T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL VE KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI

HAZIRLAYAN

HATİCE KÜBRA ÜNAL

DANIŞMAN

DOÇ. DR. ÖMER KİŞİ

BARTIN-2021

T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL VE KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN

Hatice Kübra ÜNAL

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman	:	Doç. Dr. Ömer KİŞİ	-	Bartın Üniversitesi
Üye	:	Doç. Dr. Erhan GÜLER	-	Bartın Üniversitesi
Üye	:	Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ	-	Necmettin Erbakan Üniversitesi

BARTIN-2021

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Ömer KİŞİ danışmanlığında hazırlamış olduğum "ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL VE KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

02.04.2021

Hatice Kübra ÜNAL

ÖNSÖZ

Beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul eden, tez çalışmamın her aşamasında bilgilerini, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli bilim insanı Sayın Doç. Dr. Ömer Kişi ’ye (Bartın Üniversitesi), pozitif enerjisiyle motivasyonumun hep yüksek olmasını sağlayan değerli tez izleme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Erhan GÜLER’e (Bartın Üniversitesi), jüri üyesi Sayın Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ’e (Necmettin Erbakan Üniversitesi), Sayın Dr. Öğr. Üyesi Melih GÖCEN’ e (Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi), bu bölümde okumam için beni yönlendiren, tüm fedakârlığıyla beni destekleyen aileme en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Hatice Kübra ÜNAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSELVE KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI

Hatice Kübra ÜNAL

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2021, sayfa: 63

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm yakınsaklık teorisinde yapılan çalışmaların tarihi sürecini ve bu süreçteki gelişmelerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde önemli tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde çift indisli fark dizileri için kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış, özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde çift indisli fark dizileri için kaba ideal yakınsaklık ve kaba I_2-istatistiksel yakınsaklık tanımlar verilmiş ve sonuçlar ispatlarla analiz edilmiştir. Beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kaba yakınsaklık; İstatistiksel yakınsaklık; İdeal yakınsaklık; Fark dizisi.

Bilim Alanı Kodu: 502.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ROUGH STATISTICAL CONVERGENCE AND ROUGH IDEAL CONVERGENCE OF DIFFERENCE DOUBLE SEQUENCES

Hatice Kübra ÜNAL

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Ömer KİŞİ
Bartın-2021, pp: 63

This master thesis consists of five chapters. In the first section, the historical process of the studies and developments in the theory of summability theory are mentioned. In the second section, some significant definitions and notations are given. In the third section, the concept of rough statistical convergence of a difference double sequence is defined and features of this concept are examined. In the fourth section, rough ideal convergence and rough I_2-statistical convergence were investigated for the difference double sequences and analyze the results with proofs. In the last section, there are results and suggestions.

Keywords: Rough convergence; Statistical convergence; Ideal convergence; Difference sequence.

Scientific Field Code: 502.03.01

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$(X, \|.\|)$	: Normlu uzay
$d(A)$	: A kümesinin doğal yoğunluğu
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\|A\|$	: K kümesinin eleman sayısı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
$(\Delta x_{kl}) \overset{r-st_2}{\rightarrow} \xi$	: (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye kaba istatistiksel yakınsaktır
$\Delta x \xrightarrow{r-I_2} \xi$	: (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye kaba ideal yakınsaktır
$(\Delta x_{kl}) \overset{r-st_2}{\rightarrow} \xi$	: (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye kaba istatistiksel yakınsaktır
$\Delta x_{kl} \xrightarrow{r-I_2-st} \xi$	: (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye kaba I_2-istatistiksel yakınsaktır
$LIM^r \Delta x_{kl}$	: (Δx_{kl}) dizisinin *r*-limit noktaları kümesi
$diam(LIM^r \Delta x_i)$	: (Δx_{kl}) dizisinin *r*-limit noktaları kümesinin çapı
$\bar{B}_r(\xi)$	: ξ merkezli *r* yarıçaplı kapalı yuvar
A^c	: A kümesinin tümleyeni
$\bar{r}$	: *r*- yakınsak dizinin en küçük yakınsaklık derecesi
$\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$	: (Δx_{kl}) dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
$(I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$	: (Δx_{kl}) dizisinin tüm (I_2)-istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
(h.h.*k.l.*)	: Hemen hemen her *k*, *l*

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematiğin en önemli kavramlarından biri, dizinin yakınsaklığı kavramıdır. Yakınsaklık koşulunu sağlayan dizilerin yanı sıra bu koşulu sağlamayan dizilerin de incelenmesi matematiksel açıdan son derece önemlidir. Yakınsaklığı sağlamadığı halde bazı koşullarda yakınsaklık kavramıyla ilişkilendirilebilecek dizilerin varlığı, çeşitli yakınsaklık türlerinin ortaya çıkmasını beraberinde getirmektedir. Bu yakınsaklık türlerinin en önemlilerinden biri, sonlu boyutlu uzaylardaki kaba yakınsaklık kavramıdır. İlk defa Phu tarafından 2001 yılında yapılan bir çalışmada, yakınsaklık aralığı $r > 0$ alınarak dizinin kaba yakınsaklığını tanımlanmıştır (Phu, 2001).

$(X, \|.\|)$ normlu uzay, $r > 0$ ve $(x_m) \in X$ bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m \geq m_\varepsilon$ olduğunda,

$$\|x_m - \alpha\| < r + \varepsilon$$

sağlayan m_ε sayısı bulunabiliyorsa veya

$$\limsup_{m \to \infty} \|x_m - \alpha\| \leq r$$

koşulu sağlanıyorsa (x_m) dizisi $\alpha \in X$'e kaba yakınsaktır ya da r-yakınsaktır denir. $x_m \xrightarrow{r} \alpha$ şeklinde ifade edilir. (Burada, r dizinin kabalık derecesidir). Eğer $r = 0$ ise kaba yakınsaklık tanımı bilinen anlamda yakınsaklık tanımına dönüşür. Tez çalışmasında $r > 0$ alınacaktır. Sonuç olarak, yakınsak her dizi kaba yakınsak olmasına rağmen kaba yakınsak her dizi yakınsak olmayabilir.

Kaba yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan ayıran en önemli özelliklerinden birisi de yakınsak dizinin terimlerini kesin olarak belirlemenin mümkün olmadığıdır. Örneğin, $y_m \to \alpha$ yakınsak dizinin terimleri belirlenemediğinden bu dizi yerine işlemlerimizde kolaylık sağlayacak $\|x_m - y_m\| \leq r$ koşulunu sağlayan bir (x_m) yaklaşım dizisinden yararlanılır. r, yaklaşım hatasının bir üst sınırıdır. Bununla birlikte, $y_m \to \alpha$ ve

$\forall m \in \mathbb{N}$ için $\|x_m - y_m\| \leq r$ koşulunu sağlayan herhangi bir dizi, (x_m) tüm terimleri belirlenemeyen bir dizi olsun. Burada (x_m) dizisinin yakınsak olup olmadığı belirlenemez. Ancak

$$\|x_m - \alpha\| \leq \|x_m - y_m\| + \|y_m - \alpha\| \leq r + \|y_m - \alpha\| < r + \varepsilon$$

yazılabildiğinden dizinin kaba yakınsak olduğu görülür (Phu, 2001). Bu durum Cauchy dizileri için de söylenebilir (Phu, 2002).

$(X, \|.\|)$ sonlu boyutlu normlu uzay, (x_k) bu uzayda bir dizi olsun. (x_k) dizisinin r-limit noktası tek değildir. Limit noktalarının kümesi $LIM^r x_k$ olmak üzere

$$LIM^r x_k = \{\alpha \in X : x_k \xrightarrow{r} \alpha\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $LIM^r x_k \neq \emptyset$ ise (x_k) dizisi r-yakınsaktır. Diğer taraftan, Phu sonsuz boyutlu uzaylarda kaba yakınsaklık tanımını vermiştir (Phu, 2003).

Aytar (2008a), bir dizinin çekirdeğinin *2*q-limit kümesine eşit olduğunu ispatlamıştır. Bu çalışmada, q sayısı dizinin kaba limit kümesi boştan farklı olacak şekildeki r'lerin infimumu olarak alınmıştır. Doğal yoğunluk kavramı kullanılarak reel sayı dizilerinin kaba istatistiksel yakınsaklığı kavramı (Aytar, 2008b) tarafından verilmiştir. Farklı zamanlarda (Pal vd., 2013; Dündar ve Çakan 2014a) kaba ideal yakınsaklık kavramından bahsetmişlerdir. Son yıllarda kaba yakınsaklığın ideal yakınsaklığı konusunda bir çok çalışma yapılmıştır (Dündar ve Çakan, 2014b; Dündar, 2016; Kişi ve Dündar, 2018; Savaş vd., 2019).

Malik ve Maity, çift diziler için kaba yakınsaklık ve kaba istatistiksel yakınsaklık kavramlarını vermişler ve önemli sonuçlarını elde etmişlerdir (Malik Maity 2013; Malik ve Maity, 2016). Dündar ve Çakan, bu diziler için kaba ideal yakınsaklığı tanımlamışlardır (Dündar ve Çakan, 2016).

Yakınsaklık kavramına genel bir bakış açısı kazandıran kavram istatistiksel yakınsaklık kavramıdır. Pozitif doğal sayılarının doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık ilk defa 1951 yılında Fast tarafından tanımlanmıştır (Fast, 1951). Reel ve kompleks terimleri diziler için istatistiksel yakınsaklığın birçok özellikleri çalışılmıştır (Schoenberg, 1959; Fridy, 1985). İstatistiksel yakınsaklığın birçok uygulama alanı mevcuttur. Bu uygulamalardan bazıları, toplanabilme teorisi (Freedman ve Sember, 1981), lokal konveks dizi uzaylarında istatistiksel yakınsaklık (Maddox, 1988), trigonometrik seriler (Zygmund, 1979), sayılar teorisi (Erdös ve Tenenbaum, 1989), ölçüm teorisi (Miller, 1995) olarak verilebilir.

$\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve $A \subset \mathbb{N}$ olsun. $|A|$, A kümesinin eleman sayısını göstermek üzere,

$$A_m = \{m \leq n \colon m \in A_m\}$$

olduğunda

$$d(A) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}|A_m|)$$

ifadesine A kümesinin doğal yoğunluğu denir. Eğer A sonlu elemanlı ise $d(A) = 0$ olur. Bu tezde, doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerde çalışılacaktır. Bununla birlikte kullanılacak diğer bir gösterim de, bir P özelliğinin hemen hemen her $m \in A$ için sağlanması olacaktır.

(x_m) reel sayı dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{m \leq n \colon |x_m - \beta| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanıyorsa *x* dizisi β' ya istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - limx_m = \beta$ ile gösterilir.

