T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRADUAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ

NAGİHAN ÜSTÜNSOY

DANIŞMAN

DOÇ. DR. ÖMER KİŞİ

BARTIN-2024

T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRADUAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nagihan ÜSTÜNSOY

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman	:	Doç. Dr. Ömer KİŞİ
Üye	:	Doç. Dr. Emrah ALTUN
Üye	:	Doç. Dr. Melih GÖCEN

BARTIN-2024

KABUL VE ONAY

Nagihan ÜSTÜNSOY tarafından hazırlanan "GRADUAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ " başlıklı bu çalışma, 18.07.2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	……………
Üye	:	……………
Üye	:	……………

Bu tezin kabulü Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..…/..…/20… tarih ve 20…../…..-….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Sabri GÖK
Enstitü Müdürü

KABUL VE ONAY

Nagihan ÜSTÜNSOY tarafından hazırlanan “GRADUAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ ” başlıklı bu çalışma, 18.07.2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	……………
Üye	:	……………
Üye	:	……………

Bu tezin kabulü Lisansüstü Eğitimi Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ..…/..…/20… tarih ve 20…../…..-….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Sabri GÖK
Enstitü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Ömer KİŞİ danışmanlığında hazırlamış olduğum "GRADUAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ" başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ederim.

18.07.2024

Nagihan ÜSTÜNSOY

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca tecrübesiyle bana rehberlik eden, tez çalışmam süresince sabırla ve anlayışla yol gösteren, her konuda destek veren değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ömer KİŞİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

.

Nagihan ÜSTÜNSOY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRADUAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TÜRLERİ

Nagihan ÜSTÜNSOY

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın-2024, sayfa: 49

Bu çalışma, gradual 2-normlu lineer uzaylar (G2NLU) alanında gradual istatistiksel yakınsamanın incelenmesine odaklanmaktadır. Çalışmamız, gerçel sayı dizilerinin gradual istatistiksel yakınsamasına ilişkin belirli özelliklerin G2NLU içindeki dizilere genişlediğini ortaya koymaktadır. Ayrıca, G2NLU içinde gradual istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanıtmakta ve bu tür uzaylarda bir dizinin gradual istatistiksel Cauchy dizisi olarak nitelendirilmesi için kriterler belirlemekteyiz. Bu araştırma, G2NLU bağlamında gradual istatistiksel yakınsamanın derin bir anlayışına katkıda bulunmakta ve bu matematiksel çerçevedeki uygulanabilirliğini ve özgün özelliklerini ortaya koymaktadır.

Bu araştırma, gradual $\mathcal{J}$-yakınsama normlu uzaylar kavramını araştırmakta, gradual 2-norm kullanarak yeni dizi uzaylarını tanıtmakta ve incelemektedir. Ayrıca, G2NLU içinde gradual $\mathcal{J}$-yakınsaklık ve gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizileri kavramlarını ele almakta, bu sınıflar arasındaki ilişkiyi irdelemekte ve bu sınıflarla ilgili önemli bulgular sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gradual 2-normlu uzay, istatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOME TYPES OF CONVERGENCE IN GRADUAL 2-NORMAL SPACES

Nagihan ÜSTÜNSOY

Bartın University
Graduate School
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Dr. Ömer KİŞİ
Bartın-2024, pp: 49

This study focuses on investigating gradual statistical convergence in the context of gradual 2-normed linear spaces (G2NLS). Our research demonstrates that certain properties related to gradual statistical convergence of real number sequences extend to sequences within G2NLS. Additionally, we introduce the concept of gradual statistical Cauchy sequences in G2NLS and establish criteria for characterizing a sequence as a gradual statistical Cauchy sequence in such spaces. This research contributes to a deeper understanding of gradual statistical convergence in the G2NLS framework and elucidates its mathematical applicability and unique characteristics.

The study explores the concept of gradual $\mathcal{J}$-convergence normed spaces, introduces and examines new sequence spaces using the gradual 2-norm. Furthermore, it addresses the concepts of gradual $\mathcal{J}$-convergence and gradual $\mathcal{J}$-Cauchy sequences within G2NLS, investigates their interrelationships, and presents significant findings regarding these classes.

Keywords: Gradual 2-normed space, statistical convergence, ideal convergence

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\tilde{s}$	: Gradual sayı
$\mathcal{Y}$	: Reel vektör uzayı
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	: Gradual sayılar kümesi
$\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$	: Negatif olmayan gradual sayılar kümesi
$\Vert . \Vert_{\mathcal{P}}$	: Norm

KISALTMALAR

GNLU	: Gradual normlu lineer uzayı
G2NLU	: Gradual 2-normlu lineer uzayı

1. GİRİŞ

Matematiğin en önemli kavramlarından biri dizilerin yakınsaklığıdır. Yakınsaklık koşulunu sağlayan dizilerin yanı sıra, bu koşulu sağlamayan dizilerin incelenmesi de matematiksel açıdan büyük önem taşımaktadır. Yakınsaklık şartını karşılamayan fakat belirli koşullar altında yakınsaklık kavramıyla ilişkilendirilebilen dizilerin varlığı, farklı yakınsaklık türlerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Yakınsaklık kavramına geniş bir perspektif kazandıran önemli bir kavram, istatistiksel yakınsaklıktır. Pozitif doğal sayıların doğal yoğunluğu temel alınarak, istatistiksel yakınsaklık ilk kez 1951 yılında Fast tarafından tanımlanmıştır (Fast, 1951). Reel ve kompleks sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklığın birçok özelliği çalışılmıştır (Schoenberg, 1959; Fridy, 1985).

İdeal yakınsaklık kavramı ilk olarak Kostyrko vd. tarafından literatüre kazandırılmıştır (Kostyrko vd., 2000). Ayrıca, ideal yakınsaklığın sadece istatistiksel yakınsaklığın bir uzantısı olmadığını, aynı zamanda bazı idealler yardımıyla yeni yakınsak dizi uzaylarının da elde edilebileceğini göstermişlerdir. Son yıllarda ideal yakınsaklığın bir çok özelliği araştırılmıştır (Kumar ve Kumar, 2008; Nabiev vd., 2007; Das ve Ghosal, 2010; Savaş ve Das, 2011; Debnath ve Rakshit, 2018).

1965 yılında, Zadeh bulanık kümeler kavramını klasik küme teorisinin bir uzantısı olarak tanıtmıştır (Zadeh, 1965). O tarihten günümüze, bulanık kümeler mühendislik ve bilim alanlarının çeşitli dallarında sayısız uygulama alanına sahip olmuştur. Bulanık küme teorisi çalışmaları içinde “bulanık sayı” terimi önemli bir yer tutmaktadır. Bulanık sayılar, geleneksel sayılardan ziyade aralıkların bir uzantısıdır ve klasik sayıların pek çok cebirsel özelliğine uymamaktadır. Bu nedenle, araştırmacılar arasında “bulanık sayı” terimi hakkında süregelen bir tartışma bulunmaktadır. Birçok araştırmacı, bunun yerine "bulanık aralıklar" terimini kullanmayı tercih etmiştir. Bu kafa karışıklığını gidermek amacıyla, Fortin vd. bulanık aralıkların elemanları olarak gradual reel sayılar kavramını önermişlerdir (Fortin vd. , 2008). Gradual reel sayılar, $(0, 1]$ aralığını tüm reel sayılar kümesine $\mathbb{R}$ eşleyen atama fonksiyonlarıyla tanımlanır. Dolayısıyla, her reel sayı, sabit bir atama fonksiyonuna sahip bir gradual sayı olarak kabul edilebilir. Gradual reel sayılar, klasik reel sayıların tüm cebirsel özelliklerini karşılar ve hesaplama, bulanık optimizasyon ve çeşitli diğer problem alanlarında etkili bir şekilde kullanılmaktadır.

Sadeqi ve Azari, 2011 yılında gradual normlu lineer uzay kavramını ilk kez tanıtmışlardır (Sadeqi ve Azari, 2011). Bu uzayın çeşitli özelliklerini hem topolojik hem de cebirsel açılardan incelemişlerdir. Çok yakın bir zamanda, Ettefagh vd., bu konuda ilginç sonuçlar ortaya koymuşlardır (Ettefagh vd., 2000). Gradual reel sayılar üzerine kapsamlı bir çalışma için (Aiche ve Dubois, 2012; Dubois ve Prade, 2007; Ettefagh vd, 2020; Lietard ve Rocacher, 2009; Stock, 2010; Choudhury ve Debnath, 2021; Choudhury ve Debnath, 2022a; 2022b; Kişi ve Choudhury, 2023) kaynaklarına başvurulabilir.

Bu tez çalışmasında gradual 2 normlu lineer uzaylarda (G2NLU) istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları tanımlanacak ve aralarındaki ilişki detaylandırılacaktır. Aynı zamanda, λ-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $[V,\lambda]$-toplanabilirlik kavramları sunulacak ve bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri teoremlerle açıklanarak ispatlanacaktır. Buna ek olarak, G2NLU'da ideal yakınsaklık kavramı verilecek ve bu kavramın topolojik ve cebirsel özelliklerine değinilecektir.

2. TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $\tilde{s}$ olarak gösterilen gradual reel sayı kavramı, $\mathcal{H}_{\tilde{s}} : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile tanımlanır. Tüm gradual reel sayılar kümesi $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Herhangi $\gamma \in (0,1]$ için $\mathcal{H}_{\tilde{s}}(\gamma) \geq 0$ koşulunu sağlayan negatif olmayan gradual reel sayılar kümesi $\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Fortin, Dubois ve Fargier, 2008).

Buradan da anlaşılacağı üzere reel sayılar tek bir sabit değere sahip iken, gradual sayılar $(0,1]$ aralığında her γ değeri için bir reel sayıya karşılık gelmektedir. Bu nedenle değişken bir değere sahiptir. Reel sayılar sabit veya belirli büyükleri ifade ederken, gradual sayılar değişken büyüklükleri veya süreçleri modellemek için kullanılır.
Örneğin; $\mathcal{H}_{\tilde{s}}(\gamma) = 2\gamma + 1$ şeklinde bir fonksiyon düşünüldüğünde, bu fonksiyon $\gamma \in (0,1]$ değerleri için farklı reel sayılara karşılık gelmektedir ve görsel olarak bir eğri grafiğine sahiptir. $\mathcal{H}_{\tilde{s}}(0.1) = 2.(0.1) + 1 = 1.2$, $\mathcal{H}_{\tilde{s}}(0.5) = 2.(0.5) + 1 = 2$, $\mathcal{H}_{\tilde{s}}(1) = 2.(1) + 1 = 3$.

