xiv) $\omega(x, \diamond): (0, \infty) \to [0,1]$ t'de süreklidir,

(xv) $\lim_{t\to\infty} \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0$ ve $\lim_{t\to 0} \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 1$

koşullarını sağlarsa sezgisel fuzzy n-normlu lineer uzay (SFnNLU) olarak ifade edilir (Vijayabalaji, Thillaigovindan ve Jun, 2007).

Bu tez çalışmasında sezgisel fuzzy n-normlu lineer uzayı $\mathcal{A} = (\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.9. $\mathcal{A}$ bir SFnNLU olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $k \geq n_0$ olduğunda $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k} - \xi, t) > 1 - \varepsilon$ ve $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k} - \xi, t) < \varepsilon$ koşullarını sağlayan bir n_0 pozitif sayı varsa $\{x_{n_k}\}$ dizisi ξ'ye (ϕ, ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre yakınsaktır denir ve $(\phi, \omega) - \lim x_{n_k} = \xi$ ile gösterilir (Narayanan, Vijayabalaji ve Thillaigovindan, 2007).

Burada ξ, (ϕ, ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre $\{x_{n_k}\}$ dizisinin limit noktasıdır.

Tanım 2.10. $\mathcal{A}$ bir SFnNLU olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $p, q \geq m_0$ olduğunda $\phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_p} - x_{n_q}, t\right) > 1 - \varepsilon$ ve $\omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_p} - x_{n_q}, t\right) < \varepsilon$ koşullarını sağlayan bir m_0 pozitif sayı varsa $\{x_{n_k}\}$ dizisine (ϕ, ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Cauchy dizisi denir (Narayanan, Vijayabalaji ve Thillaigovindan, 2007).

Tanım 2.11. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre, $\forall \varepsilon > 0$, $t > 0$ için

$$K_\varepsilon(\hat{F}) := \{k \leq n : \phi(\hat{F}x_k - \xi, t) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega(\hat{F}x_k - \xi, t) \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani $d\left(K_\varepsilon(\hat{F})\right) = 0$ ise ya da buna denk olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : \phi(\hat{F}x_k - \xi, t) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega(\hat{F}x_k - \xi, t) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

sağlayan $\xi \in \mathcal{X}$ elemanı varsa (x_k) dizisi ξ elemanına Fibonacci istatistiksel yakınsaktır denir ve $\mathrm{d}(\hat{F})_{IFN} - lim\, x_k = \xi$ veya $x_k \to \xi \left(S(\hat{F})_{IFN}\right)$ ile gösterilir (Kirişçi, 2019).

3. SEZGİSEL FUZZY NORMLU UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı sezgisel fuzzy normlu uzaylarda çalışılacaktır. Ayrıca bu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel tamlık hakkında bilgi verilecek, sezgisel fuzzy normlu uzayların Fibonacci lacunary istatistiksel tam uzay olduğu ispatlanacaktır.

Tanım 3.1. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU ve θ lacunary dizi olsun. (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre (SFN), $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N} \colon \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

veya denk olarak

$$\delta_\theta(\{k \in N \colon \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) < \varepsilon\}) = 1$$

koşulları sağlanıyorsa (x_k) dizisi $\xi \in \mathcal{X}$ noktasına Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta^{(\phi,\omega)}\left(\hat{F}\right) - \lim x = \xi$ ya da $x_k \xrightarrow{(\phi,\omega)} \xi \left(S_\theta\left(\hat{F}\right)\right)$ ile gösterilir. (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre tüm Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta^{(\phi,\omega)}\left(\hat{F}\right)$ şeklinde ifade edilir.

Lemma 3.1. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall p > 0$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $S_\theta^{(\phi,\omega)}\left(\hat{F}\right) - \lim x = \xi$;

(b) $\delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \leq 1 - \varepsilon\right\}\right) = \delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$

(c) $\delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) < \varepsilon\right\}\right) = 1$;

(d) $\delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) > 1 - \varepsilon\right\}\right) = \delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) < \varepsilon\right\}\right) = 1$;

(e) $S_\theta\left(\hat{F}\right) - \lim \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) = 1$ ve $S_\theta\left(\hat{F}\right) - \lim \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) = 0$.

Teorem 3.1. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. $\mathcal{X}'$deki bir $x = (x_k)$ dizisi (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\theta^{(\phi,\omega)}\left(\hat{F}\right) - limx$ tekdir.

İspat. Kabul edelim ki $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ için $S_\theta^{(\phi,\omega)}\left(\hat{F}\right) - \lim x_k = \xi_1$ ve $S_\theta^{(\phi,\omega)}\left(\hat{F}\right) - \lim x_k = \xi_2$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $(1-\gamma) * (1-\gamma) > 1 - \varepsilon$ ve $\gamma \diamond \gamma < \varepsilon$ koşulunu sağlayan $\gamma > 0$ sayısı seçilsin. Bu durumda $\forall p > 0$ için aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$K_{\phi,1}(\gamma, p) = \left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi_1, \frac{p}{2}\right) \leq 1 - \gamma\right\},$$

$$K_{\phi,2}(\gamma, p) = \left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi_2, \frac{p}{2}\right) \leq 1 - \gamma\right\},$$

$$K_{\omega,1}(\gamma, p) = \left\{k \in \mathbb{N}: \omega\left(\hat{F}x_k - \xi_1, \frac{p}{2}\right) \geq \gamma\right\},$$

$$K_{\omega,2}(\gamma, p) = \left\{k \in \mathbb{N}: \omega\left(\hat{F}x_k - \xi_2, \frac{p}{2}\right) \geq \gamma\right\},$$

$S_{\theta}^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - \lim x_k = \xi_1$ olduğundan Lemma 3.1 den $\forall p > 0$ için $\delta_{\theta}\left(K_{\phi,1}(\gamma,p)\right) = \delta_{\theta}\left(K_{\omega,1}(\gamma,p)\right) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $S_{\theta}^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - \lim x_k = \xi_2$ olduğundan $\forall p > 0$ için $\delta_{\theta}\left(K_{\phi,2}(\gamma,p)\right) = \delta_{\theta}\left(K_{\omega,2}(\gamma,p)\right) = 0$ olur. Şimdi

$$K_{\phi,\omega}(\gamma,p) = \left(K_{\phi,1}(\gamma,p) \cup K_{\phi,2}(\gamma,p)\right) \cap \left(K_{\omega,1}(\gamma,p) \cup K_{\omega,2}(\gamma,p)\right)$$

olarak alınırsa $\delta_{\theta}\left(K_{\phi,\omega}(\gamma,p)\right) = 0$ ya da $\delta_{\theta}\left(\mathbb{N} \setminus K_{\phi,\omega}(\gamma,p)\right) = 1$ yazılır. Eğer $k \in \mathbb{N} \setminus K_{\phi,\omega}(\gamma,p)$ ise iki durum söz konusudur.