$x = (x_m)$ dizisi

$$x_m = \begin{cases} 1, & m = p^2 \\ 0, & m \neq p^2 \end{cases}$$

şeklinde alınsın. $(x_m) = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,..)$ olur. Dolayısıyla

$$A = \{m \in \mathbb{N} : |x_m - 0| \geq \varepsilon\} = \{1,4,9, \dots\}$$

doğal yoğunluğu sıfır olan küme elde edilir. Çünkü,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{m \leq n : x_m \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur.

İstatistiksel yakınsaklık tanımından şu sonuca varılabilir: Eğer x dizisi β sayısına istatistiksel yakınsak ise β sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta elemanı bulunurken, bu komşuluğun dışında da indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Böylece istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamda yakınsaklıktan daha genel bir durumdur. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

İstatistiksel yakınsaklıkla birlikte birçok kavram bu yakınsaklık türüyle ilişkilendirilerek tekrar çalışılmıştır. Limit noktası kavramı bunlardan birisidir. x bir dizi ve $\beta \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_{m_n} = \beta \text{ ve } d(M) \neq 0$$

sağlayacak biçimde bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$ kümesi varsa, β'ya x dizisinin istatistiksel limit noktası denir (Fridy, 1993).

İdeal yakınsaklık ve I^*-yakınsaklık kavramları ilk olarak Kostyrko vd. tarafından incelenmiştir (Kostyrko vd., 2000). Bu çalışmadan sonra Das vd. çift dizilerde ideal çeşitlerini, I-yakınsaklık ve I^*-yakınsaklık kavramlarını vererek özelliklerini incelemişlerdir (Das vd., 2008a). Son yıllarda çift dizilerde ideal yakınsaklığın birçok özellikleri araştırılmıştır (Kostyrko vd., 2005; Triphaty ve Triphaty, 2005; Kumar, 2007; Das ve Malik, 2008b; Gürdal ve Şahiner, 2008, Savaş ve Das, 2011).

Fark dizileri ilk olarak 1981 yılında Kızmaz tarafından $m \in \mathbb{N}$ için $\Delta x = (\Delta x_m) = (x_m - x_{m+1})$ şeklinde tanımlanmıştır (Kızmaz, 1981). Bu çalışmadan sonra fark dizileriyle ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır (Et, 1993; Başarır, 1995; Et ve Çolak, 1995; Et ve Nuray, 2001; Gümüş ve Nuray, 2011).

Demir ve Gümüş, 2020 fark dizilerinin kaba yakınsaklığı tanımını vermişler ve özelliklerini incelemişlerdir. Fark dizilerinin kaba istatistiksel yakınsaklık kavramını ilk kez Demir ve Gümüş vermişlerdir (Demir ve Gümüş, 2022). Çift indisli fark dizilerinde ideal yakınsaklık Kişi tarafından tanımlanmıştır (Kişi, 2020).

Bu tez çalışmasında, kaba istatistiksel yakınsaklığı çift indisli fark dizilerinde verilip özellikleri incelenecektir. Aynı zaman da çift indisli fark dizilerinin kaba I_2-yakınsaklık ve kaba I_2-istatistiksel yakınsaklık kavramlarının geometrik ve topolojik özellikleri verilecektir.

BÖLÜM 2

TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde temel tanım, teorem, vb. kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. $P \subseteq \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ ve χ_A fonksiyonu P kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$d_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$$

olarak tanımlansın.

$$\underline{d}(A) = \lim_{n\to\infty} \inf\, d_n(A)\,, \qquad \overline{d}(A) = \lim_{n\to\infty} \sup\, d_n(A)$$

sırasıyla *P* kümesinin alt ve üst doğal yoğunluğudur. Eğer

$$d(P) = \lim_{n\to\infty} d_n(P)$$

sağlanıyorsa bu limite *P*'nin doğal yoğunluğu denir (Niven, 1951).

Tanım 2.2 $y = (y_p)$ bir dizi, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $|P|$, P kümesinin eleman sayısı olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$d(\{p \leq n : |y_p - \gamma| \geq \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{p \leq n : |y_p - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlıyorsa y dizisi $\gamma \in \mathbb{R}'$ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim y = \gamma$ ile gösterilir (Fast, 1951).

Tanım 2.3. $T \neq \emptyset$ ve Y'nin alt kümelerinin $T \subseteq 2^Y$ sınıfı

- $\emptyset \in T$,

- $P, Q \in T$ için $P \cup Q \in T$,
- $P \in T$ ve $Q \subseteq P$ için $Q \in T$

koşullarını sağlanıyorsa T'ye Y'de bir ideal denir. Eğer $Y \notin T$ ise T'ye Y'de bir aşikar olmayan (nontrivial) ideal denir (Kuratowski, 1958).

Tanım 2.4. $Y \neq \emptyset$ ve Y'nin alt kümelerinin baştan farklı bir $\mathcal{F} \subseteq 2^Y$ sınıfı

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $P, Q \in \mathcal{F}$ için $P \cap Q \in \mathcal{F}$,
- $P \in \mathcal{F}$ ve $P \subseteq Q$ için $Q \in \mathcal{F}$

koşullarını sağlanıyorsa $\mathcal{F}$'ye Y'de bir filtre denir (Nagata, 1974).

Lemma 2.1. I, Y'nin aşikar olmayan ideali ve $Y \neq \emptyset$ olsun.

$$\mathcal{F}(I) = \{M \subset Y : \exists A \in I : M = Y \setminus A\}$$

sınıfı, Y'de bir filtredir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.5. T'ye Y'de aşikar olmayan ideal olmak üzere $\forall x \in Y$ için $\{x\} \in Y$ oluyorsa T'ye Y'de uygun ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.6. I, $\mathbb{N}$'de aşikar olmayan ideal olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$T(\varepsilon) = \{p \in \mathbb{N} : |x_p - \gamma| \geq \varepsilon\} \in I$$

sağlanıyorsa (x_p) dizisi $\gamma \in \mathbb{R}$ sayısına I-yakınsaktır denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.7. $y = (y_{pr})$ reel terimli bir çift dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $p, r > N$ olduğunda, $|y_{pr} - \gamma| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, (y_{pr}) dizisi $\gamma \in \mathbb{R}$'ye Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. $P - lim y_{pr} = \gamma$ veya $lim y_{pr} = \gamma$ olarak gösterilir.

Tanım 2.8. I_2, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde nontrivial bir ideal olsun. Eğer $\forall p, r \in \mathbb{N}$ için, $\{p, r\} \in I_2$ oluyorsa I_2 idealine uygun ideal, $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\{p\} \times \mathbb{N} \; ve \; \mathbb{N} \times \{p\} \in I_2$$

oluyorsa I_2 idealine kuvvetli uygun ideal denir.

Kuvvetli uygun idealin bir uygun ideal olduğu açıktır. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}'$de

$$I_2^0 = \{A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m(A) \in \mathbb{N}) \; (p, r \geq m(A) \Rightarrow (p, r) \notin A)\}$$

idealini alınsın. I_2^0 kuvvetli uygun idealdir.

Aynı zamanda I_2 idealinin kuvvetli idealdir $\Leftrightarrow I_2^0 \subseteq I_2$ sağlamasıdır (Das vd., 2008).

Tanım 2.9. $I_2 \subseteq 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, (Y, ρ) bir metrik uzay ve (y_{pr}), Y uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$T(\varepsilon) = \Big\{\{p, r\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho\big(y_{pr}, \gamma\big) \geq \varepsilon\Big\} \in I_2$$

sağlıyorsa (y_{pr}) dizisi $\gamma \in \mathbb{R}$ sayısına I_2-yakınsaktır denir ve $I_2 - lim y_{pr} = \gamma$ ile gösterilir (Dems 2004).

I_2 ideali I_2^0 olarak alındığında, I_2-yakınsaklık ve Pringsheim anlamında adi yakınsaklık ile çakışır ve aynı zamanda I_2 ideali

$$I_2^{d_2} = \{A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d_2(A) = 0\}$$

olarak alınırsa $I_2^{d_2}$-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir (Das et al. 2008a).

Tanım 2.10. (Y,ρ) bir metrik uzay ve (y_{pr}), Y'de bir dizi olsun.

$$\left\{\{p,r\}\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\rho\left(y_{pr},c\right)<\varepsilon\right\}\notin I_2$$

oluyorsa $c\in Y$ elemanına (y_{pr}) dizisinin I_2-yığılma noktası denir ve $I_2\left(\Gamma_y\right)$ olarak gösterilir (Das et al. 2008a).

Tanım 2.11. N, bir F cismi üzerinde bir lineer uzay, $\|.\|:N\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in\mathbb{N},\forall\alpha\in F$ için $\|.\|$, aşağıda belirtilen koşulları yerine getiriyorsa bu fonksiyona N kümesi üzerinde bir norm fonksiyonu, $(N,\|.\|)$'ye bir normlu uzay denir.

- $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta,$
- $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,$
- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

Tanım 2.12. $x=(y_p)$ bir dizi, $\gamma\in\mathbb{R}$ ve $\forall\varepsilon>0$ için $\Delta y=\left(\Delta y_p\right)=\left(y_p-y_{p+1}\right)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{p\leq n:\left|\Delta y_p-\gamma\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

veya başka bir ifadeyle $\left|\Delta x_p-\gamma\right|<\varepsilon$ (h. h. p) oluyorsa (y_p) dizisi γ sayısına Δ-istatistiksel yakınsaktır denir (Başarır, 1995).

Tanım 2.13. $x=(y_p)$ reel sayı dizisi, $\gamma\in\mathbb{R}$ ve $\forall\varepsilon>0$ için $\Delta y=\left(\Delta y_p\right)=\left(y_p-y_{p+1}\right)$ olsun.

$$\Delta A_\varepsilon=\left\{n\in\mathbb{N}:\left|\Delta y_p-\gamma\right|\geq\varepsilon\right\}\in I$$

oluyorsa (y_p) dizisi γ sayısına Δ-ideal yakınsaktır denir ve $\Delta I-lim y_p=\gamma$ ile gösterilir (Gümüş, 2011).

BÖLÜM 3

ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, çift indisli fark dizileri için kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı sonlu boyutlu normlu uzaylarda çalışılmıştır. Kaba istatistiksel yakınsaklık kavramının çift indisli fark dizileri için nasıl tanımlanabileceği incelenmiş ve konuyla ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır.