Tanım 2.2. Gerçel sayıları kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir * işlemi tanımlansın. $\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ için $\mathcal{H}_{\widetilde{u_1}}$ ve $\mathcal{H}_{\widetilde{u_2}}$ fonksiyonları tanımlansın. $\widetilde{u_1} * \widetilde{u_2} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gradual işlem, $\forall\varsigma \in (0,1]$ için

$$\mathcal{H}_{\widetilde{u_1} * \widetilde{u_2}}(\varsigma) = \mathcal{H}_{\widetilde{u_1}}(\varsigma) * \mathcal{H}_{\widetilde{u_2}}(\varsigma)$$

ile belirlenir.
Bu durumda, $\widetilde{u_1} + \widetilde{u_2}$ gradual toplama ve $p\tilde{u}$ $(p \in \mathbb{R})$ gradual skaler çarpma işlemleri sırasıyla

$$\mathcal{H}_{\widetilde{u_1} + \widetilde{u_2}}(\varsigma) = \mathcal{H}_{\widetilde{u_1}}(\varsigma) + \mathcal{H}_{\widetilde{u_2}}(\varsigma)$$

ve

$$\mathcal{H}_{p\tilde{u}}(\varsigma) = p\mathcal{H}_{\tilde{u}}(\varsigma), \forall\varsigma \in (0,1]$$

şeklinde tanımlanır (Fortin vd, 2008).

Tanım 2.3 $\mathcal{Y}$ reel bir vektör uzayı olsun. Eğer $\forall \tau \in (0,1]$ ve $\phi, \curlyvee \in \mathcal{Y}$ için

(i). $F_{\|\phi\|_{\mathcal{G}}}(\varsigma) = \mathcal{H}_{\tilde{0}}(\varsigma) \Leftrightarrow \phi = 0$;

(ii). Her $\omega \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{H}_{\|\omega\phi\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = |\omega|\mathcal{H}_{\|\phi\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$;

(iii). $\mathcal{H}_{\|\phi+\curlyvee\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \leq \mathcal{H}_{\|\phi\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) + \mathcal{H}_{\|\curlyvee\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$

koşulları sağlayan $\|.\|_{\mathcal{P}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ fonksiyonuna $\mathcal{Y}$ üzerinde bir gradual norm ve $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$ uzayına gradual normlu lineer uzayı (GNLU) denir (Sadeqi ve Azari, 2011).

Örnek 2.1 $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\alpha}$ olsun ve $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\alpha}) \in \mathbb{R}^{\alpha}$, $\varsigma \in (1,0]$ için, $\|.\|_{\mathcal{P}}$ normu

$$\mathcal{H}_{\|\phi\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = e^{\varsigma}\sum_{j=1}^{\alpha}|\phi_j| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (2.1), .(i), .(ii) ve .(iii) özelliklerini sağladığından $\mathcal{Y}$ üzerinde bir gradual norm ve $(\mathbb{R}^{\alpha}, \|.\|_{\mathcal{P}})$ ise bir GNLU belirtir (Sadeqi ve Azari, 2011).

Örnek 2.2. $C[0,1]$, [0,1] üzerinde tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun.

$$\mathcal{H}_{\|h\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = \begin{cases} \max\limits_{0\leq\phi\leq1}\{|h(\phi)|\}, & \frac{1}{2} < \varsigma \leq 1 \\ \sqrt{\int_0^1 |h(\phi)|^2 d\phi}, & 0 < \varsigma \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_{\mathcal{P}}: C[0,1] \to \mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ fonksiyonu $C[0,1]'$de gradual norm oluşturur ve ($C[0,1], \|.\|_{\mathcal{P}}$) ise GNLU belirtir (Sadeqi ve Azari, 2011).
Bununla birlikte $\forall\varsigma \in (0,1]$ ve $\forall h \in C[0,1]$ için $\|h\|_{\mathcal{P}}(\varsigma) = |h(\varsigma)|$ ile belirlenen norm klasik anlamda bir norm belirtmemesine rağmen gradual norm belirtmektedir (Kişi ve Choudhury, 2022)

Tanım 2.4. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$, bir GNLU ve $\phi_0 \in \mathcal{Y}$ olsun. Bu durumda, $\varsigma \in (0,1]$ için, $\varrho > 0$ yarıçaplı, $\phi_0{}'$ın gradual komşuluğu

$$\phi_0 + N(\varrho, \varsigma) = \left\{\phi \in \mathcal{Y} : \mathcal{H}_{\|\phi-\phi_0\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \varrho\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Sadeqi ve Azari, 2011).

Tanım 2.5. $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$ GNLU' da, (ϕ_ν) bir dizidir. Eğer her $\varsigma \in (0,1]$ ve $\varrho > 0$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \varrho, \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

sağlayacak şekilde $\nu_0(= \nu_0(\varrho, \varsigma))$ var ise (ϕ_ν) dizisi, $\phi_0 \in \mathcal{Y}$'a gradual yakınsaktır denir ve $\phi_\nu \xrightarrow{\|.\|_{\mathcal{P}}} \phi_0$ ile gösterilir (Sadeqi ve Azari, 2011).

Tanım 2.6. (ϕ_ν), GNLU $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$'da dizi olsun. Eğer $\forall \varsigma \in (1,0]$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < B, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

sağlayacak şekilde $B = B(\varsigma) > 0$ var ise (ϕ_ν) dizisi, gradual sınırlıdır denir (Ettefagh vd., 2020).

Tanım 2.7. (ϕ_ν), GNLU $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$'da dizi olsun. Eğer $\forall \varsigma \in (0,1]$ ve $\varrho > 0$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_i-\phi_j\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \varrho, \quad \forall i, j \geq N$$

sağlayacak şekilde $N = N_\varrho(\varsigma) > 0$ mevcut ise (ϕ_ν) dizisine gradual Cauchy dizisi denir (Sadeqi ve Azari, 2011).

Tanım 2.8. (ϕ_ν), GNLU $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$'da dizi olsun. Eğer $\forall \sigma > 0, \varsigma \in (0,1]$ için

$$\left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\} \in \mathcal{J}$$

sağlanırsa (ϕ_ν) dizisi, $\phi_0{}'$a gradual $\mathcal{J}$-yakınsaktır denir ve $\phi_\nu \xrightarrow{\mathcal{J}-\|.\|_{\mathcal{P}}} \phi_0$ olarak gösterilir (Choudhury ve Debnath, 2021).

Tanım 2.9. (ϕ_ν), GNLU $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$'da bir dizi olsun. Eğer $\forall\sigma > 0, \varsigma \in (0,1]$ için, (ϕ_{ν_i}) alt dizisi ϕ_0'a gradual yakınsak olacak şekilde $T = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < \cdots\}$ kümesi varsa (ϕ_ν) dizisi, ϕ_0'a gradual $\mathcal{J}^*$-yakınsaktır denir. $\phi_\nu \xrightarrow{\mathcal{J}^*-\|.\|_{\mathcal{P}}} \phi_0$ olarak gösterilir (Choudhury ve Debnath, 2021).

Örnek 2.3. Örnek 2.1'de tanımlanan gradual normu ile birlikte $(\mathbb{R}^\alpha, \|.\|_{\mathcal{P}})$ GNLU alınsın.

$$\mathbb{N} = \bigcup_{c=1}^{\infty} Q_c$$

ise $i \neq j$ için $Q_i \cap Q_j = 0$ sağlayan doğal sayılar kümesinin bir ayrışımı olsun. Q_c'lerin sonlu sayıda elemanlarının arakesitinden oluşan $\mathbb{N}$'nin tüm altkümelerinin $\mathcal{J}$ ailesi, $\mathbb{N}$'de bir ideal oluşturur. (ϕ_ν) dizisi eğer $\nu \in Q_c$ için

$$(\phi_\nu) = \left(0,0,\dots,0,\frac{1}{c}\right)$$

şeklinde tanımlanırsa bu durumda (ϕ_ν) dizisi, $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^\alpha$'a gradual $\mathcal{J}$-yakınsaktır (Choudhury ve Debnath, 2021).

Örnek 2.4. Örnek 2.1'de tanımlanan gradual normu ile birlikte $(\mathbb{R}^\alpha, \|.\|_{\mathcal{P}})$ GNLU alınsın. $(\phi_\nu) \in \mathbb{R}^\alpha$ dizisi

$$\phi_\nu = \begin{cases} 0 = (0,0,\dots,\alpha) & \nu = s^3 \text{ ise } s \in \mathbb{N} \\ \mathbf{0} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, herhangi bir $\sigma > 0$ ve $\varsigma \in (0,1]$ için

$$\left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \mathbf{0}\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\} \subseteq \{1^3, 2^3, 3^3, \dots\} \in \mathcal{J}_d$$

sağlanır. Dolayısıyla, $\phi_\nu \xrightarrow{\mathcal{J}_d-\|.\|_{\mathcal{P}}} \mathbf{0} \in \mathbb{R}^\alpha$ olur (Choudhury ve Debnath, 2021).

Tanım 2.10. (ϕ_ν), GNLU $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{P}})$'da bir dizi olsun. Eğer herhangi bir $\sigma > 0$ ve $\varsigma \in (0,1]$ için

$$C(\varsigma, \sigma) = \left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_N\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\} \in \mathcal{J}$$

sağlayacak şekilde $N(= N_\nu(\varsigma))$ doğal sayısı var ise (ϕ_ν) dizi gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisi denir (Choudhury ve Debnath, 2021).

3. GRADUAL 2-NORMLU LİNEER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde gradual 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları tanımlanacak, bu iki kavram arasındaki ilişki verilecektir. Aynı zamanda λ-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $[\mathrm{V}, \lambda]$-toplanabilirlik kavramları verilecek, bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri teoremlerle ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 3.1. $\mathcal{Y}$, boyutu d olan reel bir vektör uzayı olsun. Bu durumda her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \phi, x, t \in \mathcal{Y}$ için

(i) $\mathcal{H}_{\|\phi_1,\phi_2\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = \mathcal{H}_{\bar{0}}(\varsigma) \Leftrightarrow \phi_1, \phi_2$ lineer bağımsızdır,

(ii) $\mathcal{H}_{\|\omega\phi,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = |\omega| \mathcal{H}_{\|\phi,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma), \forall \omega \in \mathbb{R}$,

(iii) $\mathcal{H}_{\|\phi,x+t\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = \mathcal{H}_{\|\phi,x\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) + \mathcal{H}_{\|\phi,t\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$

özellikleri sağlanırsa $\|.,.\|_{\mathcal{P}}$ fonksiyonuna $\mathcal{Y}$ üzerinde gradual 2-norm denir. Bu durumda, $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayına gradual 2-normlu lineer uzayı ya da kısaca G2NLU olarak adlandırılır.

Tanım 3.2. (ϕ_m), $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında bir dizi olsun. Her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \sigma, \forall \nu \geq H$ koşulunu sağlayan $\exists H(= H_\sigma(\varsigma)) \in \mathbb{N}$ mevcut ise (ϕ_m) dizisi $\phi_0 \in \mathcal{Y}$' ye gradual yakınsaktır denir ve $\mathcal{P}^{2N} - \lim \phi_\nu = \phi_0$ olarak gösterilir.

Tanım 3.3. $(\phi_\nu) \in (\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ bir dizi olsun. Her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için,

$$\left\{ \nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunu sıfır ise, (ϕ_m) dizisi $\phi_0 \in \mathcal{Y}$' ye gradual istatistiksel yakınsaktır denir ve $st^{2N}(\varsigma) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ ile gösterilir. Bu tanıma eşdeğer olarak, her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} \left| \left\{ \nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\} \right| = 0$$

sağlanıyorsa G2NLU'da (ϕ_m) dizisi $\phi_0 \in \mathcal{Y}$' ye gradual istatistiksel yakınsaktır denir.