(i) $k \in \mathbb{N} \setminus \left(K_{\phi,1}(\gamma,p) \cup K_{\phi,2}(\gamma,p)\right)$

(ii) $k \in \mathbb{N} \setminus \left(K_{\omega,1}(\gamma,p) \cup K_{\omega,2}(\gamma,p)\right)$

İlk olarak $k \in \mathbb{N} \setminus \left(K_{\phi,1}(\gamma,p) \cup K_{\phi,2}(\gamma,p)\right)$ durumu düşünülsün. Bu durumda

$$\phi(\xi_1 - \xi_2, p) \geq \phi\left(\hat{F}x_k - \xi_1, \frac{p}{2}\right) * \phi\left(\hat{F}x_k - \xi_2, \frac{p}{2}\right) > (1-\gamma) * (1-\gamma)$$

elde edilir. $(1-\gamma) * (1-\gamma) > 1 - \varepsilon$ olduğundan $\phi(\xi_1 - \xi_2, p) > 1 - \varepsilon$ bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\phi(\xi_1 - \xi_2, p) = 1$ elde edilir ki bu da $\forall p > 0$ için $\xi_1 = \xi_2$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $k \in \mathbb{N} \setminus \left(K_{\omega,1}(\gamma,p) \cup K_{\omega,2}(\gamma,p)\right)$ ise, benzer yöntem kullanılarak

$$\omega(\xi_1 - \xi_2, p) < \omega\left(\hat{F}x_k - \xi_1, \frac{p}{2}\right) \diamond \omega\left(\hat{F}x_k - \xi_2, \frac{p}{2}\right) < \gamma \diamond \gamma$$

bulunur. $\gamma \diamond \gamma < \varepsilon$ olduğundan $\omega(\xi_1 - \xi_2, p) < \varepsilon$ olur. Yine $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\omega(\xi_1 - \xi_2, p) = 0$ elde edilir ki bu da $\forall p > 0$ için $\xi_1 = \xi_2$ olması demektir. Böylece $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - limx$ tek olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 3.2. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. Eğer $(\phi, \omega) - \lim x = \xi$ ise $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - \lim x = \xi$ olur.

İspat. $(\phi, \omega) - \lim x = \xi$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall p > 0$ için ve $k \geq k_0$ olduğunda $\phi(x_k - \xi, p) > 1 - \varepsilon$ ve $\omega(x_k - \xi, p) < \varepsilon$ sağlayan $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \phi(x_k - \xi, p) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \geq \varepsilon\right\}$$

kümesinin sonlu sayıda terimi vardır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin her sonlu alt kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan dolayı

$$\delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

elde edilir. Yani, $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - \lim x = \xi$ olur.

Teorem 3.3. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. Bu durumda, $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - \lim x = \xi$ olması için gerek ve yeter şart $K = \{j_1 < j_2 < \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ doğal sayılarının artan bir indeksi için $\delta_\theta(K) = 1$ ve $(\phi, \omega) - \lim_{n\to\infty} x_{j_n} = \xi$ sağlanmasıdır.

İspat. (Gereklilik) $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - \lim x = \xi$ olsun. Bazı $p > 0$ ve $s = 1,2, \ldots$için

$$T_{(\phi,\omega)}(s, p) = \left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) > 1 - \frac{1}{s} \text{ ve } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, p\right) < \frac{1}{s}\right\}$$

ve

$$R_{(\phi,\omega)}(s,p)=\left\{k\in\mathbb{N}:\phi\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)\leq 1-\frac{1}{s}\text{veya }\omega\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)\geq\frac{1}{s}\right\}$$

olsun. $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F})-\lim x=\xi$ olduğundan $\delta_\theta\left(R_{(\phi,\omega)}(s,p)\right)=0$ elde edilir. Aynı zaman da $p>0$ ve $s=1,2,\ldots$için

$$T_{(\phi,\omega)}(s,p)\supset T_{(\phi,\omega)}(s+1,p)$$

ve

$$\delta_\theta\left(T_{(\phi,\omega)}(s,p)\right)=1$$

olduğu görülür. Şimdi $k\in T_{(\phi,\omega)}(s,p)$ için $x_k\xrightarrow{(\phi,\omega)}\xi$ sağladığını göstermek zorundayız. Bunun için bazı $k\in T_{(\phi,\omega)}(s,p)$ için $x_k\nrightarrow^{(\phi,\omega)}\xi$ olsun. Dolayısıyla $\forall k\geq k_0$ için $\phi\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)\leq 1-\sigma$ ya da $\omega\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)\geq\sigma$ sağlayan bir $\sigma>0$ ve $k_0\in\mathbb{N}$ vardır. $\forall k\geq k_0$ için $\phi\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)>1-\sigma$ ve $\omega\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)<\sigma$ olsun. Böylece

$$\delta_\theta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\ \phi\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)>1-\sigma\text{ ve }\omega\left(\hat{F}x_k-\xi,p\right)<\sigma\right\}\right)=0$$

elde edilir. $\sigma>\frac{1}{s}$ olduğundan $\delta_\theta\left(T_{(\phi,\omega)}(s,p)\right)=0$ bulunur. Bu ise $\delta_\theta\left(T_{(\phi,\omega)}(s,p)\right)=1$ ile çelişir. Sonuç olarak $x_k\xrightarrow{(\phi,\omega)}\xi$ elde edilir.

(Yeterlilik) $\delta_\theta(K) = 1$ ve $(\phi, \omega) - \lim_{n\to\infty} x_{j_n} = \xi$ sağlayan $K = \{j_1 < j_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur. Böylece $\forall\sigma > 0$ ve $\forall t > 0$ için $\phi(\hat{F}x_k - \xi, p) > 1 - \sigma$ ve $\omega(\hat{F}x_k - \xi, p) < \sigma$ sağlayan $N \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi

$$\begin{aligned} R_{(\phi,\omega)}(\sigma, p) &:= \{k \in \mathbb{N}: \phi(\hat{F}x_k - \xi, p) \leq 1 - \sigma \text{ veya } \omega(\hat{F}x_k - \xi, p) \geq \sigma\} \\ &\subseteq \mathbb{N} - \{j_{N+1} < j_{N+1} < \dots\} \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\delta_\theta\left(R_{(\phi,\omega)}(\sigma, p)\right) \leq 1 - 1 = 0$ bulunur. Sonuç olarak $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - lim\, x = \xi$ elde edilir.