Tanım 3.1. (Δx_{kl}), $(X, \|.\|)$ uzayında bir dizi ve $r > 0$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \ \|\Delta x_{kl} - \xi \ \ \| \geq r + \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise veya

$$st_2 - \lim_{k,l\to\infty} \|\Delta x_{kl} - \xi \ \ \| \leq r$$

koşulunun sağlanması durumunda (Δx_{kl}) dizisi $\xi \in X'$e kaba istatistiksel yakınsaktır veya $r - st_2$ yakınsaktır denir. Aynı zamanda bu tanımı aşağıdaki gibi göstermek mümkündür. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her *k*, *l* için,

$$\|\Delta x_{kl} - \xi \ \ \| < r + \varepsilon \quad (h.h.k,l)$$

sağlanıyorsa $(\Delta x_{kl}) \overset{r-st_2}{\to} \xi$ olur. (Δx_{kl}) dizisinin $r - st_2$ limit noktaları kümesi $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ ile gösterilir. r kabalık derecesini ifade etmek üzere eğer $r = 0$ ise tanım bilinen anlamda istatistiksel yakınsaklığa dönüşür.

İstatistiksel yakınsak olmayan ancak $r - st_2$ yakınsak olan bir (Δx_{kl}) dizisi örneği verelim.

Örnek 3.1. (Δy_{kl}) dizisi μ noktasına istatistiksel yakınsak olan ve kesin olarak ölçülemeyen bir dizi, (Δx_{kl}) dizisi ise $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\ \| \leq r$ (hemen hemen her k, l) koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \ \|\Delta y_{kl} - \mu\ \ \| \geq \varepsilon\}$$

ve

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \ \|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\ \ \| \geq r\}$$

kümelerinin doğal yoğunlukları sıfırdır. Bu durumda (Δx_{kl}) dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Ancak

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \ \|\Delta y_{kl} - \mu\ \ \| \geq \varepsilon\} \supseteq \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \ \|\Delta x_{kl} - \mu\ \ \| \geq r + \varepsilon\}$$

olduğundan istatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \ \|\Delta x_{kl} - \mu\ \ \| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir ve (Δx_{kl}) dizisinin μ noktasına $r - st_2$ yakınsak olduğu sonucuna varılır.

Kaba istatistiksel limit $r > 0$ kabalık derecesi için tek değildir. Kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olmak üzere, bu küme

$$st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) := \left\{\xi\ \in \mathbb{R}^n : \ \Delta x_{kl} \overset{r-st_2}{\rightarrow} \xi\right\}$$

ile gösterilir.

Eğer $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ ise

$$st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = [st_2 - \text{limsup}(\Delta x_{kl}) - r, st_2 - liminf(\Delta x_{kl}) + r]$$

biçimindedir.

Diğer taraftan, (Δx_{kl}) sınırsız bir dizi ise $LIM^r(\Delta x_{kl}) = \emptyset$ olur. Fakat bu dizi kaba istatistiksel yakınsak olabilir.

Örnek 3.2. $(\Delta x_{kl}) = \begin{cases} (-1)^{k+l}, & \text{eğer } k \neq m^2, l \neq n^2 \ (m,n \in \mathbb{N}) \\ kl, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

dizisi alınsın. Bu durumda

$$st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{eğer } r < 1 \text{ ise} \\ [1-r, r-1], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve tüm $r > 0$ için $LIM^r(\Delta x_{kl}) = \emptyset$ olur.

Sonuç 3.1. $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olması $LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olmasını gerektirmez. Fakat $LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ ise $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olmalıdır. Bu durumda

$$LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$$

bağıntısı mevcuttur. Ayrıca,

$$diam\big(LIM^r(\Delta x_{kl})\big) \leq diam(st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})\,)$$

sağlanır.

Teorem 3.1. Sonlu boyutlu $(X, \|.\|)$ normlu uzayında (Δx_{kl}) çift dizisi için

$$diam(st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})) \leq 2r$$

sağlanır. Genellikle $diam(st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}))$ kümesinin daha küçük bir alt sınırı yoktur.

İspat. $diam(st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})) > 2r$ olarak kabul edelim. Bu durumda $d = \|y - z\| > 2r$ koşulunu sağlayan $y, z \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ mevcuttur. $\varepsilon \in \left(0, \frac{d}{2} - r\right)$ olarak alınsın. $y, z \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A_1 := \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon\}$$

ve

$$A_2 := \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - z\| \geq r + \varepsilon\}$$

olmak üzere $d(A_1) = 0$ ve $d(A_2) = 0$ sağlanır. Doğal yoğunluk tanımından $d(A_1^c \cap A_2^c) = 1$ olur. $\forall (k,l) \in A_1^c \cap A_2^c$ için

$$\|y - z\| \leq \|\Delta x_{kl} - y\| + \|\Delta x_{kl} - z\| < 2(r + \varepsilon) < 2\left(r + \frac{d}{2} - r\right) = d = \|y - z\|$$

yazılır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

$$diam\big(st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})\big) \leq 2r$$

olmalıdır.

Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatını verelim. (Δx_{kl}) dizisinin istatistiksel limiti ξ olsun. Buradan $\varepsilon > 0$ için

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yazılır. Böylece

$$\forall y \in \overline{B}_r(\xi) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - \xi\| \leq r\}$$

elemanı için

$$\|\Delta x_{kl} - y\| \leq \|\Delta x_{kl} - \xi\| + \|\xi - y\| < \|\Delta x_{kl} - \xi\| + r$$

elde edilir. Ayrıca

$$\forall (k,l) \in \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}$$

için

$$\|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon$$

olur. (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye istatistiksel yakınsaklığından

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}) = 1$$

yazılır ki buradan $y \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olur. Sonuç olarak $\overline{B}_r(\xi) = st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ yazılır. $diam\left(\overline{B}_r(\xi)\right) = 2r$ olması $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ kümesinin çapının üst sınırının $2r$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1 den $LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ iken $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2. (Δx_{kl}) dizisi sınırlı ise $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olacak şekilde $r \geq 0$ sayısı mevcuttur. Bu sonucun tersinin sadece istatistiksel sınırlı olması halinde doğru olacağı söylenebilir.

Teorem 3.2. (Δx_{kl}) dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerekli ve yeterli şart $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ sağlayacak şekilde $r \geq 0$ sayısının var olmasıdır.

İspat. (Δx_{kl}) dizisinin istatistiksel sınırlı olması durumunda $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ sağlayacağını gösterelim. İstatistiksel sınırlılık tanımından

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl}\| \geq M\}) = 0$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$$P = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl}\| \geq M\}$$

için

$$r' := \sup\{\|\Delta x_{kl}\|; (k,l) \in P^c\}$$

olarak tanımlansın. Böylece $st_2 - LIM^{r'}(\Delta x_{kl})$ kümesi $\mathbb{R}^n$'nin orijinini içerir. Sonuç olarak $st_2 - LIM^{r'}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ elde edilir.

Tersine bazı $r \geq 0$ sayıları için $st_2 - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\xi \in st_2 - LIM^{r}(\Delta x_{kl})$ olacak şekilde en az bir ξ vardır. Yani $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

olur. Bu ise hemen hemen her Δx_{kl} elamanları yarıçapı r den büyük olan bir yuvar tarafından kapsandığını ifade eder. O halde (Δx_{kl}) istatistiksel sınırlı olur.

$(\Delta x_{kl}') = (\Delta x_{kp\ lq})$, (Δx_{kl}) dizisinin bir alt dizisi olduğunda $LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \subset LIM^{r}\ (\Delta x_{kl}')$ olur. Fakat bu durum istatistiksel yakınsaklık için söylemek mümkün değildir.

Teorem 3.3. $(\Delta x_{kl}') = (\Delta x_{kp\ lq})$ dizisi, (Δx_{kl}) dizisinin bir ince olmayan bir alt dizisi ise $st_2 - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \subset st_2 - LIM^{r}(\Delta x_{kl}')$ olur.

İspat. $\xi \in st_2 - LIM^{r}(\Delta x_{kl})$ alınsın. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\ \Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}$$

$d(A(\varepsilon)) = 0$ olur. Ayrıca, yoğunluk tanımından $d(A^c(\varepsilon)) = 1$ yazılır. $(\Delta x_{kl}') = (\Delta x_{kp\ lq})$, (Δx_{kl})'nin ince olmayan alt dizisi olduğundan $K = \{(k_p, l_q): p, q \in \mathbb{N}\}$ kümesi için $d(K) = 1$ bulunur. O zaman $d(A^c(\varepsilon) \cap K) = 1$ olur.

$$A'(\varepsilon) = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\ \Delta x_{kp\ lq} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}$$

olsun. Şimdi

$$\{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kp\ lq} - \xi\| <\ r + \varepsilon\} \supset A^c(\varepsilon) \cap K.$$

Bu nedenle $d\left(\left(A'(\varepsilon)\right)^{c}\right) = 1,$ $d(A'(\varepsilon)) = 0$ olur, bu da $\xi \in st_2 - LIM^{r}(\Delta x'_{kp\ lq})$

anlamına gelir.

Teorem 3.4. (Δx_{kl}) dizisinin r-istatistiksel limit noktaları kümesi kapalıdır.

İspat. Teoremin ispatı için fonksiyonel analizdeki "$\Delta y_{kl} \to \gamma$ yakınsak dizisi için $\Delta y \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğunda aynı zamanda $\gamma \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ oluyorsa $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ kümesi kapalıdır." teoremini kullanacağız. Eğer $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \emptyset$ ise ispat açıktır. $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $k, l \to \infty$ iken $(\Delta y_{kl}) \to \gamma$ sağlayacak şekilde $(\Delta y_{kl}) \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ dizisi alınsın. $\gamma \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Yakınsaklık tanımından, $\forall \varepsilon > 0$ için $(\Delta y_{kl}) \to \gamma$ olduğundan, $\forall k > k_{\frac{\varepsilon}{2}}, l > l_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için $\|\Delta y_{kl} - \gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_{\frac{\varepsilon}{2}}, l_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ vardır. $k_0 > k_{\frac{\varepsilon}{2}}, l_0 > l_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sağlayan $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ seçildiğinde $\left\|\Delta y_{k_0 l_0} - \gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılır. Diğer taraftan $(\Delta y_{kl}) \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğundan $y_{k_0 l_0} \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olur. Buradan

$$d\left(\left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

yazılır. Bununla birlikte

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \gamma\| < r + \varepsilon\} \supseteq \left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

kapsamının doğru olduğu gösterilsin. Bunun için

$$(p,r) \in \left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

alınsın. Buradan $\left\|\Delta x_{pr} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir ki buradan

$$\left\|\Delta x_{pr} - \gamma\right\| \leq \left\|\Delta x_{pr} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| + \left\|\Delta y_{k_0 l_0} - \gamma\right\| < r + \varepsilon$$

olur. Yani

$$(p,r) \in \left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| < r + \varepsilon\right\}$$

bulunur ki, bu ifade

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \gamma\| < r + \varepsilon\} \supseteq \left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

kapsamını ispatlar.