Not 3.1. Eğer (ϕ_ν), $\mathcal{Y}$'deki herhangi bir dizi ve ϕ_0, $\mathcal{Y}$'nin herhangi bir elemanı ise, bu durumda

$$\left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma, \forall\ \nu \in \mathcal{Y}\right\}$$

kümesi boş kümedir. Çünkü $w = \vec{0}$ (0 vektörü) iken, $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) = 0 \ngeq \kappa$ olur.

Eğer G2NLU'da bir dizi yakınsak ise aynı zaman da sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfıra eşit olacağı için istatistiksel yakınsaktır. Bu iddianın tersinin genel olarak doğru olmadığını aşağıdaki örnekler göstermektedir.

Örnek 3.1. $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\|\alpha, \beta\| = |\alpha_1\beta_2 - \ \alpha_2\beta_1|, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)$$

formülüyle tanımlanan G2NLU uzay belirtsin. $(\phi_\nu) \in (\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ dizisi,

$$\phi_\nu\ = \begin{cases} (1, \nu), & \text{eğer } \nu = s^2, s \in \mathbb{N} \\ \left(1, \dfrac{\nu - 1}{\nu}\right), & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$\phi_0 = (1,1)$ ve $w = (w_1, w_2)$ olsun. Eğer $\nu_1 = 0$ ise, bu durumda her $\varsigma \in (0, 1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için

$$\mathcal{V} = \left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \emptyset$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olur ($\delta(\mathcal{V}) = 0$). Dolayısıyla $w_1 \neq 0$ olarak alınsın. Her $\sigma > 0$ ve $w \in \mathcal{Y}$ için,

$$\left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \nu \neq s^2, s \leq \frac{|w_1|}{\sigma}\right\}$$

sonlu bir kümedir, bu yüzden, $\mathcal{Y}$'deki her ν için

$$\left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}} \ (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \nu = s^2, s \geq \sqrt{\frac{\sigma}{|w_1|}+1}\right\} \cup \{\text{sonlu küme}\}$$

olur. Buradan $\sigma > 0$, $\varsigma \in (0,1]$ ve $w \in \mathcal{Y}$ için

$$\frac{1}{\nu}\left|\left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}} \ (\varsigma) \geq \sigma\right\}\right| = \frac{1}{\nu}\left|\left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \nu = s^2, s \geq \sqrt{\frac{\sigma}{|w_1|}+1}\right\}\right| \cup \frac{1}{\nu} 0(1)$$

yazılır. Böylece

$$\delta\left(\nu \in \mathbb{N} \ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}} \ (\varsigma) \geq \sigma\right) = 0,$$

olup, $st^{2N}(\varsigma) - \lim \phi_\mu = \phi_0$ elde edilir. Ancak, (ϕ_ν) dizisi, $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$ G2NLU'daki ϕ_0 gradual yakınsak değildir.

Örnek 3.2. $(\phi_\nu) \in (\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ dizisi,

$$\phi_\nu = \begin{cases} (0,\nu), & \text{eğer } \nu = s^2, s \in \mathbb{N} \\ (0,0), & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $\phi_0 = (0,0)$ ve $w = (w_1, w_2)$ olsun. Her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için

$$\left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}} \ (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \{1,4,9,16,\dots,\nu^2,\dots\}$$

yazılır. Aynı zamanda

$$\delta\left(\nu \in \mathbb{N} \ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right) = 0$$

elde edilir. Böylece $st^{2N}(\varsigma) - \lim\phi_\nu = \phi_0$ sonucunu verir. Ancak, (ϕ_ν) dizisi G2NLU $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$'de ϕ_0'a gradual yakınsak değildir.

Gradual istatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olmak zorunda olmadığı Örnek 3.1 ve Örnek 3.2'de görülmektedir.

Gradual istatistiksel yakınsak bir dizinin limitinin tekliği aşağıdaki teoremle gösterilmektedir.

Teorem 3.1. (ϕ_ν), G2NLU bir dizi ve $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{Y}$ olsun. $st^{2N}(\varsigma) - \lim\phi_\nu = \phi_0$, $st^{2N}(\varsigma) - \lim\phi_\nu = \phi_1$ ise, bu durumda $\phi_1 = \phi_0$.

İspat. $\phi_1 \neq \phi_0$ olsun. Bu durumda $\phi_1 - \phi_0 \neq \vec{0}$ elde edilir. Bu ise G2NLU'da $\phi_1 - \phi_0$ ve w vektörleri lineer bağımsız olması demektir (w vektörü, $d \geq 2$ olduğundan dolayı mevcuttur). Sonuç olarak, $\sigma > 0$ için

$$\mathcal{H}_{\|\ \phi_1-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\ \varsigma) = 2\sigma$$

yazılır. Şimdi

$$2\sigma = \mathcal{H}_{\|(\phi_0-\phi_\nu)+(\phi_\nu-\phi_1),w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \leq \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) + \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_1,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma)$$

olup,

$$\left\{\ \nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_1,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \sigma\right\} \subseteq \left\{\ \nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\}$$

elde edilir. Ancak, $st^{2N}(\varsigma) - \lim\phi_\nu = \phi_1$ kabulünden

$$\delta\left(\left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_1,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\}\right) = 0$$

olur, bu ise çelişkidir. Böylece kabulümüz yanlıştır ve $\phi_1 = \phi_0$ olmak zorundadır.

Teorem 3.2. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$ G2NLU'da, (ϕ_ν) ve (φ_ν) iki farklı dizi olsun. Eğer h. h. ν için $\phi_\nu = \varphi_\nu$ sağlayan gradual yakınsak bir (φ_ν) dizi ise, bu durumda (ϕ_ν) gradual istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\delta\left(\{\nu \in \mathbb{N} : \phi_\nu \neq \varphi_\nu\}\right) = 0$ ve $\mathcal{P}^{2N} - \lim \varphi_\nu = \alpha_0$ olsun. Her ç $\in (0,1]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \sigma\right\} \subseteq \left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \sigma\right\} \cup \{\nu \in \mathbb{N}: \phi_\nu \neq \varphi_\nu\}$$

yazılır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} &\delta\left(\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \sigma\right\}\right) \\ &\qquad \leq \delta\left(\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \sigma\right\}\right) + \delta\left(\{\nu \in \mathbb{N}: \phi_\nu \neq \varphi_\nu\}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Her $\nu \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{G} - \lim \varphi_\nu = \alpha_0$ olduğundan

$$\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \sigma\right\}$$

kümesi sonlu sayıda tam sayı içerir. Dolayısıyla,

$$\delta\left(\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \sigma\right\}\right) = 0$$

bulunur. (3.1) eşitsizliği kullanılarak, her ç $\in (0,1]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\delta\left(\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (ç) \geq \mu\right\}\right) = 0.$$

Sonuç olarak, $st^{2N}(ç) - \lim \phi_\nu = \alpha_0$.

Şimdi, $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$ G2NLU'dbir dizinin istatistiksel limit işleminin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre lineer olduğu gösterilsin.

Teorem 3.3. (ϕ_ν) ve (φ_ν), sırasıyla $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$ G2NLU'daki diziler, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{Y}$ ve $n \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $st^{2N}(\varsigma) - \lim\phi_\nu = \alpha_0$ ve $st^{2N}(\varsigma) - \lim\ \varphi_\nu = \alpha_1$ ise bu durumda her $\varsigma \in (0,1]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

(i) $st^{2N}(\varsigma) - \lim \phi_\nu + \varphi_\nu = \alpha_0 + \alpha_1$,

(ii) $st^{2N}(\varsigma) - \lim n\varphi_\nu = n\alpha_0$

sağlanır.

İspat. (i) Her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için $st^{2N}(\varsigma) - \lim\varphi_\nu = \alpha_0$ ve $st^{2N}(\varsigma) - \lim\ \varphi_\nu = \alpha_1$ olsun. Bu durumda, her $\varsigma \in (0,1]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$Z_1 = Z_1(\varsigma) := \left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \alpha_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{2}\right\}$$

ve

$$Z_2 = Z_2(\varsigma) := \left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - \alpha_1, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{2}\right\}$$

kümeleri tanımlansın. $\delta(Z_1) = 0$ ve $\delta(Z_2) = 0$ olduğu açıktır.

$$Z(\varsigma) := \left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu + \varphi_\nu - (\alpha_0 + \alpha_1), w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\}$$

şeklinde tanımlanan küme için $\delta(Z) = 0$ olduğunu göstermek için, Z'nun, $Z_1 \cup Z_2$ kümesinin bir alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. $q_0 \in Z$ alınsın. Bu durumda

$$\mathcal{H}_{\|\phi_{q_0} + \varphi_{q_0} - (\alpha_0 + \alpha_1), w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma \tag{3.2}$$

elde edilir.

Şimdi, tersini kabul edelim, yani $q_0 \notin Z_1 \cup Z_2$ olsun. Bu durumda $q_0 \notin Z_1$ ve $q_0 \notin Z_2$

yazılır. $q_0 \notin Z_1$ ve $q_0 \notin Z_2$ olduğunda

$$\mathcal{H}_{\|\phi_{q_0}-\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \frac{\sigma}{2}$$

ve

$$\mathcal{H}_{\|\varphi_{q_0}-\alpha_1,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \frac{\sigma}{2}$$

yazılır. Böylece

$$\mathcal{H}_{\|\phi_{q_0}+\varphi_{q_0}-(\alpha_0+\alpha_1),w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \leq \mathcal{H}_{\|\phi_{q_0}-\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) + \mathcal{H}_{\|\varphi_{q_0}-\alpha_1,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

bulunur. Bu ise (3.2) ile çelişir. Dolayısıyla, $q_0 \in Z_1 \cup Z_2$, $Z \subset Z_1 \cup Z_2$ olur. $st^{2N}(\varsigma) - \lim \phi_\nu + \varphi_\nu = \alpha_0 + \alpha_1$ elde edilir.

(ii) $st^{2N}(\varsigma) - \lim\phi_\nu = \alpha_0$ ve $0 \neq n \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\delta\left(\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{|n|}\right\}\right) = 0$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|n\phi_\nu-n\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \left\{\nu: \mathcal{H}_{n\|\phi_\nu-\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{|n|}\right\}$$

elde edilir.

Sağ taraftaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan $\delta\left(\left\{\nu: \mathcal{H}_{\|n\phi_\nu-n\alpha_0,w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\}\right) = 0$ bulunur. Böylece $st^{2N}(\varsigma) - \lim n\phi_\nu = n\alpha_0$.

Şimdi ise $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$ G2NLU içerisinde gradual istatistiksel Cauchy dizisi tanımı verilecektir.

Tanım 3.4. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$ G2NLU'da, her $\varsigma \in (0,1]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\delta\left(\left\{\nu \in \mathbb{N}\ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_{N(\sigma,\upsilon)},w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\}\right) = 0$$

koşulunu sağlayan $N = N(\sigma,\upsilon)$ sayısı varsa (ϕ_ν) dizisine gradual istatistiksel Cauchy dizisi denir, yani her $\sigma > 0$, $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve h. h. ν için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_{N(\sigma,\upsilon)},w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) < \sigma,$$

koşulu sağlandığında $\mathcal{Y}$'de gradual istatistiksel Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Teorem 3.4. Sonlu boyutlu $(\mathcal{Y},\|.,.\|)$ G2NLU'da gradual istatistiksel Cauchy (ϕ_ν) dizi alınsın. O zaman, h. h. ν için $\phi_\nu = \varphi_\nu$ olacak şekilde gradual yakınsak (φ_ν) dizisi vardır.