Tanım 3.2. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. (x_k) dizisi, $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall p > 0$ için

$$\delta_\theta(\{k \in \mathbb{N} : \phi(\hat{F}x_k - \hat{F}x_N, p) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega(\hat{F}x_k - \hat{F}x_N, p) \geq \varepsilon\}) = 0$$

koşulunu sağlayan $N = N(\varepsilon)$ varsa (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisi veya $\hat{F}S_\theta$-Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.4. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. Eğer bir (x_k) dizisi için (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak ise, (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. $S_\theta^{(\phi,\omega)}(\hat{F}) - lim\, x = \xi$ olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $(1 - \gamma) * (1 - \gamma) > 1 - \varepsilon$ ve $\gamma \diamond \gamma < \varepsilon$ şartlarını sağlayan bir $\gamma > 0$ seçilsin. Herhangi bir $p > 0$ için

$$\delta_\theta(A(\varepsilon, p)) = \delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) \leq 1 - \varepsilon \text{ veya } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

veya denk olarak

$$\delta_\theta\big(A^c(\varepsilon,p)\big) = \delta_\theta\left(\left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) > 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

elde edilir. $m \in A^c(\varepsilon,p)$ alınsın. Böylece

$$\phi\big(\hat{F}x_m - \xi, p\big) > 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}x_m - \xi, p\big) < \varepsilon$$

bulunur. Şimdi ise

$$B(\varepsilon,p) = \big\{k \in \mathbb{N}: \phi\big(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\big) \leq 1-\gamma \text{ veya } \omega\big(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\big) \geq \gamma\big\}$$

kümesi tanımlansın. $B(\varepsilon,p) \subset A(\varepsilon,p)$ olduğu gösterilsin. Bunun için $k \in B(\varepsilon,p) \setminus A(\varepsilon,p)$ alınsın. Böylece $\phi\big(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\big) \leq 1-\gamma$ ve $\phi\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) > 1-\varepsilon$ elde edilir. Aynı zamanda $\phi\left(\hat{F}x_m - \xi, \frac{p}{2}\right) > 1-\varepsilon$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}1-\gamma \geq \phi\big(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\big) \geq \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) * \phi\left(\hat{F}x_m - \xi, \frac{p}{2}\right) > (1-\varepsilon)*(1-\varepsilon)\\ > 1-\gamma\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise imkânsızdır. Diğer taraftan, $\omega\big(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\big) \geq \gamma$ ve $\omega\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) < \varepsilon$ ve ayrıca $\omega\left(\hat{F}x_m - \xi, \frac{p}{2}\right) < \varepsilon$ olursa

$$\gamma \leq \omega\left(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\right) \leq \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) \diamond \omega\left(\hat{F}x_m - \xi, \frac{p}{2}\right) < \varepsilon \diamond \varepsilon < \gamma$$

elde edilir. Bu da imkânsızdır. Böylece $B(\varepsilon, p) \subset A(\varepsilon, p)$ bulunur. Sonuç olarak $\delta_\theta\left(B(\varepsilon, p)\right) = 0$ olduğu görülür. Böylece, (x_k) dizisi , (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tanım 3.3. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. $(X, \phi, \omega, *, \diamond)$ uzayındaki her $\hat{F}S_\theta$-Cauchy dizisi (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\hat{F}S_\theta$-yakınsak ise $(X, \phi, \omega, *, \diamond)$ uzayına $\hat{F}S_\theta$-tam uzayı denir.

Teorem 3.5. θ bir lacunary dizisi olsun. Her $(X, \phi, \omega, *, \diamond)$ uzayı $\hat{F}S_\theta$-tamdır.

İspat. (x_k) dizisi (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\hat{F}S_\theta$-Cauchy dizisi olsun, ancak $\hat{F}S_\theta$-yakınsak olmasın. Verilen $\varepsilon > 0$ için $(1-\gamma) * (1-\gamma) > 1 - \varepsilon$ ve $\gamma \diamond \gamma < \varepsilon$ şartlarını sağlayan bir $\gamma > 0$ seçilsin. (x_k) dizisi $\hat{F}S_\theta$-yakınsak olmadığından

$$\phi\left(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\right) \geq \phi\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) * \phi\left(\hat{F}x_m - \xi, \frac{p}{2}\right) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon) > 1 - \gamma$$

$$\omega\left(\hat{F}x_k - \hat{F}x_m, p\right) \leq \omega\left(\hat{F}x_k - \xi, \frac{p}{2}\right) \diamond \omega\left(\hat{F}x_m - \xi, \frac{p}{2}\right) < \varepsilon \diamond \varepsilon < \gamma$$

yazılır. Böylece $B(\varepsilon, p) = \left\{k \in \mathbb{N} : \omega_{x_k - x_m} \leq 1 - r\right\}$ iken $\delta_\theta\left(B^c(\varepsilon, p)\right) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\delta_\theta\left(B(\varepsilon, p)\right) = 1$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Çünkü (x_k), $\hat{F}S_\theta$-Cauchy dizisiydi. Kabulümüz yanlıştır. Bu durumda (x_k) dizisi, (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\hat{F}S_\theta$-yakınsak olmak zorundadır. Sonuç olarak her $(X, \phi, \omega, *, \diamond)$ uzayı $\hat{F}S_\theta$-tam uzaydır.

Teorem 3.6. $(\mathcal{X}, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFNU olsun. Bu durumda, uzayda her bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdakiler denktir:

(i) x dizisi (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\hat{F}S_\theta$-yakınsaktır;

(ii) x dizisi (ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\hat{F}S_\theta$-Cauchy dizisidir;

(iii) Her sezgisel fuzzy normlu uzayı $\hat{F}S_\theta$-tamdır;

(iv) Doğal sayıların $K = (k_n)$ artan dizisi için $\delta_\theta(K) = 1$ olan(ϕ, ω) sezgisel fuzzy normuna göre $\hat{F}S_\theta$-Cauchy dizisi olan $\left(x_{k_n}\right)$ alt dizisi vardır.

4. SEZGİSEL FUZZY *n*-NORMLU UZAYLARDA FİBONACCİ LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde sezgisel fuzzy *n*-normlu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir. Bu uzaylarda Fibonacci istatistiksel yakınsaklık ve Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki teoremlerle ifade ve ispat edilecektir. Bununla birlikte sezgisel fuzzy *n*-normlu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisi tanımı verilecek ve bu kavramın Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilecektir.