$$d\left(\left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

olduğundan

$$d\left(\left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \left\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 1$$

elde edilir. Böylece

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \gamma\| < r + \varepsilon\}) = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \gamma\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

bulunur. $\gamma \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ elde edilir. Sonuç olarak *r*-istatistiksel limit noktaları kümesinin kapalı olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 3.5. (Δx_{kl}) dizisinin *r*-istatistiksel limit noktaları kümesi konvekstir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve (Δx_{kl}) dizisi için $y_0, y_1 \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ alınsın.

$$A_0(\varepsilon) := \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - y_0\| \geq r + \varepsilon\},$$

ve

$$A_1(\varepsilon) := \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - y_1\| \geq r + \varepsilon\}$$

şeklinde $A_0(\varepsilon)$ ve $A_1(\varepsilon)$ kümeleri tanımlansın. $y_0, y_1 \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğundan $d\big(A_0(\varepsilon)\big) = 0$, $d\big(A_1(\varepsilon)\big) = 0$ elde edilir. Böylece $(k,l) \in A_0^c(\varepsilon) \cap A_1^c(\varepsilon)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|\Delta x_{kl} - [(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1]\| \leq (1-\lambda)\|\Delta x_{kl} - y_0\| + \lambda\|\Delta x_{kl} - y_1\| < r + \varepsilon$$

yazılır. $d\big(A_0^c(\varepsilon) \cap A_1^c(\varepsilon)\big) = 1$ olduğundan

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - [(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1]\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

bulunur. Böylece $(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ elde edilir. Bu ise $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ kümesinin konveks olduğunu ispatlamış olur.

Teorem 3.6. $r > 0$ olsun. (Δx_{kl}) dizisinin ξ ye r-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall (k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $st_2 - LIM^r(\Delta y_{kl}) = \xi$ ve $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\| \leq r$ olacak şekilde bir (Δy_{kl}) dizisinin var olmasıdır.

İspat. $\Delta x \xrightarrow{r-st_2} \xi$ olsun. Buradan, $st_2 - \limsup \|\Delta x_{kl} - \xi\| \leq r$ olur. Şimdi

$$\Delta y_{kl} := \begin{cases} \xi, & \|\Delta x_{kl} - \xi\| \leq r \text{ ise,} \\ \Delta x_{kl} + r\dfrac{\xi - \Delta x_{kl}}{\|\Delta x_{kl} - \xi\|}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

tanımlansın. Buradan

$$\|\Delta y_{kl} - \xi\| = \begin{cases} 0, & \|\Delta x_{kl} - \xi\| \leq r \text{ ise} \\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| - r, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

yazılabilir. Δy_{kl}'nin tanımından $\forall (k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\| \leq r$ olur ve aynı zaman da $st_2 - \limsup \|\Delta y_{kl} - \xi\| = 0$ elde edilir. Böylece $st_2 - \lim \Delta y_{kl} = \xi$ sağlanır.

Şimdi ise $\forall (k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $st_2 - \lim \Delta y_{kl} = \xi$ ve $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\| \leq r$ olacak şekilde bir (Δy_{kl}) dizisi olduğundan (Δx_{kl}) dizisinin ξ ye r-istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim. $st_2 - \lim \Delta y_{kl} = \xi$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\} \subset \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}$$

kapsamı geçerlidir. Bu kapsam ilişkisinden dolayı

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ifadesinden

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (Δx_{kl}) dizisinin ξ ye r-istatistiksel yakınsak olduğu ispatlanmış olur.

Tanım 3.2 $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}) \neq 0$$

koşulu sağlanıyorsa ξ noktasına (Δx_{kl}) dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir. (Δx_{kl}) 'nin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesini $\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ile gösterilir.

Lemma 3.1. $\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ kümesi, (Δx_{kl}) dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktaları kümesi olmak üzere, herhangi bir $c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ve $\forall \xi \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ için $\|\xi - c\| \leq r$ sağlanır.

İspat. $c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ve $\|\xi - c\| > r$ koşulunu sağlayan $\xi \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ alalım. $\varepsilon := \frac{\|\xi - c\| - r}{3}$ olarak seçelim. Buradan,

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| < \varepsilon\}$$

yazılır. $c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ olduğundan

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| < \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

ele edilir. Bu ise $\xi \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olması ile çelişir.

Teorem 3.7. (Δx_{kl}) dizisinin ξ ye istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi)$ olmasıdır.

İspat. $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi) \neq \emptyset$ olduğundan Teorem 3.2 den (Δx_{kl}) dizisinin sınırlı olduğu söylenebilir. (Δx_{kl}) dizisi ξ den başka ξ' yığılma noktasına sahip olsun. Bu durumda

$$\bar{\xi} := \xi + \frac{r}{\|\xi - \xi'\|}(\xi - \xi')$$

noktası

$$\left\|\bar{\xi} - \xi'\right\| = \left(\frac{r}{\|\xi - \xi'\|} + 1\right)\|\xi - \xi'\| = r + \|\xi - \xi'\| > r$$

ifadesini sağlar.

$\bar{\xi}$ noktası (Δx_{kl}) dizisinin bir yığılma noktası olduğundan, Lemma 3.1 den $\bar{\xi} \notin st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ sağlanır. Bu ise $\left\|\bar{\xi} - \xi\right\| = r$ ve $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla ξ (Δx_{kl}) dizisinin tek yığılma noktasıdır. Fonksiyonel analiz de bilinen "İstatistiksel sınırlı dizinin istatistiksel yığılma noktası tekse dizi bu yığılma noktasına yakınsaktır" teoreminden (Δx_{kl}) dizisinin ξ ye istatistiksel yakınsak olduğu söylenir.

Teorem 3.8. $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ mutlak konveks uzay, (Δx_{kl}) bir dizi olsun. Eğer $\|y_1 - y_2\| = 2r$ koşulunu sağlayan şekilde $y_1, y_2 \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ varsa (Δx_{kl}) dizisi $\frac{y_1+y_2}{2}$ ye istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $p \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ olsun. $y_1, y_2 \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ noktaları Lemma 3.1'den, $\|y_1 - p\| \leq r$ ve $\|y_2 - p\| \leq r$ koşulunu sağlar. Bununla birlikte

$$2r = \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - p\| + \|y_2 - p\|$$

olur. $\|y_1 - p\| \leq r$, $\|y_2 - p\| \leq r$ ve $2r = \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - p\| + \|y_2 - p\|$ birlikte düşünüldüğünde $\|y_1 - p\| = r$ ve $\|y_2 - p\| = r$ elde edilir.

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) \leq \frac{1}{2}[(p - y_1) - (y_2 - p)]$$

ve $\|y_1 - y_2\| = 2r$ olduğundan $\left\|\frac{1}{2}(y_2 - y_1)\right\| = r$ olur. Uzayın mutlak konveks oluşu ve $\frac{1}{2}(y_2 - y_1) \leq \frac{1}{2}[(p - y_1) - (y_2 - p)]$ eşitsizliği gereğince $\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = (p - y_1) = (y_2 - p)$ olur ve $p = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ elde edilir. Bununla birlikte p noktası (Δx_{kl}) dizisinin tek istatistiksel yığılma noktası olur. Aynı zamanda $y_1, y_2 \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ verildiğinden $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olur. Teorem 3.2 den dolayı (Δx_{kl}) dizisi istatistiksel sınırlıdır. Böylece (Δx_{kl}) dizisi istatistiksel yakınsaktır. Sonuç olarak $st_2 - lim(\Delta x_{kl}) = \frac{y_1+y_2}{2}$ elde edilir.

Teorem 3.9.

i) $c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ise $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq \bar{B}_r(c)$ sağlanır.

ii) $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bigcap_{c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}} \bar{B}_r(c) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi)\}$ sağlanır.

İspat. i) $\xi \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ ve $c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ olarak alınsın. Lemma 3.1 gereğince $\|\xi - c\| \leq r$ olur. Aksi takdirde $\varepsilon := \frac{\|\xi - c\| - r}{3}$ için

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir. Bu ise $\xi \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olması ile çelişir.

ii) (i) şıkkından $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq \bar{B}_r(c)$ olduğu açıktır. Eğer $\bar{B}_r(c) \subseteq st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. $y \in \bigcap_{c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}} \bar{B}_r(c)$ elemanı alınsın. Buradan $\forall$ c $\in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ için $\|y - c\| \leq$ r elde edilir. Bu ise $\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(c)$ ifadesine eşittir. Böylece

$$\bigcap_{c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}} \bar{B}_r(c) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi) \right\}$$

olur. Şimdi $y \notin st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olsun. Bu durumda

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Böylece (Δx_{kl}) dizisinin $\|y - c\| \geq r + \varepsilon$ yani $\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \nsubseteq \bar{B}_r(\xi)$ ve $y \notin \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi) \right\}$ şartını sağlayan bir c istatistiksel yığılma noktası vardır. Dolayısıyla $y \in \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi)\}$ ifadesinden $y \in st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ elde edilir. Sonuç olarak $\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi)\} \subseteq st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.10. (Δx_{kl}) dizisi istatistiksel sınırlı olsun. Eğer $r = diam\left(\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}\right)$ ise, $\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ sağlanır.

İspat. $c \notin st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ alalım. Bu durumda

$$d(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - c\| \geq r + \varepsilon'\}) \neq 0$$

olur. (Δx_{kl}) istatistiksel sınırlı bir dizi ve

$$(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - c\| \geq r + \varepsilon'\}) \neq 0$$

olduğundan $\bar{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$ alındığında $\|c - c'\| \geq r + \bar{\varepsilon}$ koşulunu sağlayacak şekilde bir c' yığılma noktası vardır. Buradan $diam\left(\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}\right) > r + \bar{\varepsilon}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.11. (Δx_{kl}) çift dizisi sınırlıdır o zaman negatif olmayan $r \geq 0$ bir reel sayı vardır öyle ki $st_2 - LIM^r(\Delta r_{kl}) \neq \emptyset$ olur.

İspat. (Δx_{kl}) sınırlı bir çift dizi olsun. O zaman K pozitif reel sayısı vardır öyle ki, tüm $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\|\Delta x_{kl}\| < K$ dir. O zaman $0 \in LIM^K(\Delta x_{kl})$ ve yani $LIM^K(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ den sonuç olarak $st_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ elde edilir.

BÖLÜM 4

ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİLERİNİN KABA İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde çift indisli fark dizileri için kaba I_2-yakınsaklık ve kaba I_2-istatistiksel yakınsaklık tanımları verilecek ve önemli sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 4.1. (Δx_{kl}), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\} \in I_2$$

ise (Δx_{kl}) dizisine ξ'ye kaba I_2-yakınsaktır ($r - I_2$ yakınsaktır) denir ve $\Delta x \xrightarrow{r-I_2} \xi$ ile gösterilir.