İspat. İlk olarak, sonlu boyutlu $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında gradual istatistiksel Cauchy (ϕ_ν) dizisi alınsın. Şimdi h. h. ν için ϕ_ν dizisini içeren kapalı $B_t^1 = B_t(\phi_{U(1)},1)$ yuvarını oluşturacak şekilde $U_1 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Benzer şekilde h. h. ν için ϕ_ν dizisini içeren kapalı $B_2 = B_t\left(\phi_{U(2)},\frac{1}{2}\right)$ yuvarını oluşturacak şekilde $U_2 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Açıktır ki $B_t^2 = B_t^1 \cap B_2$ kapalı yuvarı da h. h. ν için ϕ_ν dizisini içerir. Bu sürece devam edildiğinde, $\operatorname{diam}(B_t^u)_{u>1} \leq \frac{1}{2^u}$ sağlayan iç içe geçmiş kapalı yuvarların $\{B_t^u\}$ dizisi elde edilir.

Bu nedenle

$$\cap_{u=1}^{\infty} B_t^u = \{F\}$$

olur.

Her B_t^u, h. h. ν için ϕ_ν içerdiğinden, $\nu > T_u$ iken

$$\frac{1}{\nu}|\{\ \nu \in \mathbb{N}:\ \phi_\nu \notin B_t^u\}| < \frac{1}{u}$$

koşulunu sağlayan doğal sayıların artan bir $\{T_u\}_{u>1}$ dizisi seçilebilir.

Tüm $u \geq 1$ değerleri için

$$W_u = \{ \nu \in \mathbb{N} \colon \nu > T_u,\ \phi_\nu \notin B_t^u \}$$

ve $W = \cup_{u=1}^{\infty}\ W_u$ olsun. Şimdi, $\{\varphi_\nu\}_{u\geq 1}$dizisi

$$\varphi_\nu \ = \begin{cases} F, & \text{eğer } \nu \in W \text{ ise,} \\ \phi_\nu, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{P}^{2N} - \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu = F$ olarak alınsın. Her $\sigma > 0$ için, $\sigma > \frac{1}{u} > 0$ koşulunu sağlayan bir $u \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda, tüm $\nu > T_u$ için, $\varphi_\nu = F$, veya $\varphi_\nu = \phi_\nu \in B_t^u$ olur ve her iki durumda da

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - F\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \leq \operatorname{diam}(B_t^u) \leq \frac{1}{2^{u-1}}$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\{\nu \in \mathbb{N} \colon \varphi_\nu \neq\ \phi_\nu\} \subseteq \{ \nu \in \mathbb{N} \colon\ \phi_\nu \notin B_t^u\}$$

olduğundan

$$\frac{1}{\nu} |\{ \nu \in \mathbb{N} \colon \varphi_\nu \neq\ \phi_\nu\}| \leq \frac{1}{\nu} |\{\nu\ \in \mathbb{N} \colon\ \phi_\nu \notin B_t^u\}| < \frac{1}{u}$$

yazılır.

Bu yüzden, $\delta\ (\{\nu \in \mathbb{N}\ \colon \varphi_\nu \neq\ \phi_\nu\}) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$'de h. h. ν için $\varphi_\nu =\ \phi_\nu$ sağlanır. $\{t_1, t_2, \ldots, t_d\}$, $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ için bir baz olsun. Her $1 \leq i \leq d$ için

$$\lim_{\nu\to\infty}\ \mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - F\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) = 0$$

ve

$$\mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - F, t_i\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma) \leq \mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - F, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\varsigma)$$

olduğundan her $w \in \mathcal{Y}$ için $\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{H}_{\|\varphi_\nu - F, w\|_{\mathcal{P}}}$ (ς) $= 0$. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.2 ve Tanım 3.4'ün denkliğini sağlamak amacıyla, Teorem 3.2 ve Teorem 3.4'ün uygulanmasının yararlı olacağına inanıyoruz. Bu teoremler, her iki tanımın aynı kavramsal çerçeve içinde olduğunu göstermekte ve aralarındaki ilişkiyi netleştirmektedir. Böylece, bu teoremler kullanılarak tanımların tutarlılığı ve birbirleriyle uyumu bilimsel olarak ispatlanabilir.

Teorem 3.5. (ϕ_ν), $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında bir dizi olsun. (ϕ_ν) dizisinin gradual istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (ϕ_ν) dizisinin gradual istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat. Her ς $\in (0,1]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için st^{2N}(ς) $- \lim \phi_\nu = \phi_0$ olsun. Bu durumda h. h. ν için $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}$ (ς) $< \frac{\sigma}{2}$ sağlanır. Eğer $\mathcal{H}_{\|\phi_{N(\sigma,\upsilon)} - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}$ (ς) $< \frac{\sigma}{2}$ olacak şekilde $N \coloneqq N(\sigma, \upsilon)$ seçilirse, bu durumda h. h. ν için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_{N(\sigma,\upsilon)}, w\|_{\mathcal{P}}} (ς) \leq \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}} (ς) + \mathcal{H}_{\|\phi_0 - \phi_{N(\sigma,\upsilon)}, w\|_{\mathcal{P}}} (ς) < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} < \sigma$$

elde edilir. Böylece (ϕ_ν) dizisi gradual istatistiksel Cauchy dizisi olur. Tersine, (ϕ_ν) dizisi gradual istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Teorem 3.4'e göre, h. h. ν için $\varphi_\nu \neq \phi_\nu$ olacak şekilde yakınsak dizi φ_ν mevcuttur. Teorem 3.2'ye göre, her ς $\in (1,0]$, $\sigma > 0$ ve $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için st^{2N}(ς) $- \lim \phi_\nu = \phi_0$ elde edilir.

Teorem 3.6. Eğer st^{2N}(ς) $- \lim \phi_\nu = \phi_0$ ise, bu durumda (ϕ_ν) dizisinin $\left(\phi_{\nu_i}\right)$ alt dizisi için st^{2N}(ς) $- \lim \phi_{\nu_i} = \phi_0$ sağlanır.

Şimdi ise G2NLU'da gradual λ-istatistiksel yakınsaklık ve (V, λ)-toplanabilirlilik kavramları verilecektir. Aynı zamanda gradual 2 normlu uzaylarda tüm gradual λ-istatistiksel yakınsak diziler uzayı olan S_λ^{2N} ile $[V, \lambda]_{\mathcal{P}}$-toplanabilirlilik arasındaki ilişki teoremlerle ifade edilip ispatlanacaktır. Son olarak, gradual λ-istatistiksel Cauchy dizileri kavramı verilecektir.

Tanım 3.5. (ϕ_ν), $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında bir dizi olsun. Her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u} \left|\left\{ \nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}\right| = 0$$

koşulu sağlanırsa (ϕ_ν) dizisi $\phi_0 \in \mathcal{Y}$'e gradual λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\lambda^{2N} - \lim \phi_\nu = \phi_0$ ile gösterilir.

Örnek 3.4. $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Upsilon$ ve $\|.,.\|_{\mathcal{P}}$ gradual 2 norm olsun. (λ_u) dizisi

$$\lambda_u = \begin{cases} 1, & u = 1 \\ \dfrac{u}{2}, & u \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Aynı zamanda $\mathbb{R}^\Upsilon$ de, (ϕ_ν) dizisi

$$\phi_\nu = \begin{cases} (0,0,\dots,\Upsilon), & \text{eğer } \nu = m^2, m \in \mathbb{N} \\ (0,0,\dots,0,0), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak alınsın. Bu durumda (ϕ_ν) dizisi **0**'a gradual λ-istatistiksel yakınsaktır. Burada **0**, $(0,0,\dots,0,0)$ şeklinde Υ-demetini göstermektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u} \left|\left\{ \nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \mathbf{0}, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}\right| \\
&= 2\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \left|\left\{ \nu \in \left[\frac{\mathrm{u}}{2} + 1, \mathrm{u}\right] : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \mathbf{0}, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}\right| \\
&\leq 2\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \left|\left\{ \nu \leq \mathrm{u} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \mathbf{0}, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}\right| \leq 2\lim_{u\to\infty} \frac{[\sqrt{u}]}{u} = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $[u]$, $\leq u$ sağlayan en büyük tamsayıyı gösterir. Dolayısıyla, $S_\lambda^{2N}(\mathcal{G}) - \lim \phi_\nu = \mathbf{0}$ elde edilir.

Örnek 3.5. $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ ve $\phi_0 \in \mathbb{R}$ olsun. $\|.,.\|_{\mathcal{P}}$ gradual 2-normu

$$\mathcal{H}_{\|\phi_0, \mathrm{w}\|_{\mathcal{P}}} = \mathrm{e}^{\varsigma}|\phi_0|.$$

şeklinde tanımlansın. Örnek 3.4'te tanımlanan (λ_u) dizisi ele alınsın. Böylece, $\mathcal{Y}$ uzayında, $(\phi_\nu) = (\nu^2)$ olarak alınırsa (ϕ_ν) dizisi gradual λ-istatistiksel yakınsaklığı sağlamaz.

İspat. $\phi_0 \in \mathbb{R}$ için, $\phi_0 \leq 0$ veya $\phi_0 > 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur. Her iki durumda da, (ϕ_ν) dizisi ϕ_0'e gradual λ-istatistiksel yakınsak değildir.

Durum-I: $\phi_0 \leq 0$ ise $\sigma = \frac{1}{2}e^{\varsigma}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u} \left|\left\{ \nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)\right\} \geq \sigma \right|$$

$$= 2\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u}\left|\left\{\nu \in \left[\frac{u}{2}+1, u\right] : \mathcal{H}_{\|\nu^2 - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right|$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{2}{u}\left(\dfrac{u}{2} - 1\right), & u \text{ çift ise} \\ \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{2}{u}\left(\dfrac{u+1}{2} - 1\right), & u \text{ tek ise} \end{cases} = 1 \neq 0$$

elde edilir.

Durum-II: Eğer $\phi_0 > 0$ ise $\phi_{\nu_0 - 1} \leq \phi_0 \leq \phi_{\nu_0}$ sağlayan $\nu_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Alt Durum-I: Eğer $0 < \phi_0 < 1$ ise

$$\sigma = \frac{e^{\varsigma}}{2}\min\{\phi_0, 1 - \phi_0\}$$

seçilebilir. Bu durumda

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u} \left|\left\{ \nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)\right\} \geq \sigma \right| = 1 \neq 0$$

kolayca kanıtlanabilir.

Alt Durum-II: Eğer $\phi_0 \geq 1$ ise

$$\sigma = \frac{e^{\varsigma}}{2}\min\{\phi_0 - \phi_{\nu_0 - 1}, \phi_{\nu_0} - \phi_0\}$$

seçilebilir. Bu durumda

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u}\left|\{\, \nu \in I_u \colon \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)\} \geq \ \sigma \,\right| = 1 \neq 0$$

kolayca kanıtlanabilir.