Tanım 4.1. $\mathcal{A}$ bir SFnNLU, $x \in \mathcal{X}$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ olsun.

$$B(x,r,t)(\hat{F}) = \begin{Bmatrix} y \in X : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}(x-y),t\big) > 1-r \text{ ve} \\ \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}(x-y),t\big) < r \end{Bmatrix}$$

ifadesine $\mathcal{X}^n$'nin n^{th} koordinatı üzerinde *x* merkezli *r* yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 4.2. $\mathcal{A}$ SFnNLU olsun. (ϕ,ω) sezgisel fuzzy *n*-normuna göre, $\forall\varepsilon > 0$, $t > 0$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{A}$ için

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\Big\{k \le p : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}(x_{n_k})-\xi,t\big) \le 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}(x_{n_k})-\xi,t\big) \ge \varepsilon\Big\}\Big| = 0$$

sağlayan $p \in \mathbb{N}$ var ise $\mathcal{A}$'daki $\{x_{n_k}\}$ dizisi ξ'ye Fibonacci istatistiksel yakınsaktır denir. $\hat{F}St_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} = \xi$ ya da $x_{n_k} \to \xi\big(\hat{F}St_{(\phi,\omega)}\big)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.3. $\mathcal{A}$ SFnNLU olsun. (ϕ,ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall t > 0$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{A}$ için

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{A}$'daki $\{x_{n_k}\}$ dizisi ξ'ye Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. ξ'ye $\{x_{n_k}\}$ dizisinin (ϕ,ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel limit noktası denir ve $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} = \xi$ ya da $x_{n_k} \to \xi\left(\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}\right)$ ile gösterilir.

$\mathcal{A}$ SFnNLU da tüm Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(\mathcal{X})$ ile gösterilir.

Teorem 4.4. $\mathcal{A}$ SFnNLU olsun. Eğer $\{x_{n_k}\}$ dizisi (ϕ,ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak ise $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k}$ tektir.

İspat. Kabul edelim ki $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} = \xi_1$ ve $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} = \xi_2$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$(1-s) * (1-s) > 1 - \varepsilon \text{ ve } s \diamond s < \varepsilon$$

sağlayan $s > 0$ seçilsin. Bu durumda $\forall t > 0$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{A}$ için

$$K = \left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi_1, t\right) > 1 - s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi_1, t\right) < s\right\}$$

$$L = \{k \in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi_2, t\big)$$
$$> 1 - s \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi_2, t\big) < s\}$$

kümeleri tanımlansın. İlk olarak $\xi_1 \neq \xi_2$ ve $t > 0$ için $K \cap L = \emptyset$ olduğu gösterilecektir. Eğer $p \in K \cap L$ ise, bu durumda $(1 - s) * (1 - s) > 1 - \varepsilon$ den

$$\begin{aligned}\phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \xi_1 - \xi_2, t\big) &\geq \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi_1, \frac{t}{2}\right) \\ &* \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi_2, \frac{t}{2}\right) > (1 - s) * (1 - s) > 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

yazılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\forall t > 0$ için

$$\phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \xi_1 - \xi_2, t\big) = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde $\forall t > 0$ için

$$\omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \xi_1 - \xi_2, t\big) = 0$$

bulunur. Böylece $\xi_1 - \xi_2 = 0$ olur. Bu ise $\xi_1 \neq \xi_2$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $K \cap L = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak $K \subset L^c$ yazılır. Buradan

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_1,t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.>1-s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_1,t\right)<s\right\}\right|$$
$$\le \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_2,t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.>1-s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_2,t\right)\ge s\right\}\right|$$

elde edilir. Aynı zamanda $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim x_{n_k}=\xi_2$ olduğundan

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_1,t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.>1-s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_1,t\right)<s\right\}\right|\le 0$$

yazılır. Bu son ifade negatif olamayacağından

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_1,t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.>1-s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi_1,t\right)<s\right\}\right|=0$$

bulunur. Bu ise $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim x_{n_k}=\xi_1$ ile çelişir. Dolayısıyla $\xi_1=\xi_2$ olmalıdır.

Teorem 4.5. $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}$ bir lineer uzaydır.

İspat. $\mathcal{X}$'de $\{x_{n_k}\}$ dizisi alınsın.

(i) Eğer $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim x_{n_k}=\xi$ ve $\alpha\neq 0\in\mathbb{R}$ ise

$$\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim \alpha x_{n_k}=\alpha$$

olduğu gösterilmelidir. $\xi > 0$ ve $t > 0$ alınsın. Aşağıdaki gibi K ve L kümeleri tanımlansın:

$$K = \{k \in I_r : \phi(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi, t) < \varepsilon\}$$

$$L = \{k \in I_r : \phi(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(\alpha x_{n_k}) - \alpha\xi, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(\alpha x_{n_k}) - \alpha\xi, t) < \varepsilon\}.$$

$p \in K$ alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\phi(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(\alpha x_p) - \alpha\xi, t) &= \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, \frac{t}{|\alpha|}\right) \\
&\geq \phi(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, t) * \phi\left(0, \frac{t}{|\alpha|} - t\right) \\
&\geq \phi(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, t) * 1 \\
&\geq \phi(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, t) > 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\omega(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(\alpha x_p) - \alpha\xi, t) &= \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, \frac{t}{|\alpha|}\right) \\
&\leq \omega(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, t) \diamond \omega\left(0, \frac{t}{|\alpha|} - t\right) \\
&\leq \omega(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, t) \diamond 0 \\
&\leq \omega(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, t) < \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde edilir. Böylece $p \in L$ bulunur. Dolayısıyla $K \subset L$ olur. Sonuç olarak $L^c \subset K$ elde edilir. Böylece

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\Big|\Big\{k\in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(\alpha x_{n_k}\big)-\alpha\xi,t\big)$$
$$\leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(\alpha x_{n_k}\big)-\alpha\xi,t\big)\geq\varepsilon\Big\}\Big|$$
$$\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\Big|\Big\{k\in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(x_{n_k}\big)-\xi,t\big)$$
$$\leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(x_{n_k}\big)-\xi,t\big)\geq\varepsilon\Big\}\Big|$$

sağlanır. Buradan $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim x_{n_k}=\xi$ olduğundan $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim \alpha x_{n_k}=\alpha\xi$ elde edilir.

(ii) $\mathcal{X}$'de $\{x_{n_k}\}$ ve $\{y_{n_k}\}$ dizileri alınsın. Eğer $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim x_{n_k}=\xi$ ve $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim y_{n_k}=\eta$ iken $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim\big(x_{n_k}+y_{n_k}\big)=\xi+\eta$ olduğu gösterilmelidir. $\varepsilon>0$ alınsın. $(1-s)*(1-s)>1-\varepsilon$ ve $s\diamond s<\varepsilon$ özelliğini sağlayan $s>0$ seçilsin. $t>0$ için aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$A=\Big\{k\in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(x_{n_k}+y_{n_k}\big)-(\xi+\eta),t\big)$$
$$>1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(x_{n_k}+y_{n_k}\big)-(\xi+\eta),t\big)<\varepsilon\Big\}$$

$$B=\Big\{k\in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(x_{n_k}\big)-\xi,t\big)$$
$$>1-s \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(x_{n_k}\big)-\xi,t\big)<s\Big\}$$

$$C=\Big\{k\in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(y_{n_k}\big)-\eta,t\big)$$
$$>1-s \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\big(y_{n_k}\big)-\eta,t\big)<s\Big\}.$$