Genel olarak bir dizinin kaba I_2-limiti $r > 0$ kabalık derecesi tek olmayabilir. $(\Delta x_{kl})'$nin tüm kaba I_2-limiti kümesi

$$I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \{\xi \in X : \Delta x \xrightarrow{r-I_2} \xi\}$$

ile gösterilir.

Eğer $I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ ise (Δx_{kl}) dizisine kaba I_2-yakınsaktır denir.

$$I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = [I_2 - \limsup(\Delta x_{kl}) - r, I_2 - liminf(\Delta x_{kl}) + r]$$

biçimindedir.

$LIM^r(\Delta x_{kl}) = \emptyset$ ise (Δx_{kl}) dizisinin sınırsız olduğu biliniyor. Fakat böyle bir dizi $r - I_2$ yakınsak olabilir (Kişi, 2020).

Örnek 4.1. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal, $A \in I_2$ olacak biçimde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}'$nin sonsuz bir alt kümesi olsun.

$$(\Delta x_{kl}) = \begin{cases} (-1)^{k+l}, & eğer\ (k,l) \notin A\ ise \\ kl, & eğer\ (k,l) \in A\ ise \end{cases}$$

ise

$$I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{eğer } r < 1 \\ [1-r, r-1], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve tüm $r > 0$ için $LIM^r(\Delta x_{kl}) = \emptyset$ olur. Bu örnekte görüldüğü üzere, $I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olmasının $LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olmasını gerektirmez. Ancak, eğer I_2 uygun ideal ise tersi her zaman doğrudur. Yani I_2 uygun ideal olması durumunda $LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ sağlanır.

Tanım 4.2. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal olsun. $c \in \mathbb{R}$ elemanının (Δx_{kl})'nın bir I_2-yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli şart $\forall \varepsilon > 0$ için $\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| < \varepsilon\} \notin I_2$ sağlamasıdır. (Δx_{kl})'nın tüm yığılma noktaları kümesi $(I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ile gösterilir (Kişi, 2020).

Tanım 4.3. (Δx_{kl}) dizisi için, eğer

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl}\| \geq M\} \in I_2$$

sağlayacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa (Δx_{kl}) dizisine I_2-sınırlıdır denir (Kişi, 2020).

Teorem 4.1. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal (Δx_{kl}) I_2-sınırlı bir dizi olsun. Eğer $r \geq diam\left((I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}\right)$ ise, bu durumda $(I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq I_2 - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl})$ olur (Kişi, 2020).

İspat. $c \notin I_2 - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl})$ olsun. Buradan

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| \geq r + \varepsilon\} \notin I_2$$

sağlayan en az bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur. (Δx_{kl}) I_2-sınırlı bir dizi olduğundan ve $\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| \geq r + \varepsilon\} \notin I_2$ eşitsizliğinden, $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ olarak alınırsa

$$\|c - c'\| > r + \varepsilon'$$

olacak biçimde bir c' I_2-yığılma noktası vardır. Dolayısıyla

$$diam\left((I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}\right) > r + \varepsilon'$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Bu teoremin tersi de doğrudur. Eğer $(I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ ise $r \geq diam\left((I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}\right)$ sağlanır.

Teorem 4.2. Eğer $I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ ise bu durumda

$$I_2 - liminf(\Delta x_{kl}), I_2 - limsup(\Delta x_{kl}) \in I_2 - LIM^{2r}(\Delta x_{kl})$$

sağlanır.

İspat: $I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olduğundan, (Δx_{kl}) I_2-sınırlıdır. $I_2 - liminf(\Delta x_{kl})$ sayısı, (Δx_{kl})'in bir I_2-yığılma noktasıdır. Dolayısıyla her $\xi \in I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ için,

$$\left\|\xi - \left(I_2 - liminf(\Delta x_{kl})\right)\right\| \leq r$$

elde edilir.

$$P = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon \|\xi - \Delta x_{kl}\| \geq r + \varepsilon\}$$

tanımlansın. Eğer $(k,l) \notin P$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\|\Delta x_{kl} - \left(I_2 - liminf(\Delta x_{kl})\right)\right\| &\leq \|\Delta x_{kl} - \xi\| + \left\|\xi - \left(I_2 - liminf(\Delta x_{kl})\right)\right\| < r + r + \varepsilon \\ &< 2r + \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Böylece $I_2 - liminf(\Delta x_{kl}) \in I_2 - LIM^{2r}(\Delta x_{kl})$ elde edilir. Benzer şekilde $I_2 - limsup(\Delta x_{kl}) \in I_2 - LIM^{2r}(\Delta x_{kl})$ olduğu da görülebilir.

Bir (Δx_{kl}) dizisinin çekirdeğinin $[liminf(\Delta x_{kl}), \limsup(\Delta x_{kl})]$ olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla

$$I_2 - core(\Delta x_{kl}) = [I_2 - liminf(\Delta x_{kl}), I_2 - \limsup(\Delta x_{kl})]$$

olarak belirtilir.

Sonuç 4.1. (Δx_{kl}) dizisi için $I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ ise bu durumda

$$I_2 - core\{\Delta x_{kl}\} \subseteq I_2 - LIM^{2r}(\Delta x_{kl})$$

sağlanır.

Önerme 4.1. (Δx_{kl}) çift indisli bir fark dizisi olsun. Bu durumda, $I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}$'in çapının yani $diam(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\})$'nin r sayısına eşit olması için gerek ve yeter koşul $I_2 - core\{\Delta x_{kl}\} = I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olmasıdır.

İspat. (Δx_{kl}) çift indisli bir fark dizisi olsun. Böylece

$$diam(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}) = r \Leftrightarrow \left(I_2 - limsup(\Delta x_{kl})\right) - \left(I_2 - liminf(\Delta x_{kl})\right) = r$$

$$\Leftrightarrow I_2 - core\{\Delta x_{kl}\} = [I_2 - limsup(\Delta x_{kl}), I_2 - liminf(\Delta x_{kl})]$$

$$= [I_2 - limsup(\Delta x_{kl}) - r, I_2 - liminf(\Delta x_{kl}) + r] = I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$$

olur. Buradan

a) $r > diam(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}) \Leftrightarrow I_2 - core\{\Delta x_{kl}\} \subseteq I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl})$

b) $r < diam(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}) \Leftrightarrow I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}$

sağlanır.

Önerme 4.2. Eğer

$$\bar{r} = inf\{r \geq 0: I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset\}$$

ise bu durumda

$$\bar{r} = radius(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\})$$

geçerlidir.

İspat. Eğer $I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}$ kümesi, tek nokta kümesi ise

$$radius(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}) = 0$$

olur ve dizi I_2-yakınsaktır, yani $I_2 - LIM^0(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ bulunur. Dolayısıyla

$$\bar{r} = radius(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}) = 0$$

yazılır.

Şimdi $I_2 - core\{\Delta x_{kl}\}$ kümesi tek nokta kümesi olmasın. $I_2 - liminf(\Delta x_{kl}) = p$ ve $I_2 - limsup(\Delta x_{kl}) = q$ olmak üzere $I_2 - core\{\Delta x_{kl}\} = [p, q]$ olarak yazılabilir. $\bar{r} \neq radius(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\})$ olsun. Eğer $\bar{r} < radius(I_2 - core\{\Delta x_{kl}\})$ ise bu durumda $\bar{\varepsilon} := \frac{1}{3}\left(\frac{q-p}{2} - \bar{r}\right)$ tanımlansın. $\bar{r}$ tanımından $I_2 - LIM^{\bar{r}+\bar{\varepsilon}}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ bulunur. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq (\bar{r} + \bar{\varepsilon}) + \varepsilon\} \in I_2$$

olacak şekilde $\xi \in \mathbb{R}$ vardır. $\bar{r} + \bar{\varepsilon} < \frac{q-p}{2}$ olduğundan, bu p ve q nun tanımıyla çelişir.

Eğer $\bar{r} > radius(I_2 - \mathrm{core}\{\Delta \mathrm{x_{kl}}\})$ ise bu durumda $\bar{\varepsilon} := \frac{1}{3}\left(\bar{r} - \frac{q-p}{2}\right)$ ve $r' = \bar{r} - 2\bar{\varepsilon}$ tanımlansın. $0 \leq r' < \bar{r}$ olduğu açıktır. bu p ve q'nun tanımıyla $\frac{q-p}{2}$ sayısı $I_2 - LIM^{r'}(\Delta x_{kl})$ dedir. Bu durumda,

$$r' \in \{r \geq 0: I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset\}$$

bulunur ki bu $r' < \bar{r}$ iken

$$\bar{r} = inf\{r \geq 0: I_2 - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset\}$$

eşitliği ile çelişir.

Önerme 4.1 ve Önerme 4.2 den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2. Bir (Δx_{kl}) dizisi için

$$I_2 - core\{\Delta x_{kl}\} = I_2 - LIM^{\overline{2r}}(\Delta x_{kl})$$

kapsamı geçerlidir.

Tanım 4.4. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$A(\varepsilon, \delta) = \left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \in I_2$$

ise (Δx_{kl}) dizisine ξ'ye kaba I_2-istatistiksel yakınsaktır ($r - I_2$-istatistiksel yakınsaktır) denir ve $\Delta x_{kl} \xrightarrow{r-I_2-st} \xi$ ile gösterilir.

(Δy_{kl}) dizisi I_2-istatistiksel yakınsak ve ölçülemeyen veya tam olarak hesaplanamayan bir dizi ve (Δx_{kl}) da her k, l için $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl} \ \| \leq r$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda (Δx_{kl}) dizisinin I_2-istatistiksel yakınsaklığından emin değiliz. Ancak

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\}$$

$$\subseteq \left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon| \geq \delta\right\}$$

kapsamı geçerli olduğu için (Δx_{kl}) dizisi $r - I_2$-istatistiksel yakınsaktır.

Genel olarak bir dizinin kaba I_2-istatistiksel limiti r>0 kabalık derecesi tek olmayabilir. (Δx_{kl}) 'in tüm kaba I_2-istatistiksel limiti kümesi

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \{\xi \in X : \Delta x \xrightarrow{r-I_2-st} \xi\}$$

ile tanımlanır. Eğer $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq 0$ ise

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = [I_2 - st - limsup(\Delta x_{kl}) - r, I_2 - st - liminf(\Delta x_{kl}) + r]$$

yazılır.