Bu durumlar dikkate alındığında, (ϕ_ν) dizisinin gradual λ-istatistiksel yakınsak olmadığı sonucuna varılabilir.

Lemma 3.1. Eğer $\lim_{u\to\infty} \frac{u^{\frac{1}{q}}}{\lambda_u}$ limiti mevcut ise sabit bir $q \geq 2$ doğal sayısı için ve

$$\mathrm{B} = \left\{u \in \mathbb{N} \colon u^{\frac{1}{q}} \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi için $\delta_\lambda(\mathrm{B}) = 0$ sağlanır.

İspat. $\mathrm{B}_u = \{\nu \in \mathrm{B} \colon \ \nu \in I_u\}$ ve $\lim_{u\to\infty} \frac{u^{\frac{1}{q}}}{\lambda_u} = y$ olsun. Bu durumda

$$|\,\mathrm{B}_u| = \left[u^{\frac{1}{q}}\right] - \left[\left(u - \ \lambda_u + \frac{1-(-1)^u}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

şeklinde göstermek kolaydır.

Durum-I: u, çift olduğunda

$$u^{\frac{1}{q}} - 1 \leq \left[u^{\frac{1}{q}}\right] \leq u^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \frac{u^{\frac{1}{q}} - 1}{\lambda_u} \leq \frac{\left[u^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} \leq \frac{u^{\frac{1}{q}}}{\lambda_u} \Rightarrow \lim_{u\to\infty} \frac{\left[u^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} = y$$

elde edilir. Ayrıca,

$$(u-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}-1 \leq \left[(\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}\right] \leq (\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \frac{(\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}-1}{\lambda_u} \leq \frac{\left[(\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u}$$

$$\leq \frac{u^{\frac{1}{q}}}{\lambda_u}\left(1-\frac{\lambda_u}{u}\right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır.

Eğer $\frac{\lambda_u}{u} < 1$ ise

$$\frac{u^{\frac{1}{q}}}{\lambda_u} - \mathrm{O}\left(\frac{\lambda_u}{u}\right) - \frac{1}{\lambda_u} \leq \frac{\left[(\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} \leq \frac{u^{\frac{1}{q}}}{\lambda_u} - \mathrm{O}\left(\frac{\lambda_u}{u}\right)$$

bulunur. Dolayısıyla, $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\left[(\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} = y$ elde edilir. Eğer $\frac{\lambda_u}{u} = 1$ ise $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\left[(\mathrm{u}-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} = y$ her zaman sağlanır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\left[u^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} - \lim\limits_{u\to\infty} \frac{\left[(u-\lambda_u)^{\frac{1}{q}}\right]}{\lambda_u} = y - y = 0$ sağlanır.

Durum-II: Eğer u tek ise o zaman benzer teknik kullanarak $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{|\,\mathrm{B}_u|}{\lambda_u} = 0$ elde edilir. Böylece iki durumdan da $\delta_\lambda(\mathrm{B}) = 0$ olarak elde edilir.

Teorem 3.6. (ϕ_v) dizisi $\mathcal{Y}$ uzayında $st_\lambda^{2N} - \lim \phi_v = \phi_0$ sağlasın. Bu durumda ϕ_0, tektir.

Teorem 3.7. $\mathcal{Y}$ uzayında (ϕ_v) ve (z_v) dizileri için $st_\lambda^{2N} - \lim\, \phi_v = \phi_0$ ve $st_\lambda^{2N} - \lim\, z_v = \phi_1$ sağlansın. Bu durumda, $\forall q \in \mathbb{R}$ için

(i) $st_\lambda^{2N} - \lim(\phi_v + z_v) = \phi_0 + \phi_1$,

(ii) $\mathrm{S}_\lambda^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim q\phi_v = q\phi_0$

sağlanır.

Teorem 3.8. (ϕ_ν), $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında bir dizi olsun. Bu durumda, $st_\lambda^{2N} - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $\delta_\lambda(\mathrm{T}) = 1$ ve $\mathcal{P}^{2\mathrm{N}} - \lim \phi_{t_\nu} = \phi_0$ olacak şekilde

$$T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

olmasıdır.

İspat. İlk olarak, $\delta_\lambda(\mathrm{M}) = 1$ ve $\mathcal{P}^{2\mathrm{N}} - \lim \phi_{t_\nu} = \phi_0$ olacak şekilde

$$T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi var olduğunu kabul edilsin. Bu durumda, her $\varsigma \in (1{,}0]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için, $\forall\, \nu \geq \mathrm{N}$ iken $\mathcal{H}_{\|\phi_{t_\nu} - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma$ olacak şekilde $\mathrm{N}\big(= \mathrm{N}_\sigma(\varsigma)\big) \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

$$\mathrm{B}(\varsigma, \sigma) = \left\{ \nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}$$

kümesi tanımlansın. $\mathrm{B}(\varsigma, \sigma) \subset \mathbb{N} \setminus \{t_{N+1}, t_{N+2}, \dots\}$ ilişkisi geçerlidir. $\delta_\lambda\big(\mathrm{B}(\varsigma, \sigma)\big) = 0$ sonucuna varılır. Böylece $st_\lambda^{2N} - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ elde edilir.
Tersine $st_\lambda^{2N} - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ sağlansın. Bu durumda, her $\varsigma \in (0, 1]$ ve $u \in \mathbb{N}$ için

$$T_i = \left\{ \nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{1}{i} \right\}$$

alındığında, $\delta_\lambda(T_i) = 1$ olur. T_i'lerin kurulumundan

$$\mathrm{T}_1 \supset \mathrm{T}_2 \supset \cdots \supset \mathrm{T}_\mathrm{i} \supset \mathrm{T}_{\mathrm{i}+1} \supset \cdots \tag{3.3}$$

ilişkisi geçerlidir. Keyfi $\rho_1 \in T_1$ alınsın. Her $u \geq \rho_2$ için

$$\frac{1}{\lambda_u} |\{ \nu \in I_u :\ \nu \in T_2\}| > \frac{1}{2}$$

sağlayan $\rho_2 \in T_2$ vardır. Benzer şekilde, her $u \geq \rho_3$ için

$$\frac{1}{\lambda_u}|\{\, \nu \in I_u \colon \ \nu \in T_3\}| > \frac{2}{3}$$

sağlayan $\rho_3 \in T_3$ vardır. Bu şekilde devam edilirse $\rho_i \in T_i$ elde edilir ve her $u \geq \rho_i$ için

$$\frac{1}{\lambda_\mathrm{u}}|\{\, \nu \in \mathrm{I_u} \colon \nu \in \mathrm{T_i}\}| > 1 - \frac{1}{\mathrm{i}} \tag{3.4}$$

sağlayacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir (ρ_i) dizisi oluşturulabilir.
T'yi şu şekilde oluşturalım: $[1, \rho_1]$ aralığındaki tüm doğal sayılar T'ye aittir ve $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ aralığındaki bazı doğal sayıların T'ye ait olması için gerek ve yeter koşul T_i'ye olmasıdır $(i \in \mathbb{N})$.

(3.3) ve (3.4)' den, her $\rho_i \leq u \leq \rho_{i+1}$ için,

$$\frac{|\{\, \nu \in I_u \colon \nu \in T\}|}{\lambda_u} \geq \frac{|\{\, \nu \in I_u \colon \nu \in T_i\}|}{\lambda_u} \geq 1 - \frac{1}{i}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\delta_\lambda(T) = 1$ olur. $\sigma > 0$ olsun. Arşimet özelliğine göre, $\frac{1}{i} < \sigma$ sağlayacak şekilde $i \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Ayrıca, $\nu \geq \rho_i$ olacak şekilde $\nu \in T$ alınsın. Böylece, $\rho_m \leq \nu \leq \rho_{m+1}$ olacak şekilde $m \geq i$ vardır. Ama, T'nin tanımına göre $\nu \in T_m$ olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_\mathcal{P}}(\varsigma) < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{i} < \sigma$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\mathcal{P}^{2\mathrm{N}} - \lim \phi_{t_\nu} = \phi_0$ sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Not 3.2. Gradual λ-istatistiksel yakınsak bir dizinin her alt dizisi de gradual λ-istatistiksel yakınsaklıktır.

Örnek 3.6. $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ olsun ve $\|.,.\|_\mathcal{P}$ gradual 2-normu Örnek 3.5'te olduğu gibi tanımlansın. (λ_s) dizisi

$$\lambda_u = \begin{cases} 1, & u = 1 \text{ ise} \\ \dfrac{u}{2}, & u \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Aynı zaman da (ϕ_ν) dizisi

$$\phi_\nu = \begin{cases} \nu, & \nu = q^2, q \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun.

Lemma 3.1'de $q = 2$ olarak alınırsa, herhangi $\sigma > 0$ için

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u} \left|\left\{\nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma \right\}\right| = \delta_\lambda(\mathrm{R}),$$

elde edilir. Burada $\mathrm{R} = \left\{\mathrm{s} \in \mathbb{N} : \sqrt{\mathrm{s}} \in \mathbb{N}\right\}$ şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla $st_\lambda^{2N} - \lim \phi_\nu = 0$ bulunur. Ayrıca, Örnek 3.5'te incelenen dizi, tanımlanan dizinin bir alt dizisi olmasına rağmen, gradual λ-istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 3.6. $(\phi_\nu) \in (\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ olsun. Bu durumda $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P})$ uzayı her $\varsigma \in (0,1]$ ve bazı $\phi_0 \in \mathcal{Y}$ için

$$[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) = \left\{(\phi_\nu) : \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u} \sum_{\nu \in I_u} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim \phi_\nu = \phi_0$ ile gösterilir.

Teorem 3.9. $(\phi_\nu) \in (\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ olsun. Bu durumda

(ii) $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim \phi_\nu = \phi_0$ ise $st_\lambda^{2N} - \lim \phi_\nu = \phi_0$ sağlanır ancak tersi doğru değildir.

(ii) Eğer (ϕ_ν) dizisi gradual sınırlı ve $st_\lambda^{2N} - \lim \phi_\nu = \phi_0$ ise $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim \phi_\nu = \phi_0$

sağlanır.

İspat. Keyfi $\sigma > 0$ ve $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ alınsın. İspat

$$\sum_{\nu \in I_u} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sum_{\substack{\nu \in I_u \\ \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma}} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$$

$$\geq \sigma. \left|\left\{\nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right|$$

eşitsizliğinden doğrudan elde edilir.

Tersi için, Örnek 3.5.'te tanımlanan $\|.,.\|_{\mathcal{G}}$ norm düşünülerek $(\mathbb{R}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında ters bir örnek verilebilir. (λ_s) dizisi Örnek 3.4.'teki gibi tanımlanan dizi olsun. Aynı zaman da (ϕ_ν) dizisi

$$\phi_\nu = \begin{cases} \nu, & u - \left[\sqrt{\dfrac{u}{2}}\right] + 1 \leq \nu \leq u \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$0 < \sigma e^{\sigma} \leq 1$ ile belirlenen her $\sigma > 0$ için

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{\lambda_u} \left|\left\{\nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - 0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right| = \lim_{u \to \infty} \frac{2}{u} \left[\sqrt{\frac{u}{2}}\right] = 0$$

elde edilir.