$p\in B\cap C$ alınsın. $(1-s)*(1-s)>1-\varepsilon$ ve $s\diamond s<\varepsilon$ olduğundan

$$\phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p + y_p) - (\xi + \eta), t\big)$$

$$= \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi + \hat{F}(y_p) - \eta, \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$\geq \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, \frac{t}{2}\right)$$

$$* \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(y_p) - \eta, \frac{t}{2}\right) > (1-s) * (1-s) > 1 - \varepsilon$$

$$\omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p + y_p) - (\xi + \eta), t\big)$$

$$\leq \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_p) - \xi, \frac{t}{2}\right)$$

$$\diamond\, \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(y_p) - \eta, \frac{t}{2}\right) < s \diamond s < \varepsilon$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $p \in A$ bulunur. Dolayısıyla $(B \cap C) \subset A$ yazılır. Sonuç olarak $A^c \subset (B^c \cup C^c)$ elde edilir. Buradan

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \Big|\Big\{k \in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k} + y_{n_k}\big) - (\xi + \eta), t\big)$$

$$\leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k} + y_{n_k}\big) - (\xi + \eta), t\big) \geq \varepsilon\Big\}\Big|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \Big|\Big\{k \in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big)$$

$$\leq 1 - s \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq s\Big\}\Big|$$

$$+ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \Big|\Big\{k \in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(y_{n_k}\big) - \eta, t\big)$$

$$\leq 1 - s \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(y_{n_k}\big) - \eta, t\big) \geq s\Big\}\Big|$$

bulunur. Dolayısıyla $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} = \xi$ ve $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim y_{n_k} = \eta$ sağlanırken $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim\big(x_{n_k} + y_{n_k}\big) = \xi + \eta$ elde edilir.

Teorem 4.6. $\mathcal{A}$ SFnNLU olsun. $\forall\theta$ lacunary dizisi için $\hat{F}St_{(\phi,\omega)}(X) \subset \hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X)$ olması için gerek ve yeter şart $\lim inf_r\, q_r > 1$ sağlanmasıdır.

İspat. Yeterli şart: $\lim inf_r\, q_r > 1$ olsun. Bu durumda yeteri kadar büyük *r* için $q_r \geq 1 + \delta$ sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $\{x_{n_k}\}$ dizisi ξ'ye (ϕ,ω) sezgisel fuzzy *n*-normuna göre Fibonacci istatistiksel yakınsak ise bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ ve yeterince büyük *r*'ler için

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\Big|\Big\{k \in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
\leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon\Big\}\Big| \\
\leq \frac{1}{k_r}\Big|\Big\{k \in I_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
\leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon\Big\}\Big| \\
+\frac{1}{k_r}\Big|\Big\{k \leq k_r : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
\leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon\Big\}\Big|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x_{n_k} \to \xi\big(\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}\big)$ olur. Sonuç olarak $\hat{F}St_{(\phi,\omega)}(X) \subset \hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X)$ sağlanır.

Koşullu şart: $\lim inf_r\, q_r = 1$ olsun. θ lacunary dizisinin $r(j) \geq r(j-1) + 2$ olmak üzere

$$\frac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \frac{1}{j} \text{ve } \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)}} > j$$

koşullarını sağlayan bir $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisi vardır. $\xi \neq 0 \in X$ olmak üzere aşağıdaki gibi bir $\{x_{n_k}\}$ dizisi tanımlansın;

$$x_{n_k} = \begin{cases} \xi, & \text{eğer } k \in I_{r(j)} \ ise \ \ j = 1,2, \ldots \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$\{x_{n_k}\}$ dizisinin (ϕ, ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Fibonacci istatistiksel yakınsak olduğu gösterilsin. $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ alınsın. $B(0, \varepsilon_1, t)(\hat{F}) \subset B(0, \varepsilon, t)(\hat{F})$ ve $\xi \notin B(0, \varepsilon, t)(\hat{F})$ sağlayan $\varepsilon_1 \in (0,1)$ seçilsin. Aynı zamanda $k_{r(j_p)} < p \leq k_{r(j_p)+1}$ sağlayan her bir p için j_p pozitif sayıları bulunabilir. Bu durumda $\forall p$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \Big| \Big\{ k \leq p : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
&\leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon \Big\} \Big| \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_p)}} \Big| \Big\{ k \leq p : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
&\leq 1 - \varepsilon_1 \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon_1 \Big\} \Big| \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_p)}} \Big[\Big| \Big\{ k \leq k_{r(j_p)} : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
&\leq 1 - \varepsilon_1 \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon_1 \\
&+ k_{r(j_p)} \leq k \leq p : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
&\leq 1 - \varepsilon_1 \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon_1 \Big\} \Big| \Big] \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_p)}} \Big| \Big\{ k \leq k_{r(j_p)} : \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \\
&\leq 1 - \varepsilon_1 \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}\big(x_{n_k}\big) - \xi, t\big) \geq \varepsilon_1 \Big\} \Big| \\
&+ \frac{1}{k_{r(j_p)}} \Big(k_{r(j_p)+1} - k_{r(j_p)} \Big) < \frac{1}{j_p} + \frac{1}{j_p + 1} + 1 - 1 = \frac{1}{j_p} + \frac{1}{j_p + 1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\hat{F}St_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} \to \xi$ bulunur. Şimdi ise $\{x_{n_k}\}$ dizisinin (ϕ,ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak olmadığı gösterilsin. $\xi \neq 0$ olduğundan $\forall t > 0$ için $\xi \notin B(0,\varepsilon,t)(\hat{F})$ sağlayan $\varepsilon > 0$ seçilsin. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \frac{1}{h_{r(j)}} \big|\{k_{r(j)-1} < k \leq k_{r(j)} : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - 0, t\big) \\ \leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - 0, t\big) \geq \varepsilon\}\big| \\ = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{h_{r(j)}} \big(k_{r(j)} - k_{r(j-1)}\big) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{h_{r(j)}} \big(h_{r(j)}\big) = 1\end{aligned}$$

ve $r \neq r(j), j = 1,2,\dots$ için

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \big|\{k_{r-1} < k \leq k_r : \phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi, t\big) \\ \leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi, t\big) \geq \varepsilon\}\big| = 1 \neq 0\end{aligned}$$

elde edilir. Ne ξ ne de 0, $\{x_{n_k}\}$ dizisinin (ϕ,ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Fibonacci lacunary istatistiksel limit noktaları olamaz. Aynı zaman da X'in diğer noktaları da Fibonacci lacunary istatistiksel limit noktası olamaz. Böylece $\{x_{n_k}\} \notin \hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X)$ bulunur.

Şimdi ise Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak olup, Fibonacci istatistiksel yakınsak olmayan bir örnek verilsin.