Tanım 4.5. Herhangi bir $\delta > 0$ sayısı için

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : \ \|\Delta x_{kl}\| > K\}| > \delta\right\} \in I_2$$

olacak şekilde bir $K > 0$ varsa (Δx_{kl}) dizisine I_2-istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 4.3. Sonlu boyutlu $(X, \|.\|)$ normlu uzayında (Δx_{kl}) dizisi için

$$diam(I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})) \le 2r$$

geçerlidir. Gerçekten eğer (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye kaba I_2-istatistiksel yakınsak ise, bu durumda

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \supseteq \bar{B}_r(\xi) = \{y \in X : \ \|y - \xi\| \le r\}$$

sağlanır. Böylece $diam\big(I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})\big) = 2r$ olur.

İspat. $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) > 2r$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $d = \|y - z\| > 2r$ koşulunu sağlayan $y, z \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ mevcuttur. $\varepsilon < \frac{d}{2} - r$ olarak alınsın.

$$A_1(\varepsilon,\delta) = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon\}$$

ve

$$A_2(\varepsilon,\delta) = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl} - z\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümeleri tanımlansın. Buradan

$$\frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)\}|$$

$$\leq \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta)\}|$$

$$+\frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in A_2(\varepsilon,\delta)\}|$$

yazılabileceğinden I_2-yakınsaklığın özelliğinden

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)\}|$$

$$\leq I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta)\}| + I_2$$

$$- \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in A_2(\varepsilon,\delta)\}| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall\delta > 0$ için

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \ (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)| \geq \delta\right\} \in I_2$$

bulunur. Şimdi

$$P = \left\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)| \ge \frac{1}{2}\right\}$$

tanımlansın. $P \in I_2$ olduğu açıktır. Şimdi ise $(n_0, m_0) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus P$ alınsın. Buradan

$$\frac{1}{n_0 m_0}|\{k \le n_0, l \le m_0 : (k,l) \in A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)| < \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{n_0 m_0}|\{k \le n_0, l \le m_0 : (k,l) \notin A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)| \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir ki $\{(k,l): (k,l) \notin A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)\}$ boş kümeden farklı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi ise $(k_0, l_0) \notin A_1(\varepsilon,\delta) \cup A_2(\varepsilon,\delta)$ sağlayan $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ seçilsin. Buradan $(k_0, l_0) \in A_1^c(\varepsilon,\delta) \cap A_2^c(\varepsilon,\delta)$ olur ve böylece $\|\Delta x_{k_0 l_0} - y\| < r + \varepsilon$ ve $\|\Delta x_{k_0 l_0} - z\| < r + \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\|y - z\| \le \|\Delta x_{k_0 l_0} - y\| + \|\Delta x_{k_0 l_0} - z\| < 2(r+\varepsilon) < \|y - z\|$$

yazılabilir. Bu ise çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla

$$diam\left(I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})\right) \le 2r$$

olmalıdır.

Teoremin ikinci kısmını ispatını için $\Delta x_{kl} \xrightarrow{I_2 - st} \xi$ sağlayan bir (Δx_{kl}) dizisi alalım. I_2-istatistiksel yakınsaklık tanımından her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$A(\varepsilon,\delta) = \left\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \ge \varepsilon| \ge \delta\right\} \in I_2$$

sağlanır.

Eğer $(n,m) \notin A(\varepsilon,\delta)$ ise

$$\frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon| < \delta,$$

yani

$$\frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| < \varepsilon| \geq 1 - \delta$$

elde edilir.

Şimdi, herhangi bir

$$\forall y \in \bar{B}_r(\xi) = \{y \in X : \|y - \xi\| \leq r\}$$

için

$$\|\Delta x_{kl} - y\| \leq \|\Delta x_{kl} - \xi\| + \|\xi - y\| \leq \|\Delta x_{kl} - \xi\| + r < r + \varepsilon$$

bulunur. Şimdi

$$B_{kl} = \{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}$$

tanımlansın. $(k,l) \in B_{kl}$ için $\|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon$ elde edilir. Böylece

$$B_{kl} \subseteq \{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon\}$$

bulunur. Bu ise

$$\frac{|B_{kl}|}{kl} \leq \frac{1}{kl}|\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon\}|$$

yani

$$\frac{1}{kl}|\{k \leq n, l \leq m \colon \|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon\}| \geq 1 - \delta$$

anlamına gelir. Böylece $\forall (n, m) \notin A(\varepsilon, \delta)$ için,

$$\frac{1}{kl}|\{k \leq n, l \leq m \colon \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon\}| < 1 - (1 - \delta) = \delta$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \subseteq A(\varepsilon, \delta)$$

bulunur. $A(\varepsilon, \delta) \in I_2$ olduğundan

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \in I_2$$

elde edilir. Bu ise $y \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}r(\xi)$ elde edilir. Bu ise $diam(I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}))$ kümesinin çapının 2r olduğunu ve bundan daha fazla azalamayacağını gösterir.

Sınırlı bir (Δx_{kl}) dizisi için $LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ sağlanır. $LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olması $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olmasını gerektirdiği için, bu sonuç, I_2 uygun ideali iken $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ içinde doğrudur. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 4.4. (Δx_{kl}) dizisinin I_2-istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olacak şekilde negatif olmayan $r > 0$ sayısının var olmasıdır. Aynı zaman da $r > 0$ için I_2-istatistiksel sınırlı olan (Δx_{kl}) dizisinin her zaman $I_2 - st - LIM^{\left(\Delta x_{k_p l_r}\right), r} \Delta x_{k_p l_r} \neq \emptyset$ sağlayan $\left(\Delta x_{k_p l_r}\right)$ alt dizisi vardır.

İspat. (Δx_{kl}) dizisi I_2-istatistiksel sınırlı olsun. Tanımdan

$$P = \left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl}\| > K| > \delta\right\} \in I_2$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır.

$$\bar{r} = \sup \{\Delta x_{kl}: (k,l) \in M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash P \}$$

olsun.

$I_2 - st - LIM^{\bar{r}}(\Delta x_{kl})$ kümesi X' in orijinini içerir. Dolayısıyla $I_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ elde edilir.

Tersine $r > 0$ için $I_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\xi \in \mathrm{I}_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl})$ alınsın. Yani her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \in I_2$$

yazılır. Bu ise (Δx_{kl}) dizisinin I_2-istatistiksel sınırlı olduğunu gösterir.

(Δx_{kl}), sonlu boyutlu normlu uzayda I_2-istatistiksel sınırlı olduğu için, bu dizi I_2-istatistiksel yakınsak $\left(\Delta x_{k_p l_r}\right)$ alt dizisini içerir. ξ, bu dizinin I_2-istatistiksel limit noktası olsun, bu durumda

$$\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{r}}(\,\xi) = I_2 - st - LIM^{r}\left(\Delta x_{k_p l_r}\right)$$

olur ve $r > 0$ için $I_2 - st - LIM^{\left(\Delta x_{k_p l_r}\right),r} \Delta x_{k_p l_r} \neq \emptyset$ elde edilir.

Teorem 4.5. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal olsun. Eğer $\left(\Delta x_{k_p l_r}\right)$, (Δx_{kl}) dizisi

$$I_2 - \lim_{n,m \to \infty} \frac{1}{nm} \left|\left\{k_p \leq n, l_r \leq m : (p,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}\right| = 1$$

koşulunu sağlayan bir alt dizisi ise bu durumda

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq I_2 - st - LIM^r\left(\Delta x_{k_p l_r}\right)$$

geçerlidir.

İspat. $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ alınsın. $\forall \varepsilon > 0$ için $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğundan

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}| = 0$$

veya

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}| = 1$$

elde edilir. Teoremde verilen koşuldan

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\left\{k_p \leq n, l_r \leq m : (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}\right| = 1$$

yazılır. $A = \left\{k_p, l_r : (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}$ olsun.

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\left\{k_p \leq n, l_r \leq m : (p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}\right| = 1$$

olmasından $d_{I_2}(A) = 1$ ve dolayısıyla $d_{I_2}\left((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus A\right) = 0$ bulunur. Böylece

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}| = 1$$

ifadesinden

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \left|\left\{k_p \leq n, l_r \leq m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| < r + \varepsilon\right\}\right| = 1$$

elde edilir. Buradan

$$1 \geq \frac{1}{nm}\left|\left\{p \leq n, r \leq m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| < r + \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{nm}\left|\left\{k_p \leq k_n, l_r \leq l_m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| < r + \varepsilon\right\}\right|$$

veya

$$\frac{1}{nm}\left|\left\{k_p \leq k_n, l_r \leq l_m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| < r + \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{1}{nm}\left|\left\{k_p \leq n, l_r \leq m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| < r + \varepsilon\right\}\right|$$

olur. I_2-yakınsaklığın özelliğinden

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm}\left|\left\{p \leq n, r \leq m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| < r + \varepsilon\right\}\right| = 1$$

ve böylece

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm}\left|\left\{p \leq n, r \leq m : \left\|\Delta x_{k_p l_r} - \xi\right\| \geq r + \varepsilon\right\}\right| = 0$$

yazılır. Sonuç olarak $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{k_p l_r})$ elde edilir. Buradan

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq I_2 - st - LIM^r\left(\Delta x_{k_p l_r}\right)$$

gösterilmiş olur.

Şimdi ise çift indisli bir fark dizisinin kaba I_2-istatistiksel limit kümesinin topolojik ve geometrik özelliklerini verelim.

Teorem 4.6. Bir (Δx_{kl}) dizisinin $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ kümesi kapalıdır.

İspat. Eğer $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \emptyset$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Varsayalım ki $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\Delta y_{kl} \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ ve $k, l \to \infty$ iken $\Delta y_{kl} \to y$ olsun. $\forall k > k_{\frac{\varepsilon}{2}}, l > l_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için $\|\Delta y_{kl} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_{\frac{\varepsilon}{2}}, l_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ vardır. $k_0 > k_{\frac{\varepsilon}{2}}, l_0 > l_{\frac{\varepsilon}{2}}$ sağlayan $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ alınsın. Dolayısıyla $\left\|\Delta y_{k_0 l_0} - y\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılır. Diğer taraftan $\Delta y_{k_0 l_0} \subseteq I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğundan $y_{k_0 l_0} \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ elde edilir. Böylece

$$A = \left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}\left|\{k \leq n, l \leq m : \left\|\Delta x_{kl} - y_{k_0 l_0}\right\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right| \geq \delta\right\} \in I_2$$

elde edilir. I_2 uygun ideal olduğundan $M = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus A$ boş kümeden farklıdır. $(n,m) \in M$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{nm}\left|\left\{k \leq n, l \leq m : \left\|\Delta x_{kl} - y_{k_0 l_0}\right\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \delta$$

yani

$$\frac{1}{nm}\left|\left\{k \leq n, l \leq m : \left\|\Delta x_{kl} - y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq 1 - \delta$$

$e$lde edilir.

$$B_{nm} = \left\{k \leq n, l \leq m : \left\|\Delta x_{kl} - y_{k_0 l_0}\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olarak alınsın. Böylece $(k,l) \in B_{nm}$ için,

$$\|\Delta x_{kl} - y\| \leq \left\|\Delta x_{kl} - y_{k_0 l_0}\right\| + \left\|y_{k_0 l_0} - y\right\| < r + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = r + \varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$B_{nm} \subseteq \{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon\}$$

ve

$$1 - \delta \leq \frac{|B_{nm}|}{nm} \leq \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - y\| < r + \varepsilon\}|$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon\}| < 1 - (1 - \delta) = \delta$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \subseteq A \in I_2$$

bulunur. Böylece $y \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ ve buradan $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ kapalı bir küme olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 4.7. (Δx_{kl}) dizisinin $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ kümesi konvekstir.