Dolayısıyla, $st_\lambda^{2N} - \lim\ \phi_\nu = 0$ sağlanır.
Diğer taraftan

$\frac{1}{\lambda_u} \sum_{\nu \in I_u} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - 0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$

$= \frac{2}{u} \cdot \sum_{\nu\in\left[\frac{u}{2}+1,u\right]} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$

$= \frac{2e^{\sigma}}{u} \cdot \left\{\left(u - \sqrt{\frac{u}{2}} + 1\right) + \left(u - \sqrt{\frac{u}{2}} + 2\right) + \cdots + \left(u - \sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{\frac{u}{2}}\right)\right\} \to \infty, u \to \infty,$

elde edilir, dolayısıyla $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim\ \phi_\nu \neq 0$ bulunur.

(ii) $st_\lambda^{2N} - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ ve (ϕ_ν) dizisi gradual sınırlı olsun. Bu durumda $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \leq \mathcal{V},\ \forall\, \mathcal{V} \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu durumda her $\sigma > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_u}\sum_{\nu\in I_u} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$$

$$= \sum_{\substack{\nu\in I_u \\ \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)\geq\sigma}} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) + \sum_{\substack{\nu\in I_u \\ \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\sigma}} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)$$

$$\leq \frac{\mathcal{V}}{\lambda_s}\left|\left\{\nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right| + \sigma$$

elde edilir. Sonuç olarak $[\mathrm{V},\lambda]^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ bulunur.

Teorem 3.10.Eğer $\lim_{u} \inf\frac{\lambda_u}{u} > 0$ ise bu durumda $\mathrm{S}_\lambda^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) \supseteq \mathrm{S}^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P})$ sağlanır.

İspat. $\lim_{u} \inf\frac{\lambda_u}{u} > 0$ ve $st^{2N}(\varsigma) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük u için, $\frac{\lambda_u}{u} > \zeta$ sağlayacak şekilde $\zeta > 0$ vardır. Herhangi $\sigma > 0$ ve $\varsigma \in (0,1]$ için

$$\frac{1}{u}\left|\left\{\nu \leq u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right|$$

$$\geq \frac{1}{u}\left|\left\{\nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right|$$

$$\geq \zeta\frac{1}{\lambda_u}\left|\left\{\nu \in I_u : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma\right\}\right|$$

yazılır, böylece $st_\lambda^{2N} - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ sağlanır.

Teorem 3.11. Eğer $\lim_{u} \inf\frac{\lambda_u}{u} = 1$ ise bu durumda $\mathrm{S}_\lambda^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) \supseteq \mathrm{S}^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P})$ sağlanır.

İspat. $\lim_{u} \inf \frac{\lambda_u}{u} > 0$ ve $st_{\lambda}^{2N} - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ olsun. Bu durumda, herhangi $\sigma > 0$ ve $ç \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{u}\left|\left\{\nu \le u: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) \ge \sigma\right\}\right| \\ &\le \frac{1}{u}\left|\left\{\nu \le u - \lambda: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) \ge \sigma\right\}\right| \\ &+ \frac{1}{u}\left|\left\{\nu \in I_u: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) \ge \sigma\right\}\right| \\ &\le \frac{u - \lambda_u}{u} + \frac{\lambda_u}{u}\frac{1}{\lambda_u}\left|\left\{\nu \in I_u: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) \ge \sigma\right\}\right| \end{aligned}$$

yazılır, böylece $st^{2N}(ç) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ elde edilir.

Tanım 3.7. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ bir G2NLU olduğunu varsayalım. Her $\sigma > 0$ ve $ç \in (0,1]$ için

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u}\left|\left\{\nu \in I_u: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_N, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) \ge \sigma\right\}\right| = 0$$

veya denk olarak $h.h.\nu$ için $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_N, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) < \sigma$ sağlayacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ varsa $\mathcal{Y}$'de, (ϕ_ν) dizisine gradual λ-istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.12 $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ bir G2NLU olsun. Bu durumda, $\mathcal{Y}$'deki her gradual λ-istatistiksel yakınsak olan dizi, gradual λ-istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. $st^{2N}(ç) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ olsun. Bu durumda, her $ç \in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\lambda_u}\left|\left\{\nu \in I_u: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) \ge \frac{\sigma}{2}\right\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise h .h. ν için $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(ç) < \frac{\sigma}{2}$ olması demektir. Aynı zaman da $st^{2N}(ç) - \lim\ \phi_\nu = \phi_0$ olduğunda

$$\delta_\lambda\left(\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \frac{\sigma}{2}\right\}\right) = 0,$$

veya

$$\delta_\lambda\left(\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{\sigma}{2}\right\}\right) \neq 0.$$

sağlandığı açıktır. Bu yüzden,

$$\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{\sigma}{2}\right\} \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla

$$N \in \left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{\sigma}{2}\right\}$$

sağlayacak şekilde $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu durumda, $h.h.\nu$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_N,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0+\phi_0-\phi_N,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \leq \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_N,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) + \mathcal{H}_{\|\phi_N-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \sigma$$

yazılabilir. Sonuç olarak, G2NLU'da, (ϕ_ν), gradual λ-istatistiksel Cauchy dizisidir.

4. GRADUAL 2-NORMLU LİNEER UZAYLARDA IDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde gradual 2-normlu lineer uzayda dizilerin $\mathcal{J}$-yakınsaklığı, $\mathcal{J}^*$-yakınsaklığı kavramları ile birlikte gradual $\mathcal{J}$-Cauchy ve gradual $\mathcal{J}^*$-dizisi kavramları verilecek, bu kavramlar arasındaki ilişki teoremlerle ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 4.1. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU, $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ bir dizi ve $\mathcal{J} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Her ç $\in (0,1]$ ve $\varrho > 0$ için

$$\mathcal{D}(\varrho) = \left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}\ (\text{ç}) \geq \varrho\right\}$$

$\mathcal{J}$'ya aitse, (ϕ_ν) dizisi, ϕ_0'a gradual $\mathcal{J}$-yakınsaktır denir, ve $\mathcal{J}^{2N}(\mathcal{G}) - \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_0$ veya $\mathcal{J}^{2N} - \lim_{\nu\to\infty} \|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}} = 0$ ile gösterilir.

Bununla birlikte

(i) $\mathcal{J}_f$, $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{J}_f$ uygun ideal ise bu durumda $\mathcal{J}_f$-yakınsaklık ile gradual yakınsaklık çakışmaktadır.
(ii) $\mathcal{J}_\delta = \{U \subseteq \mathbb{N}: \delta(U) = 0\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{J}_\delta$ uygun ideal ise $\mathcal{J}_\delta$-yakısaklık ile istatistiksel yakınsaklık çakışmaktadır.

Şimdi ise, G2NLU' de, gradual $\mathcal{J}$-yakınsaklığına bir örnek verilecektir.

Örnek 4.1. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\delta$ olsun. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$' de (ϕ_ν) dizisi

$$\phi_\nu = \begin{cases} (0,\nu), & \text{eğer } \nu = s^2, s \in \mathbb{N} \\ (0,0), & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $\phi_0 = (0,0)$ ve $w = (w_1, w_2)$ olsun. Her ç $\in (0,1]$, $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ ve $\forall \sigma > 0$ için

$$\left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_\mathcal{P}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \{1,4,9,16,\dots,\nu^2,\dots\}$$

yazılır.

Her $\varsigma \in (0,1]$, $\forall\sigma > 0$ ve $\forall 0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\delta\left(\nu \in \mathbb{N}\ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_\mathcal{P}}\ (\varsigma) \geq \sigma\right) = 0$$

elde edilir. Bu ise $st^{2N}(\varsigma) - \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_0$ olduğunu gösterir. Ancak, (ϕ_ν) dizisi $(\mathcal{Y}, \|.,.\|)$'de ϕ_0'a gradual yakınsak değildir.

Aşağıdaki teoremle $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_\mathcal{P})$'de, gradual $\mathcal{J}$-yakınsaklığın hem toplama hem de skaler çarpma işlemine göre lineer olduğunu gösterilecektir.

Teorem 4.1. Her $w \in \mathcal{Y}$ için, $\mathcal{J}$ uygun ideal olmak üzere

(i) Eğer $\mathcal{J}^{2N}(\varsigma) - \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_0$ ve $\mathcal{J}^{2N}(\varsigma) - \lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \phi_1$ ise, o zaman, $\mathcal{J}^{2N}(\varsigma) - \lim_{\nu\to\infty} (\phi_\nu + y_\nu) = \phi_0 + \phi_1$,

(ii) $\mathcal{J}^{2N}(\varsigma) - \lim_{\nu\to\infty} q\phi_\nu = q\phi_0$, $q \in \mathbb{R}$

sağlanır.

İspat. **(**i) $\sigma > 0$ olsun. Herhangi bir $w \neq 0$ için $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{J}$ olacak şekilde

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(\varsigma) \coloneqq \left\{\nu : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_\mathcal{P}}\ (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{2}\right\}$$

ve

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(\varsigma) \coloneqq \left\{\nu : \mathcal{H}_{\|y_\nu-\phi_1,w\|_\mathcal{P}}\ (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{2}\right\}$$

kümeleri tanımlansın.

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\varsigma) \coloneqq \left\{\nu: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu + y_\nu - (\phi_0 + y_1), w\|_{\mathcal{P}}} (\varsigma) \geq \sigma\right\}$$

olsun.

Bu durumda, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ kapsama ilişkisi sağlandığından istenilen elde edilir.

(ii) $\mathcal{J}^{2N}(\varsigma) - \lim\limits_{\nu \to \infty} \phi_\nu = \phi_0, q \in \mathbb{R}$ ve $q \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}} (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{|q|}\right\} \in \mathcal{J}$$

elde edilir.

Tanım 4.1' e göre,

$$\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|q\phi_\nu - q\phi_0, w\|_{\mathcal{P}}} (\varsigma) \geq \sigma\right\} = \left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}} (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{|q|}\right\}$$

yazılır.

Bu durumda,

$$\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}} (\varsigma) \geq \frac{\sigma}{|q|}\right\} \in \mathcal{J}$$

olduğundan

$$\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|q\phi_\nu - q\phi_0, w\|_{\mathcal{P}}} (\varsigma) \geq \sigma\right\} \in \mathcal{J}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{J}^{2N}(\varsigma) - \lim\limits_{\nu \to \infty} q\phi_\nu = q\phi_0$ bulunur.

$\{r_1, r_2, \dots, r_d\}$ $\mathcal{Y}$'nin bir bazı olsun.

Lemma 4.1. $\mathcal{J}$ uygun ideali olsun. $\mathcal{Y}$' de (ϕ_ν) dizisi, gradual $\mathcal{J}$-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, \dots, d$ için $\mathcal{J}^{2N} - \lim\limits_{\nu \to \infty} \|\phi_\nu - \phi_0, r_i\|_{\mathcal{P}} = 0$ sağlanmasıdır.