Örnek 4.1. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $(X, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ n-normlu uzay olsun. $\forall a,b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ ve $a \diamond b = \min\{a+b, 1\}$ olsun.

$$\phi\big(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n_k}), t\big) = \frac{t}{t + \big\|\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n_k})\big\|}$$

ve

$$\omega\left(\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}\right), t\right) = \frac{\left\|\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}\right)\right\|}{t + \left\|\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}\right)\right\|}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{A} = (X, \phi, \omega, *, \diamond)$ bir SFnNLU olur. $\{x_{n_k}\}$ dizisi

$$x_{n_k} = \begin{cases} nk, & k_r - \left(\sqrt{h_r}\right) + 1 \le k \le k_r, r \in \mathbb{N} \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için,

$$K_r(\varepsilon, t) = \left\{k \in \mathbb{N}: \phi\left(\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k}\right), t\right) \le 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k}\right), t\right) \ge \varepsilon\right\}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} K_r(\varepsilon, t) &= \left\{k \in \mathbb{N}: \frac{t}{t + \left\|\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k}\right)\right\|} \le 1 - \varepsilon \text{ ve } \frac{\left\|\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}\right)\right\|}{t + \left\|\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k}\right)\right\|} \ge \varepsilon\right\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N}: \left\|\hat{F}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_k}\right)\right\| \ge \frac{\varepsilon t}{1 - \varepsilon} > 0\right\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N}: x_{n_k} = nk\right\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N}: k_r - \left(\sqrt{h_r}\right) + 1 \le k \le k_r, r \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{h_r}|K_r(\varepsilon,t)| = \frac{1}{h_r}\left|k \in \mathbb{N}: k_r - \left(\sqrt{h_r}\right) + 1 \le k \le k_r \; r \in \mathbb{N}\right| \le \frac{\sqrt{h_r}}{h_r}$$
$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|K_r(\varepsilon,t)| = 0$$
$$\Rightarrow x_{n_k} \to 0\left(\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\phi\left(\hat{F}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n_k}\right),t\right) = \frac{t}{t+\left\|\hat{F}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n_k}\right)\right\|}$$
$$= \left\{\begin{matrix} \frac{t}{t+nk}, k_r - \left(\sqrt{h_r}\right) + 1 \le k \le k_r, & r \in \mathbb{N} \text{ için} \\ 0, \quad \text{aksi taktirde} & \end{matrix}\right\} \le 1$$

$$\omega\left(\hat{F}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n_k}\right),t\right) = \frac{\left\|\hat{F}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n_k}\right)\right\|}{t+\left\|\hat{F}\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n_k}\right)\right\|}$$
$$= \left\{\begin{matrix} \frac{t}{t+nk}, k_r - \left(\sqrt{h_r}\right) + 1 \le k \le k_r, & r \in \mathbb{N} \text{ için} \\ 0, \quad \text{aksi taktirde} & \end{matrix}\right\} \ge 0$$

olduğundan $x_{n_k} \nrightarrow 0\left(\hat{F}St_{(\phi,\omega)}\right)$ bulunur.

Teorem 4.7. $\mathcal{A}$ SFnNLU olsun. $\forall\theta$ lacunary dizisi için

$$\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X) \subset \hat{F}St_{(\phi,\omega)}(X)$$

olması için gerek ve yeter şart $lim\, sup_r\, q_r < \infty$ sağlanmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$) $\lim\sup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda $\forall r > 1$ için $q_r < H$ olacak biçimde $H > 0$ vardır.$x_{n_k} \to \xi\left(\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}\right)$ olsun ve

$$K_r = \left|\left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \le 1 - \varepsilon \ ve \ \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \ge \varepsilon\right\}\right|$$

şeklinde alınsın. Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımından

$$\frac{K_r}{h_r} < \varepsilon, \qquad \forall r > r_0 \text{için}$$

sağlayan $r_0 > 0$ vardır. $P = \max\{K_r : 1 \le r \le r_0\}$ ve p ise $k_{r-1} < p \le k_r$ koşulunu sağlayan bir tamsayı olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\left|\left\{k \le p : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \le 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\le \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \le k_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \le 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\le \frac{1}{k_{r-1}}\left\{K_1 + K_1 + \dots + K_{r_0} + K_{r_0+1} + \dots + K_r\right\} \\
&\le \frac{P}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{h_{r_0+1}\frac{K_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r\frac{K_r}{h_r}\right\} \\
&\le \frac{r_0 P}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{r>r_0}\frac{K_r}{h_r}\right)\left\{h_{r_0+1} + \dots + h_r\right\} \\
&\le \frac{r_0 P}{k_{r-1}} + \varepsilon\frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \le \frac{r_0 P}{k_{r-1}} + \ \varepsilon q_r \le \frac{r_0 P}{k_{r-1}} + \ \varepsilon H
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_{n_k}\}$ Fibonacci istatistiksel yakınsaktır. Sonuç olarak $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X) \subset \hat{F}St_{(\phi,\omega)}(X)$ bulunur.

(⇒) $\lim sup_r\, q_r = \infty$ olsun. $\xi \neq 0 \in X$ alınsın. θ lacunary dizisinin $q_{r(j)} > j, k_{r(j)} > j + 3$ koşullarını sağlayan $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisi seçilsin. $\{x_{n_k}\}$ dizisi

$$x_{n_k} = \begin{cases} \xi, & k_{r(j)-1} < k \leq 2k_{r(j)-1}, \quad j = 1,2,\ldots \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\xi \neq 0$ olduğundan $t > 0$ için $\xi \notin B(0, \varepsilon, t)$ sağlayan $\varepsilon > 0$ alınsın. Şimdi $j > 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{r(j)}} \Big| \Big\{ k \leq k_{r(j)} &: \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - 0, t\big) \\ &\leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - 0, t\big) \geq \varepsilon \Big\} \Big| < \frac{1}{h_{r(j)}} \big(k_{r(j)-1}\big) \\ &< \frac{1}{\big(k_{r(j)} - k_{r(j)-1}\big)} \big(k_{r(j)-1}\big) < \frac{1}{j-1} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\{x_{n_k}\} \in \hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X)$ elde edilir. Fakat $\{x_{n_k}\} \notin \hat{F}St_{(\phi,\omega)}(X)$ olur. Çünkü

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k_{r(j)-1}} \Big| \Big\{ k \leq 2k_{r(j)-1} &: \phi\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - 0, t\big) \\ &\leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\big(\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - 0, t\big) \geq \varepsilon \Big\} \Big| \\ &< \frac{1}{2k_{r(j)-1}} \big(k_{r(1)-1} + k_{r(2)-1} + \cdots + k_{r(j)-1}\big) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

yazılabildiğinden $\{x_{n_k}\}$ dizisinin (ϕ, ω) sezgisel fuzzy n-normuna göre Fibonacci istatistiksel yakınsak olmadığı sonucuna varılır.

Sonuç 2.1. θ lacunary dizisi için $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}(X) = \hat{F}St_{(\phi,\omega)}(X)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < \lim inf_r\, q_r \leq \lim sup_r\, q_r < \infty$ sağlanmasıdır.