İspat. $y_0, y_1 \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ ve $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ alınsın.

$$A_0(\varepsilon, \delta) := \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - y_0\| \geq r + \varepsilon\}$$

ve

$$A_1(\varepsilon, \delta) := \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - y_1\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümeleri tanımlansın. $\delta > 0$ için

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : (k, l) \in A_0(\varepsilon, \delta) \cup A_1(\varepsilon, \delta)\}| \geq \delta\right\} \in I_2$$

elde edilir. $0 < 1 - \delta_1 < \delta$ sağlayan $\delta_1 \in (0,1)$ seçilsin.

$$A(\varepsilon,\delta) := \left\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m :\ (k,l) \in A_0(\varepsilon,\delta) \cup A_1(\varepsilon,\delta)| \ge 1-\delta_1\right\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $A(\varepsilon,\delta) \in I_2$ olur. Şimdi $(n,m) \notin A(\varepsilon,\delta)$ için

$$\frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : (k,l) \in A_0(\varepsilon,\delta) \cup A_1(\varepsilon,\delta)\}| < 1-\delta_1$$

ve

$$\frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : (k,l) \notin A_0(\varepsilon,\delta) \cup A_1(\varepsilon,\delta)\}| \ge 1-(1-\delta_1) = \delta_1$$

elde edilir. Böylece $\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (k,l) \notin A_0(\varepsilon,\delta) \cup A_1(\varepsilon,\delta)\}$ boş kümeden farklıdır. $(k_0,l_0) \in A_0^c(\varepsilon,\delta) \cap A_1^c(\varepsilon,\delta)$ ve $\lambda \in [0,1]$ alınsın. Bu durumda

$$\left\|\Delta x_{k_0 l_0} - (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1\right\| \le (1-\lambda)\left\|\Delta x_{k_0 l_0} - y_0\right\| + \lambda\left\|\Delta x_{k_0 l_0} - y_1\right\|$$

$$< (1-\lambda)(r+\varepsilon) + \lambda(r+\varepsilon) < r+\varepsilon$$

elde edilir.

$$B = \{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - [(1-\lambda)]y_0 + \lambda y_1\| \ge r+\varepsilon\}$$

şeklinde bir B kümesi tanımlansın. Buradan $A_0^c(\varepsilon,\delta) \cap A_1^c(\varepsilon,\delta) \subseteq B^c$ açıktır. Dolayısıyla $(n,m) \notin A$ için,

$$\delta_1 \le \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : (k,l) \notin A_0(\varepsilon,\delta) \cup A_1(\varepsilon,\delta)\}|$$

$$\le \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m : (k,l) \notin B\}|$$

elde edilir. Bu ise

$$\frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : (k,l) \in B\}| < 1 - \delta_1 < \delta$$

olması demektir. Sonuç olarak

$$A^c \subseteq \left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m :\ (k,l) \in B\}| < \delta\right\}$$

yazılır. $A^c \in \mathcal{F}(I_2)$ olduğundan,

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m :\ (k,l) \in B\}| < \delta\right\} \in \mathcal{F}(I_2)$$

ve

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m :\ (k,l) \in B\}| \geq \delta\right\} \in I_2$$

bulunur. İspat tamamlanır.

Teorem 4.8. $r > 0$ olsun. Bu durumda (Δx_{kl}) dizisinin ξ' ye $r - I_2$ istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $I_2 - st - lim\Delta y_{kl} = \xi$ ve $\forall(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\| \leq r$ olacak şekilde bir (Δy_{kl}) dizisinin var olmasıdır.

İspat. (Δy_{kl}), ξ noktasına I_2-istatistiksel yakınsak ve $\forall(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\| \leq r$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Dolayısıyla $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall\delta > 0$ için

$$A(\varepsilon,\delta) := \left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m :\ \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in I_2$$

yazılır. $(n,m) \notin A(\varepsilon,\delta)$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m :\ \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}| < \delta,$$

$$\frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta y_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}| \ge 1 - \delta$$

bulunur.

$$B_{nm} = \{k \le n, l \le m:\ \|\Delta y_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}$$

olacak şekilde bir B_{nm} kümesi tanımlansın. Buradan $(k,l) \in B_{nm}$ için

$$\|\Delta x_{kl} - \xi\| = \|\Delta x_{kl} - \Delta y_{kl}\| + \|\Delta y_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla

$$B_{nm} \subseteq \{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \frac{|B_{nm}|}{nm} \le \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}| \ge 1 - \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \ge r + \varepsilon\}| < 1 - (1 - \delta) = \delta$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \ge r + \varepsilon\}| \ge \delta\right\} \subseteq A(\varepsilon, \delta)$$

olur. $A(\varepsilon,\delta) \in I_2$ olduğundan

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \ge r + \varepsilon\}| \ge \delta\right\} \in I_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Delta x_{kl} \xrightarrow{r-I_2-st} \xi$ olduğu ispatlanır.

Tersine $\Delta x_{kl} \xrightarrow{r-I_2-st} \xi$ olsun. Buradan, $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall\delta > 0$ için

$$A(\varepsilon,\delta) = \left\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \ge r + \varepsilon\}| \ge \delta\right\} \in I_2$$

yazılır. $(n,m) \notin A(\varepsilon,\delta)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \ge r + \varepsilon\}| < \delta,$$

$$\frac{1}{nm}|\{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}| \ge 1 - \delta$$

elde edilir.

$$B_{nm} = \{k \le n, l \le m:\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon\}$$

alınsın. Şimdi

$$\Delta y_{kl} := \begin{cases} \xi, & \text{eğer } \|\Delta x_{kl} - \xi\| \le r \text{ ise,} \\ \Delta x_{kl} + r\dfrac{\xi - \Delta x_{kl}}{\|\Delta x_{kl} - \xi\|}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde (Δy_{kl}) dizisi tanımlansın. Buradan

$$\|\Delta y_{kl} - \Delta x_{kl}\| = \begin{cases} \|\xi - \Delta x_{kl}\| \le r, & \text{eğer } \|\Delta x_{kl} - \xi\| \le r \text{ ise} \\ r, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\|\Delta y_{kl} - \xi\| = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \|\Delta x_{kl} - \xi\| \le r \text{ ise} \\ \|\Delta x_{kl} - \xi\| - r, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

yazılabilir. $(k,l) \in B_{nm}$ alınsın. Bu durumda

$$\|\Delta y_{kl} - \xi\| = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \|\Delta x_{kl} - \xi\| \le r \text{ ise} \\ < \varepsilon, & \text{eğer } r < \|\Delta x_{kl} - \xi\| < r + \varepsilon \text{ ise} \end{cases}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$B_{nm} \subseteq \{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta y_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \frac{|B_{nm}|}{nm} \leq \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta y_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|y_{kl} - \xi\| < \varepsilon\}| \geq 1 - \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}| < 1 - (1 - \delta) = \delta$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \subseteq A(\varepsilon, \delta)$$

olur. $A(\varepsilon, \delta) \in I_2$ olduğundan

$$\left\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta y_{kl} - \xi\| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in I_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Delta y_{kl} \xrightarrow{I_2-st} \xi$ olduğu ispatlanır.

Tanım 4.6. Her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için eğer

$$d_{I_2}(\{(k, l): \|\Delta x_{kl} - \mathrm{c}\| < \varepsilon\}) \neq 0$$

sağlıyorsa $c \in X$ elemanına (Δx_{kl}) dizisinin I_2-istatistiksel yığılma noktası denir. Burada

$$d_{I_2}(A) = I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : (k, l) \in A\}|$$

şeklinde ifade edilir.

(Δx_{kl}) dizisinin tüm I_2-istatistiksel yığılma noktalarını kümesini $I_2 - S(\Gamma_{(\Delta x_{kl})})$ olarak göstereceğiz.

Teorem 4.9. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal olsun. Bir (Δx_{kl}) dizisinin keyfi bir $c \in I_2 - S(\Gamma_{(\Delta x_{kl})})$ ve her $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ için $\|\xi - c\| \leq r$ geçerlidir.

İspat. Tersini kabul edelim. $\|\xi - c\| > r$ olacak şekilde $c \in I_2 - S(\Gamma_{(\Delta x_{kl})})$ ve $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olsun. $\varepsilon := \frac{\|\xi - c\| - r}{2}$ şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| < \varepsilon\}$$

yazılır. $c \in I_2 - S(\Gamma_{(\Delta x_{kl})})$ olduğundan

$$d_{I_2}(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| < \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir.

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - c\| < \varepsilon\}$$

kapsama ilişkisinden

$$d_{I_2}(\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

bulunur. Bu ise $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olması ile çelişir. $\|\xi - c\| \leq r$ olmalıdır.

Teorem 4.10. (Δx_{kl}) dizisinin I_2-istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ sağlayan negatif olmayan $r > 0$ reel sayısının olmasıdır.

İspat. (Δx_{kl}) dizisi I_2-istatistiksel sınırlı olsun. Bu durumda $\delta > 0$ için

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl}\| > K\}| > \delta\right\} \in I_2$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır.

$$P = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\Delta x_{kl}\| > K\}$$

olsun. Bu durumda

$$I_2 - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ (k,l) \in P\}| = 0$$

bulunur.

$$r' = sup\{\|\Delta x_{kl}\| : (k,l) \in P^c\}$$

olarak tanımlansın. Buradan $I_2 - st - LIM^{r'}(\Delta x_{kl})$ orijini içerir. Böylece $r = r'$ için $I_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ elde edilir.