Lemma 4.2. $\mathcal{J}$ uygun ideali olsun. $\mathcal{Y}$' de (ϕ_ν) dizisi, gradual $\mathcal{J}$-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{J}^{2N} - \lim_{\nu\to\infty} \|\phi_\nu - \phi_0\|_\infty^{\mathcal{P}} = 0$ sağlanmasıdır.

Lemma 4.3. $\mathcal{J}$ uygun ideali olsun. $\mathcal{Y}$' de (ϕ_ν) dizisi, gradual $\mathcal{J}$-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}(\sigma) = \{\nu \in \mathbb{N}: \phi_\nu \notin B_r(\phi_0, \sigma)\} \in \mathcal{J}$ sağlanmasıdır.

Tanım 4.2. $\mathcal{J} \subset 2^{\mathbb{N}}$ aşikar olmayan ideal olsun. Her ç $\in (0,1]$, $\forall\sigma > 0$ ve $\forall w \in \mathcal{Y}$ için

$$\left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_{N(\sigma,w)}, w\|_{\mathcal{P}}} (\text{ç}) \geq \sigma\right\} \in \mathcal{J}$$

koşulunu sağlayan $N = N(\sigma, w)$ mevcut ise G2NLU' de, (ϕ_ν) dizisi, gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisi denir.

Şimdi ise yeni dizi uzayları tanımlanacak ve özellikleri verilecektir.
$(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ herhangi bir G2NLU ve $\mathcal{S}(2-\mathcal{Y})(\mathcal{P})$, $\mathcal{Y}$-değerli gradual dizilerin uzayı olsun. $\mathcal{S}(2-\mathcal{Y})(\mathcal{P})$'nın hem skalerle çarpma hem de toplama işlemine göre lineer bir uzay olduğu açıktır.

$f: \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ dönüşümü, her $\phi, t \in \mathcal{Y}$ için

(i) $f(\theta) = 0$ (burada θ, uzayın sıfır elemanıdır);
(ii) $f(\phi) = f(-\phi)$;
(iii) $f(\phi + t) \leq f(\phi) + f(t)$;
(iv) $\delta^m \to \delta (m \to \infty)$ ve $f(\phi^m - \phi) \to 0$ $(m \to \infty)$, $f(\delta^m\phi^m - \delta\phi) \to 0$ $(m \to \infty)$

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{Y}$ üzerinde bir paranorm olarak adlandırılır.

$$l(2-\beta)(\mathcal{P}) := \left\{\phi \in S(2-\mathcal{Y})(\mathcal{P}): \sum_u \mathcal{H}_{\|\phi_\nu, w\|_{\mathcal{P}}{}^{\beta_\nu}} (\text{ç}) < \infty, \forall w \in S(2-\mathcal{Y})(\mathcal{P})\right\}.$$

şeklinde dizi uzayı tanımlansın. Bu uzayın topolojik özellikleri verilecektir.

Lemma 4.4. $l(2-\beta)(\mathcal{P})$ dizi uzayı bir lineer uzaydır.

İspat. $\beta_\nu > 0$, $(\forall\nu)$, $T = \sup\beta_\nu$ ve $k_\nu, n_\nu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$|k_\nu + n_\nu|^{\beta_\nu} \leq R\{|k_\nu|^{\beta_\nu} + |n_\nu|^{\beta_\nu}\}, \qquad R = \max\{1, 2^{T-1}\}.$$

geçerlidir.

Dolayısıyla, eğer $|\xi| \leq X$ ve $|\alpha| \leq M$, $(X, M \in \mathbb{Z})$ ve $r, s \in l(2-\beta)(\mathcal{P})$ ise, o zaman,

$$\mathcal{H}_{\|\xi r+\alpha s,w\|_{\mathcal{P}}{}^{\beta_\nu}}\ (\varsigma) < RX^T\mathcal{H}_{\|r,w\|_{\mathcal{P}}{}^{\beta_\nu}}\ (\varsigma) + RM^T\mathcal{H}_{\|s,w\|_{\mathcal{P}}{}^{\beta_\nu}}\ (\varsigma)$$

elde edilir. İstenilen sonuca, ν değişkeni üzerinden eşitsizliğin her iki tarafından toplam alınarak ulaşılır.

Tanım 4.3. $z_\nu = \sum_{i=1}^{\nu}\mathcal{H}_{\|\phi_i,w\|_{\mathcal{P}}{}^{\beta_i}}\ (\varsigma)$ ve $\mathcal{J}$ uygun ideal olsun. Bu durumda

$$l^{\mathcal{J}}(2-\beta)(\mathcal{P}) = \left\{\phi \in S(2-\mathcal{Y}) : \left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|z_\nu - z,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \sigma, \forall w \in S(2-\mathcal{Y})(\mathcal{P})\right\} \in \mathcal{J}\right\}$$

şeklinde gradual dizi uzayı tanımlanır.

Teorem 4.2. $\mathcal{J}$ uygun ideali olsun. $l^{\mathcal{J}}(2-\beta)(\mathcal{P})$ gradual dizi uzayı bir lineer uzaydır.

Teorem 4.3. $l(2-\beta)(\mathcal{P})$ uzayı, $f: l(2-\beta)(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan paranormuna göre $0 < \beta_i \leq \sup\beta_i = T$, $R = \max(1, T)$ olmak üzere

$$f(\phi) = \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|\phi_i,w\|_{\mathcal{P}}{}^{\beta_i}}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}}$$

şeklinde paranormlu bir uzaydır.

İspat. (i) $f(\theta) = \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|\theta_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}} = 0.$

(ii) $f(-\phi) = \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|-\phi_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}} = \left(\sum_i \mathcal{H}_{|-1|\|\phi_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}} = f(\phi).$

(iii) $f(\phi + t) = \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|\phi_i + t_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}}$

$$\leq \left(\sum_i \left(\mathcal{H}_{\|\phi_i, w\|_{\mathcal{P}}{}^{\frac{\beta_i}{R}}}(\varsigma)\right)^R\right)^{\frac{1}{R}} + \left(\sum_i \left(\mathcal{H}_{\|t_i, w\|_{\mathcal{P}}{}^{\frac{\beta_i}{R}}}(\varsigma)\right)^R\right)^{\frac{1}{R}} = g(\phi) + g(t)$$

(iv) $\delta^n \to \delta\ (n \to \infty)$ ve $f(\phi^n - \phi) \to 0, (n \to \infty)$ olsun.

$$f(\delta^n \phi^n - \delta\phi) = \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|\delta^n \phi_i^n - \delta\phi_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}}$$

$$\leq |\delta|^{\frac{T}{R}} \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|\phi_i^n - \phi_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}} + \left(\sum_i \mathcal{H}_{|\delta^n - \delta|\|\phi_i, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikte, $f(\phi^n - \phi) \to 0, (n \to \infty)$ olduğundan sağ taraftaki ilk terim sıfıra yakınsaktır. Aynı zamanda, ikinci terim de $\delta^n \to \delta, (n \to \infty)$ olduğundan sıfıra yakınsaktır. Böylece $l(2-\beta)(\mathcal{P})$ uzayı paranorm uzaydır.

Teorem 4.4 Eğer $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ sonlu boyutlu 2-Banach uzayı ise $(l(2-\beta), p)(\mathcal{P})$ uzayı tamdır.

İspat. (ϕ^n), $(l(2-\beta), p)(\mathcal{P})$ paranormlu uzayda gradual Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $\varsigma > 0$ için ve her $k, n > U_0$ için

$$f(\phi^n - \phi^k) = \left(\sum_i \mathcal{H}_{\|\phi_i^n - \phi_i^m, w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}} < \varsigma$$

sağlayan $U_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece, $\left(\mathcal{H}_{\|\phi_i^n-\phi_i^m,w\|_{\mathcal{P}}}{}^{\beta_i}(\varsigma)\right)^{\frac{1}{R}} < \varsigma$ sağlanır. Sonuç olarak, (ϕ^n), $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ uzayında bir gradual Cauchy dizisidir. Aynı zaman da $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$, gradual 2-Banach lineer uzayı olduğundan $\mathcal{H}_{\|\phi_i^n-\phi_i,w\|_{\mathcal{P}}}(\tau) \to 0, (n \to \infty)(\forall w \neq 0)$ sağlacak bir $\phi \in \mathcal{Y}$ elemanı vardır.

$\mathcal{J}$ uygun ideali (AP) koşulunu sağlasın.

Lemma 4.5. $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU ve $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ dizisi $\phi_0 \in \mathcal{Y}$'ya gradual $\mathcal{J}$-yakınsak ise $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{P}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$ sağlayan $T = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < \cdots\}$ şeklinde $T \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ kümesi mevcuttur.

İspat. $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için, $\mathcal{J}^{2N}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{G}}}(\varsigma) = 0$ olsun. Bu durumda $\varsigma \in (0,1]$, $\varrho > 0$ ve $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için

$$\mathcal{D}(\varsigma,\varrho) = \left\{\nu \in \mathbb{N}\ : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \varrho\right\} \in \mathcal{J}$$

sağlanır. $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$T_j = \left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{1}{j}\right\}$$

tanımlansın. Bu durumda $j \in \mathbb{N}$ için $T_j \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ olduğu açıktır. Her $j \in \mathbb{N}$ ve $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için

$$\mathcal{F}_j = \mathbb{N} \setminus T_j = \left\{\nu \in \mathbb{N}: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \frac{1}{j}\right\} \in \mathcal{J}$$

olur. Dolayısıyla $T = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < \cdots\}$ sağlayan $T \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ mevcuttur. Her $\nu \in T$ için $t_\nu = \phi_\nu$ olacak şekilde $t \in \mathcal{Y}$ dizisi ve $\nu \notin T$ için ve her $\nu \in T$ için $t_\nu = \phi_0$ olacak şekilde dizi tanımlansın. Bu ise $\mathcal{P}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|t_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$ yani $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için

$\mathcal{P}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0$ olmasıdır.

Tanım 4.4. $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU olsun. $(\phi_\nu)\in\mathcal{Y}$ dizisi, $\phi_0\in\mathcal{Y}$ a gradual $\mathcal{J}^*$-yakınsak olması için gerek ve yeterli koşul her $\forall w\neq 0\in\ \mathcal{Y}$ için $\mathcal{P}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0$ sağlayan $T=\{i_1<i_2<\cdots<i_\nu<\cdots\}$ şeklinde $T\in\mathcal{F}(\mathcal{J})$ kümesinin olmasıdır. Bu yakınsaklık $\mathcal{J}^{*,2N}-\lim_{\nu\to\infty}\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}=0$ ile gösterilecektir.

Lemma 4.6. $\mathcal{J}$, *(AP)* koşulunu sağlayan uygun ideal $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$, keyfi bir G2NLU olsun. Herhangi bir $w\neq 0\in\ \mathcal{Y}$ için, $\mathcal{J}^{2N}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0$ olması için gerek ve yeterli koşul $\mathcal{P}-\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0$ sağlayacak şekilde $T=\{i_1<i_2<\cdots<i_\nu<\cdots\}$ şeklinde $T\in\mathcal{F}(\mathcal{J})$ kümesinin olmasıdır.