Şimdi ise sezgisel fuzzy n-fuzzy normlu lineer uzayında Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisi tanımı verilecek ve bu uzayda Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklıkla Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisinin denk olduğu ispatlanacaktır.

Tanım 4.8. $\mathcal{A}$ SFnNLU ve θ lacunary dizi olsun. Eğer her bir r için $k'(r) \in I_r$, $(\phi, \omega) - \lim_{r\to\infty} x_{n_{k'(r)}} = \xi$ ve $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right) \right.\right. \\ \left.\left. \leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $\{x_{n_k}\}$ dizisinin $\left\{x_{n_{k'(r)}}\right\}$ alt dizisi varsa $\{x_{n_k}\}$ dizisine Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.9. $\mathcal{A}$ SFnNLU olsun. $\{x_{n_k}\} \in X$ dizisinin Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{x_{n_k}\}$ dizisinin Fibonacci lacunary istatistiksel Cauchy olmasıdır.

İspat. $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} \to \xi$ olsun ve $\forall t > 0$ ve $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$K(j,t)=\left\{k\in\mathbb{N}:\phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi,t\right)\right.$$
$$\left.>1-\frac{1}{j}\ ve\ \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\xi,t\right)<\frac{1}{j}\right\}$$

olarak belirtilsin. Böylece $\forall j\in\mathbb{N}$ için, $K(j+1,t)\subset K(j,t)$ ve

$$\frac{|K(j,t)\cap I_r|}{h_r}\to 1,\qquad r\to\infty$$

olur. Bu ise $r\geq m(1)$ iken,

$$\frac{|K(1,t)\cap I_r|}{h_r}>0$$

yani, $K(1,t)\cap I_r\neq\emptyset$ olacak şekilde $m(1)$ pozitif tamsayısı seçilebileceği anlamına gelir. Bir sonraki adımda $r\geq m(2)$ iken $K(2,t)\cap I_r\neq\emptyset$ sağlayacak şekilde $m(2)\geq m(1)$ seçilsin. Daha sonra $m(1)\leq r\leq m(2)$ koşulunu sağlayan $\forall r$ için, $k'(r)\in I_r\cap K(1,t)$ yani,

$$\phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right)-\xi,t\right)>0$$

ve

$$\omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right)-\xi,t\right)<1$$

olacak şekilde $k'(r) \in I_r$ seçilsin. Genel olarak, $r > m(p+1)$ iken $I_r \cap K(p+1,t) \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçilsin. Bütün bu seçimlerin sonucunda $m(p) \leq r \leq m(p+1)$ koşulunu sağlayan bütün r için, $k'(r) \in I_r \cap K(p,t)$ seçilebilir. Yani,

$$\phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right) > 1 - \frac{1}{p},$$

$$\omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right) < \frac{1}{p}$$

olur. Yani $k'(r) \in I_r$ olur. $\phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right) > 1 - \frac{1}{p}$ ve $\omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right) < \frac{1}{p}$ ifadesinden dolayı,

$$(\phi, \omega) - \lim_{r\to\infty} x_{n_{k'(r)}} = \xi$$

sağlanır. Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ için $(1-s) * (1-s) > 1 - \varepsilon$ ve $s \diamond s < \varepsilon$ koşulları sağlayan $s > 0$ seçilsin. $t > 0$ için, eğer

$$A = \Big\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right) < \varepsilon\Big\}$$

$$B = \left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) > 1 - s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_k}\right) - \xi, t\right) < s\right\}$$

$$C = \left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right)\right.$$
$$\left. > 1 - s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right) < s\right\}$$

alınırsa $(B \cap C) \subset A$ bulunur, böylece $A^c \subset (B^c \cap C^c)$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. \leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi, t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. \leq 1 - s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \xi, t\right) \geq s\right\}\right|$$
$$+ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. \leq 1 - s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right) - \xi, t\right) \geq s\right\}\right|$$

yazılır. $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)} - \lim x_{n_k} = \xi \text{ve} (\phi, \omega) - \lim_{r\to\infty} x_{n_{k'(r)}} = \xi$ olduğundan $\{x_{n_k}\}$ dizisinin Fibonacci lacunary Cauchy kısaca $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}$-Cauchy olduğu gösterilmiş olur.

Tersine, $\{x_{n_k}\}, (\phi, \omega)$ sezgisel fuzzy n-normuna göre $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}$-Cauchy dizisi olsun. Tanımdan, her bir r için $k'(r) \in I_r$, $(\phi, \omega) - \lim_{r\to\infty} x_{n_{k'(r)}} = \xi$ ve $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : \phi\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. \leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \hat{F}(x_{n_k}) - \hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

yazılır. Daha önce gösterildiği gibi

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right),t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\leq 1-\varepsilon \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right),t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\leq 1-s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_k}\right)-\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right),t\right)\geq s\right\}\right|$$

$$+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\phi\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right)-\xi,t\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\leq 1-s \text{ ve } \omega\left(\hat{F}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),\hat{F}\left(x_{n_{k'(r)}}\right)-\xi,t\right)\geq s\right\}\right|$$

eşitsizliği vardır. $(\phi,\omega)-\lim_{r\to\infty}x_{n_{k'(r)}}=\xi$ olduğundan tanımdan $\hat{F}S^{\theta}_{(\phi,\omega)}-\lim x_{n_k}=\xi$ bulunur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında sezgisel fuzzy normlu uzaylarda Fibonacci lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve bu kavramın birçok özelliği ele alınmıştır.

İleri çalışmalarda benzer özellikler çift indisli dizilerde çalışılabilir. Bununla birlikte farklı yakınsaklık türleri kullanılarak yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alotaibi, A., Mursaleen, M., BAS Alamri ve Mohiuddine, S.A. (2015). Compact operators on some Fibonacci difference sequence spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 203: doi:10.1186/s13660-015-0713-5.

Atanassov, K.T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20: 87-96.

Bag, T. ve Samanta, S.K. (2003). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 11: 687-705.

Bag, T. ve Samanta, S.K. (2005). Fuzzy bounded linear operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 151: 513-547.

Candan, M. (2015). A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences. *Mathematica Æterna,* 5(1): 191-210.

Chang, S.C. ve Mordesen, J. N. (1994). Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 86: 429-436.

Debnath, P. (2012). Lacunary ideal convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 63(3): 708-715.

Debnath, P. (2016). A generalised statistical convergence in intuitionistic fuzzy *n*-normed linear spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 12(4): 559-572.

Demiriz, S., Kara E.E. ve Başarır, M. (2015). On the Fibonacci almost convergent sequence space and Fibonacci core. *Kyungpook Mathematical Journal*, 55: 355-372.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2: 241-244.

Felbin, C. (1992). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 48: 239-248.