Tersine $r > 0$ için $I_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\xi \in I_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl})$ alınsın. $\varepsilon := \|\xi\|$ olarak alınsın. Bu durumda, her bir $\delta > 0$ için,

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in I_2$$

yazılır. $K = r + 2\|\xi\|$ olarak alınırsa

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{nm} |\{k \leq n, l \leq m : \ \|\Delta x_{kl}\| > K\}| > \delta\right\} \in I_2$$

elde edilir. Sonuç olarak (Δx_{kl}) I_2-istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 4.11. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal olsun. Bir (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye I_2-istatistiksel yakınsaklıktır ancak ve ancak

$$I_2 - st - LIM^{r}(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi)$$

geçerli olmasıdır.

İspat. (Δx_{kl}) dizisi ξ'ye I_2-istatistiksel yakınsaklık olduğundan

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi)$$

elde edilir. $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda (Δx_{kl}) dizisi I_2-istatistiksel sınırlıdır. Aksine olarak kabul edelim ki, (Δx_{kl}) dizisi ξ noktasından başka ξ' I_2-istatistiksel yığılma noktasına sahip olsun. Bu durumda

$$\bar{\xi} := \xi + \frac{r}{\|\xi - \xi'\|}(\xi - \xi')$$

noktası için

$$\|\bar{\xi} - \xi'\| = \left(\frac{r}{\|\xi - \xi'\|} + 1\right)\|\xi - \xi'\| = r + \|\xi - \xi'\| > r$$

sağlanır. ξ', (Δx_{kl})'nin I_2-istatistiksel yığılma noktası olduğundan Teorem 4.9 ile $\bar{\xi}_* \notin I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olur. Bu

$$\|\bar{\xi} - \xi'\| = r \text{ ve } I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bar{B}_r(\xi)$$

olmasıyla çelişir. Böylece, ξ, sonlu boyutlu normlu bir uzayda sınırlı bir (Δx_{kl}) dizisinin tek yığılma noktasıdır. Dolayısıyla, (Δx_{kl}) dizisi ξ noktasına I_2-istatistiksel yakınsaktır.

$I_2 - st - lim(\Delta x_{kl}) = \xi$ olması $\|y_1 - y_2\| = 2r$ yi sağlayan $y_1, y_2 \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ nin var olduğunu kolayca görebiliriz. $LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olduğundan, $\|y_1 - y_2\| = 2r$ olacak şekildeki $y_1, y_2 \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ nin varlığı, (Δx_{kl}) dizisinin I_2-istatistiksel yakınsaklığı sağlamayacağı kolayca görülebilir.
Aşağıdaki sonuç bu durumla ilgilidir.

Sonuç 4.3. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal, $(X, \|.\|)$ kesin bir şekilde konveks bir uzay ise, X 'te (Δx_{kl}) çift dizisidir ve $\|y_1 - y_2\| = 2r$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in \mathrm{I}_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ varsa bu dizi $\frac{y_1+y_2}{2}$ ye kaba I_2 −istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.12. $I_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uygun ideal, (Δx_{kl}) bir fark dizisi olmak üzere

i) Eğer $c \in (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ise bu durumda

$$I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) \subseteq \bar{B}_r(c)$$

geçerlidir.

ii) $I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl}) = \bigcap_{c \in (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}} \bar{B}_r(c) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi)\}$

geçerlidir.

İspat. i) Eğer $c \in (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ ise bu durumda her $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ için $\|\xi - c\| \leq r$ elde edilir. Aksi takdirde $\varepsilon := \frac{\|\xi - c\| - r}{3}$ için

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - \xi\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \notin I_2$$

bulunur. c, (Δx_{kl}) dizisinin bir I_2-istatistiksel yığılma noktası olduğundan, bu $\xi \in I_2 - st - LIM^r(\Delta x_{kl})$ olmasıyla çelişir.

ii) (i) şıkkından şıkkı gereğince $I_2 - st - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl}) \subseteq \bar{B}_r(c)$ olduğu açıktır. Eğer $\bar{B}_r(c) \subseteq I_2 - st - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl})$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. $y \in \bigcap_{c \in \Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}} \bar{B}_r(c)$ elemanı alınsın. Buradan $c \in (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}$ için $\|y - c\| \leq r$ elde edilir. Bu ise $(I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(c)$ ifadesine eşittir. Böylece

$$\bigcap_{c \in (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})}} \bar{B}_r(c) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi)\right\}$$

olur. Şimdi $y \notin I_2 - st - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl})$ olsun. Bu durumda

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{nm}|\{k \leq n, l \leq m : \|\Delta x_{kl} - y\| \geq r + \varepsilon| \geq \delta\right\} \notin I_2$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Böylece (Δx_{kl}) dizisinin $\|y - c\| \geq r + \varepsilon$ yani

$(I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \nsubseteq \bar{B}_r(\xi)$ ve $y \notin \{\xi \in \mathbb{R}^n : (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \bar{B}_r(\xi)\}$ şartını sağlayan bir c istatistiksel yığılma noktası vardır. Dolayısıyla $y \in \{\xi \in \mathbb{R}^n : (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \overline{B}_r(\xi)\}$ ifadesinden $\xi \in I_2 - st - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl})$ elde edilir. Sonuç olarak $\{\xi \in \mathbb{R}^n : (I_2)\Gamma^2_{(\Delta x_{kl})} \subseteq \overline{B}_r(\xi)\} \subseteq I_2 - st - \mathrm{LIM}^r(\Delta x_{kl})$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında çift indisli fark dizileri olarak adlandırılan (Δx_{kl}) dizisi için kaba istatistiksel yakınsaklık, kaba ideal yakınsaklık ve kaba I_2-istatistiksel yakınsaklık kavramları çalışılmış ve kaba limit noktaları kümesinin topolojik ve cebirsel özellikleri ele alınmıştır.

Yapılacak yeni çalışmalarda, benzer özellikler

$$\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_k)$$

olmak üzere çift indisli fark dizileri içinde verilebilir. İleride yapılacak çalışmalarda farklı yakınsaklık türleri kullanılarak yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Aytar, S. (2008a). Rough Statistical Convergence. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29(3-4): 291-303.

Aytar, S. (2008b). The rough limit set and the core of a real sequence. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29(3-4): 283-290.

Başarır, M. (1995). On the Δ-Statistical convergence of sequences, *Fırat University Journal of Science and Engineering*, 7(2): 1-6.

Das, P., Kostyrko, P., Wilczynski, W. ve Malik, P. (2008a). I and I^*-convergence of double sequences. *Mathematica Slovaca*, 58(5): 605-620.

Das, P., Malik, P. (2008b). On extremal I-limit points of double sequences. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 40: 91-102.

Demir, N., Gümüş, H. (2020). Rough convergence for difference sequences. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2(8): 22-28.

Demir, N., Gümüş H., (2022). Rough statistical convergence for difference sequences. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 46(5): 733-742.

Dems, K. (2004). On I-Cauchy sequences. *Real Analysis Exchange*, 30: 123-128.

Dündar, E., Çakan C. (2014a). Rough I-convergence. *Gulf Journal of Mathematics*, 2(1): 45-51.

Dündar, E., Çakan, C. (2014b). Rough convergence of double sequences. *Demonstratio Mathematica*, 47(3): 638-651.

Dündar, E. (2016). On Rough I_2-convergence. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 37(4): 480-491.

Erdös P., Tenenbaum G. (1989). Sur les densites de certaines suites d'entiers. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 59(3): 438-438.

Et, M. (1993). On some difference sequence spaces. *Doğa-Tr Journal of Mathematics*, 17: 18-24.

Et, M., Çolak, R. (1995). On some generalized difference sequence spaces. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(4): 377-386.

Et, M., Nuray, F. (2001). Δ^m-statistical convergence. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 32(6): 961-969.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique. *Colloquium Mathematicum.* 2: 241-244.

Freedman, A. R., Sember, I. J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2): 293-305.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313.

Gümüş, H. Nuray, F. (2011). Δ^m-ideal convergence. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 12(2): 101-110.

Gürdal, M., Şahiner, A. (2008). Extremal *I*-limit points of double sequences. *Applied Mathematics E-Notes*, 8: 131-137.

Kızmaz, H. (1981). On certain sequence spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, 24(2): 169-176.

Kişi, Ö., Dündar, E. (2018). Rough I_2-lacunary statistical convergence of double sequences. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018:230: 16 pages.

Kişi, Ö. (2020). Rough ΔI_2-convergence of double difference sequences. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 20(2): 105-114.

Kişi, Ö., Ünal, H.K. (2020). Rough ΔI_2-statistical convergence of double difference sequences in normed linear spaces. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 12(1): 1-11.

Kişi Ö., Ünal, H.K. (2021). Rough statistical convergence of difference double sequences in normed linear spaces. *Honam Mathematical Journal*, 43(1): 47-58.

Kostyrko, P., Salát, T. ve Wilczyński W. (2000). *I*-convergence. *Real Analysis Exchange*, 26(2): 669-686.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salát T. ve Sleziak, M. (2005). *I*-convergence and extremal I-limit points. *Mathematica Slovaca*, 55: 443-464.

Kuratowski, C. (1958). *Topologie I*. PWN, Warszava.

Kumar, V. (2007). On I and I^*-convergence of double sequences, *Mathematical Communications*, 12: 171-181.

Maddox, I. J. (1988). Statistical convergence in a locally convex sequence space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 104: 141-145.

Malik, P., Maity, M. (2013). On rough convergence of double sequences in normed linear spaces. *Bulletin of the Allahabad Mathematical Society*, 28(1): 89-99.

Malik, P., Maity, M. (2016). On rough statistical convergence of double sequences in normed linear spaces. *Afrika Matematika*, 27: 141-148.

Miller, H. I. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(5): 1811-1819.

Nagata, J., (1974). *Modern General Topology*. North-Holland Publ., Comp., Amsterdam-London.

Niven, I., Zuckerman, H.S. (1980). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Fourth Ed., New York.

Özbek, S. (2016). *Kaba istatistiksel yakınsaklık ve kaba ideal yakınsaklık*. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 97 sayfa, Sivas

Pal, S.K., Chandra, D. ve Dutta, S. (2013). Rough ideal convergence. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 (6): 633-640.

Phu H. X. (2001) Rough convergence in normed linear spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 22: 199-222.

Phu, H. X. (2002). Rough continuity of linear operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 23: 139-146.

Phu, H. X. (2003). Rough convergence in infinite dimensional normed spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 24: 285-301.

Savaş, E., Das, P. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Applied Mathematics Letters*, 24: 826-830.

Savaş, E., Debnath, S., Rakshit, D., (2019). On *I*-statistically rough convergence. *Institut Mathematique Publications*, 105(119): 145-150.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, 66(5): 361-375.

Tripathy, B., Tripathy, B. C. (2005). On *I*-convergent double sequences. *Soochow Journal of Mathematics*, 31: 549-560.

Zygmund, A. (1979). *Trigonometric Series*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.