Felbin, C.K. (1999). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces II. p-adic analysis, summability theory, fuzzy analysis and applications (INCOPASFA) (Chennai, 1998). *The Journal of Analysis*, 7: 117-131.

Freedman, A.R. ve Sember, I.J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2): 293-305.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence. Analysis, 5: 301-313.

Fridy, J.A. ve Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, 160: 43-51.

Gähler, S. (1965). Linear-2-normierte Raume. *Mathematische Nachrichten*, 28: 1-43.

Gähler, S. (1969). Untersuchungen uber verallgemeinerte m-metrische Raume, I, II, III. *Mathematische Nachrichten*, 40: 165-189.

Goonatilake, S. (1998). *S: Toward a Global Science*, p. 126. Indiana University Press.

Gunawan, H. ve Mashadi, M. (2001a). On *n*-normed spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* 27(10): 631-639.

Gunawan, H. ve Mashadi, M. (2001b). On □finite dimensional 2-normed spaces. *Soochow Journal of Mathematics,* 27(3): 321-329.

Gürdal, M. ve Pehlivan, S. (2004). The statistical convergence in 2-banach spaces. *Thai Journal of Mathematics,* 2(1): 107-113.

Gürdal, M. ve Şahiner, A. (2008). Ideal Convergence in *n*-normed spaces and some new sequence spaces via *n*-norm. *Journal of Fundamental Sciences,* 4(1): 233-244.

Kaleva, O. ve Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12: 215-229.

Kara, E.E. (2013). Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces. *Journal of Inequalities and Applications,* (38): 15, doi: 10.1186/1029-242X-2013-38.

Kara, E.E. ve Başarır, M. (2012). An application of Fibonacci numbers into infinite Toeplitz matrices. *Caspian Journal of Mathematical Sciences,* 1(1): 43-47.

Kara, E.E., Başarır, M. ve Mursaleen, M. (2015). Compactness of matrix operators on some sequence spaces derived by Fibonacci numbers. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 39(2): 217-230.

Kara, E. E. ve Demiriz, S. (2015). Some new paranormed difference sequence spaces derived by Fibonacci numbers. *Miskolc Mathematical Notes,* 16(2): 907-923.

Kara, E.E. ve İlkhan, M. (2015). On some Banach sequence spaces derived by a new band matrix. *British Journal of Mathematics & Computer Science,* 9(2): 141-159.

Kara, E.E. ve İlkhan, M. (2016a). Lacunary *I*-convergent and lacunary *I*-bounded sequence spaces defined by an Orlicz function. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 4(2): 150-159.

Kara, E.E. ve İlkhan, M. (2016b). Some properties of generalized Fibonacci sequence spaces. *Linear Multilinear Algebra*, 64(11): 2208-2223.

Karakuş, S., Demirci, K. ve Duman, O. (2008). Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 35: 763-769.

Katsaras A. K. (1984). Fuzzy topological vector spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 12: 143-154.

Kirişçi, M., Karaisa, A. (2017). Fibonacci statistical convergence and Korovkin type approximation theorems. *Journal of Inequalities and Applications*, 229: doi: doi:10.1186/s13660-017-1503-z.

Kirişçi, M. (2019). Fibonacci statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,* 36: 5597-5604.

Konwar, N. ve Debnath P. (2017). Continuity and Banach contraction principle in intuitionistic fuzzy *n*-normed linear spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,* 33(4): 2363-2373.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. Wiley, New York.

Malceski, R. (1997). Strong *n*-convex *n*-normed spaces. *Matematichki Bilten,* 21: 81-102.

Mursaleen, M. ve Mohiuddine, S.A. (2009a). Statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed space. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(5): 2414-2421.

Mursaleen, M. ve Mohiuddine, S.A. (2009b). On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 233(2): 142-149.

Narayanan, AL. ve Vijayabalaji, S. (2005). Fuzzy *n*-normed linear space. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* 24: 3963-3977.

Narayanan, AL., Vijayabalaji, S. ve Thillaigovindan, N. (2007). Intuitionistic fuzzy bounded linear operators, *Iranian Journal of Fuzzy Systems,* 4: 89-101.

Park, J. H. (2004). Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals,* 22: 1039-1046.

Saadati, R. ve Park, J.H. (2006). On the intuitionistic fuzzy topological spaces. *Chaos, Solitons & Fractals,* 27: 331-344.

Šalàt, T. (1980). On statistical convergence of real numbers. *Mathematica Slovaca*, 30: 139-150.

Savaş, E. ve Gürdal, M. (2014a). Certain summability methods in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27 (4): 1621-1629.

Savaş, E. ve Gürdal, M. (2014b). Generalized statistically convergent sequences of functions in fuzzy 2-normed spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27: 2067-2075.

Savaş, E. ve Gürdal, M. (2015). A generalized statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Science Asia*, 41: 289-294.

Savaş, E. ve Gürdal, M. (2016). Ideal convergent function sequences in random 2-normed spaces. *Filomat*, 30 (3): 557-567.

Schweizer, B. ve Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10: 314-334.

Sen, M. ve Debnath, P. (2011a). Statistical convergence in intuitionistic fuzzy *n*-normed Linear Spaces. *Fuzzy Information and Engineering*, 3: 259-273.

Sen, M. ve Debnath, P. (2011b). Lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy n-normed linear spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, 54: 2978-2985.

Siddiqi, A.H. (1980). 2-normed spaces. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 53-70.

Thillaigovindan, N., Anita Shanthi, S. ve Jun, Y. B. (2011). On lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy n-normed linear spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* 1(2): 119-131.

Turan, G.A. (2020). On new modular sequence space defined over 2-normed spaces. *Balıkesir Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(1): 248-254.

Turan, N., Kara, E. E. ve İlkhan, M. (2018). Quasi statistical convergence in cone metric spaces. *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics*, 33(4): 613-626.

Vijayabalaji, S., Thillaigovindan, N. ve Jun, Y.B.. (2007). Intuitionistic fuzzy *n*-normed linear space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society,* 44: 291-308.

White, A., George, Jr. (1969). 2-Banach spaces. *Mathematische Nachrichten,* 42: 43-60.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets*, Information and Control*, 8: 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:	İbrahim TUZCUOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Devrek 15/03/1982

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi	:	Atatürk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Bartın Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce
Bilimsel Faaliyet/Yayınlar	:	Kişi, Ö. ve Tuzcuoğlu, İ. (2020). Fibonacci lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Journal of Progressive Research in Mathematics,* 16(3): 3001-3007. Kişi, Ö. ve Tuzcuoğlu, İ. (2020). Fibonacci lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy *n*-normed spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* 20(3): 207-222.

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar	:	

İletişim

E-Posta Adresi	:	ibrtuzcuoglu@gmail.com

Tarih	:	28.06.2021 (Tez Savunma Tarihi)