Tanım 4.5 $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU ve $\mathcal{J}\subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. $(\phi_\nu)\in\mathcal{Y}$ dizisinin gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $\phi_T=\left(\phi_{i_\nu}\right)\in\ \mathcal{Y}$ alt dizisinin $T=\{i_1<i_2<\cdots<i_\nu<\cdots\}$ için $T\in\mathcal{F}(\mathcal{J})$ iken gradual Cauchy dizi olmasıdır. Bu ise

$$\mathcal{P}-\lim_{\rho,\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_{i_\rho},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0$$

olması demektir.

Şimdi G2NLU'da gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi ve gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizi arasıdaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.5. $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU olsun. Eğer $(\phi_\nu)\in\mathcal{Y}$ gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi ise bu durumda gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisidir.

İspat. $\phi=(\phi_\nu)$, 2-normlu G2NLU'da gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $\varrho>0$, $\forall w\neq 0\in\ \mathcal{Y}$ ve $\nu,\rho>\phi_0(\varrho)$ için, $\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_{i_\rho},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\varrho$ olacak şekilde $T\in\mathcal{F}(\mathcal{J})$ sağlayan $T=\{i_1<i_2<\cdots<i_\nu<\cdots\}$ kümesinin var olmasıdır.

$N=N(\varrho)=i_{\nu_0+1}$ olsun. Her $\varrho>0$, $\forall w\neq 0\in\ \mathcal{Y}$ ve $\nu>\nu_0$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_N,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \varrho$$

elde edilir. $\mathcal{F} = \mathbb{N} \setminus T$ olsun. $\mathcal{F} \in \mathcal{J}$ olur.

$$\mathcal{D}(\varrho) = \left\{\nu \in \mathbb{N} \ : \mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_N,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \varrho\right\} \subset \left(\mathcal{F} \cup \left\{i_1 < i_2 < \cdots < i_{\nu_0}\right\}\right) \qquad (4.1)$$

kapsamı geçerlidir. (4.1)'in sağ tarafı idealin elemanı olduğundan, her $\varrho > 0$ için $\mathcal{D}(\varrho) \in \mathcal{J}$ sağlayacak şekilde $N = N(\varrho)$ vardır. Bu ise $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisi olduğunu göstermektedir.

Aşağıdaki teorem G2NLU'da gradual $\mathcal{J}^*$-yakınsaklık dizisi ve gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisi arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 4.6. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU ve $\mathcal{J}$ uygun ideal olsun. Eğer $\mathcal{J}^{*,2N} - \lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$ ise, $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisidir.

İspat. Eğer $\mathcal{J}^{*,2N} - \lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$ sağlanıyorsa $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{P} - \lim_{\nu\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$ sağlayacak şekilde $T = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < \cdots\}$ şeklinde $T \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ kümesi vardır. Dolayısıyla her $\varrho > 0$, $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ ve $\nu > \nu_0$ için,

$$\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{\varrho}{2}$$

sağlayacak şekilde $\nu_0 = \nu_0(\varrho)$ mevcuttur.
Her $\varrho > 0$, $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ ve $\nu > \nu_0$, $\rho > \nu_0$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_{i_\rho},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) + \mathcal{H}_{\|\phi_{i_\rho}-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{2} = \varrho$$

olduğundan

$$\mathcal{P} - \lim_{\nu,\rho\to\infty}\mathcal{H}_{\|\phi_{i_\nu}-\phi_{i_\rho},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$$

elde edilir.

Diğer bir ifadeyle $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$, gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisidir. Teorem 4.5'e göre, $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}'$de gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisidir.

Sonuç 4.1. $\mathcal{J}$, *(AP)* koşulunu sağlayan uygun ideal $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$, keyfi bir G2NLU olsun. Her $w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için, $\mathcal{J}^{2N} - \lim_{\nu\to\infty} \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0$ ise, bu durumda $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$, gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisidir.

$\mathcal{J}$, *(AP)* koşulunu sağlayan uygun ideal olmak üzere, gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizi ve gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi kavramlarının örtüştüğü ispatlanacaktır.

Teorem 4.7. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU ve $\mathcal{J}$, *(AP)* koşulunu sağlayan uygun ideal olsun. Bu durumda gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizi ve gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi kavramları çakışır.

İspat. Teorem 4.5'e göre $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ dizisinin gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy iken gradual $\mathcal{J}$-Cauchy olduğu açıktır. $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$'nin gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisi iken gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

$(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}'$nin gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $\varrho > 0$, $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için

$$\mathcal{D}(\varrho) = \left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_N, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geq \varrho\right\} \in \mathcal{J}$$

sağlayacak şekilde $N = N(\varrho)$ vardır.

$$T_j = \left\{\nu \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_{\left\|\phi_\nu - \phi_{i_j}, w\right\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) < \frac{1}{j}\right\}, j = 1,2, \ldots$$

biçiminde küme tanımlansın. Burada, $i_j = N\left(\frac{1}{j}\right)$ olup $T_j \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ olduğu açıktır.

$\mathcal{J}$, *(AP)* koşulunu sağlayan uygun ideal olduğundan, $T \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ sağlayan $T \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur ve $T \setminus T_j$ kümesi sonludur.

Şimdi, her $w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için

$$\mathcal{P}-\lim_{\substack{\nu,i\to\infty\\ \nu,i\in T}}\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_i,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0$$

ispatlanacaktır. Bunun için $\varrho>0$ ve $k>\frac{2}{\varrho}$ olacak şekilde $k\in\mathbb{N}$ alınsın.

Eğer $\nu,i\in T$ için $T\setminus T_k$ sonlu bir kümedir. Bu durumda, her $\nu,i>\nu(k)$ için, $i\in T_k$ ve $\nu\in T_k$ olacak şekilde $\nu=\nu(k)$ vardır. Dolayısıyla, her $\nu,i>\nu(k)$ ve $\forall w\neq 0\in\mathcal{Y}$ için, $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_{\nu_k},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\frac{1}{k}$ ve $\mathcal{H}_{\|\phi_i-\phi_{\nu_k},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\frac{1}{k}$ olur. Dolayısıyla, her $\nu,i>\nu(k)$ ve $\forall w\neq 0\in\mathcal{Y}$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_i,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_{\nu_k},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)+\mathcal{H}_{\|\phi_i-\phi_{\nu_k},w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\frac{1}{k}+\frac{1}{k}<\varrho$$

elde edilir. Herhangi bir $\varrho>0$, her $\nu,i>\nu(k)$ ve $\nu,i\in T\in\mathcal{F}(\mathcal{J})$ için

$$\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_i,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)<\ \varrho,\ \ \forall w\neq 0\in\ \mathcal{Y}$$

olacak şekilde $\nu=\nu(k)$ vardır. Böylece, $(\phi_\nu)\in\ \mathcal{Y}'$de gradual $\mathcal{J}^*$-Cauchy dizisi olduğunu gösterilmiştir.

Tanım 4.6. $\mathcal{J}\subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Her $\varrho,\alpha>0$ ve $\forall w\neq 0\in\ \mathcal{Y}$ için

$$\left\{t\in\mathbb{N}:\frac{1}{t}\left|\left\{\nu\leqslant t:\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)\geqslant\varrho\right\}\right|\geqslant\alpha\right\}\in\mathcal{J},$$

sağlanıyorsa $(\phi_\nu)\in\ \mathcal{Y}$ dizisi $\phi_0\in\ \mathcal{Y}$ elemanına gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $\mathcal{J}^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P})-st\text{−}\lim_{\nu\to\infty}\phi_\nu=\phi_0$ ile gösterilir.

Not 4.2. $(\mathcal{Y},\|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU ve $\{\phi_\nu\}\in\mathcal{Y}'$de herhangi bir dizi olsun. $w=\vec{0}$ (0 vektör) olarak alınırsa $\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)=0\ngeqslant\varrho$ olduğundan

$$\left\{t\in\mathbb{N}:\frac{1}{t}\left|\left\{\nu\leqslant t:\mathcal{H}_{\|\phi_\nu-\phi_0,w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma)\geqslant\varrho\right\}\right|\geqslant\alpha\right\}=\emptyset$$

elde edilir.

Şimdi, G2NLU'da gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak dizi için limitinin tekliği ispatlanacaktır.

Teorem 4.8.$(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU, $\mathcal{J} \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal ve $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{Y}$ olsun. $\forall w \neq 0 \in \mathcal{Y}$ için, eğer $\mathcal{J}^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - st{-}\lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_0$ ve $\mathcal{J}^{2\mathrm{N}}(\mathcal{P}) - st{-}\lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_1$
ise, bu durumda $\phi_0 = \phi_1$ olur.

İspat. $\phi_0 \neq \phi_1$ olarak alınsın. Bu durumda $\phi_0 - \phi_1 \neq \vec{0}$ veya $\phi_0 - \phi_1$ ve w lineer bağımsız olsun. Her $\varrho, \alpha > 0$ için

$$\frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\phi_0-\phi_1, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant 2\alpha, \quad \alpha > 0$$

olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|(\phi_0-\phi_\nu)+(\phi_\nu-\phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu-\phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \\ &\quad + \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu-\phi_0), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} &\left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu-\phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| < \alpha\right\} \\ &\qquad \subseteq \left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu-\phi_0), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \alpha\right\}. \end{aligned}$$

bulunur. Ancak

$$\delta_{\mathcal{J}}\left(\left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu-\phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| < \alpha\right\}\right) = 0$$

olur ki $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_1$ gerçeği ile çelişmiş olunur. Dolayısıyla $\phi_0 = \phi_1$

olmalıdır.

Teorem 4.9. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU, $\mathcal{J} \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

(i) Eğer $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}\phi_\nu = \phi_0$, $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}t_\nu = \phi_1$ ise, $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}(\phi_\nu + t_\nu) = \phi_0 + \phi_1$ sağlanır.
(ii) Eğer $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}\phi_\nu = \phi_0$ ise $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}q\phi_\nu = q\phi_0,\ q \in \mathbb{R}$

sağlanır.

İspat. (i) Her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}\phi_\nu = \phi_0$, $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}t_\nu = \phi_1$ olsun. O zaman, $\delta_{\mathcal{J}}(U_1) = 0$ ve $\delta_{\mathcal{J}}(U_2) = 0$ sağlayacak şekilde

$$U_1 = U_1(\varrho) := \left\{t \in \mathbb{N}: \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t: \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu - \phi_0), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$$

ve

$$U_2 = U_2(\varrho) := \left\{t \in \mathbb{N}: \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t: \mathcal{H}_{\|(\phi_\nu - \phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

kümeleri tanımlansın.

$$U = U(\varrho) := \left\{t \in \mathbb{N}: \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t: \mathcal{H}_{\|(t_\nu + \phi_\nu) - (\phi_0 - \phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \alpha\right\}$$

olsun. $\delta_{\mathcal{J}}(U) = 0$ olduğunu göstermek için, $U \subset U_1 \cup U_2$ kapsama ilişkisini göstermek yeterlidir. $\nu_0 \in U$ varsayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t: \mathcal{H}_{\|(\phi_{\nu_0} + t_{\nu_0}) - (\phi_0 - \phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \alpha. \tag{4.2}$$

yazılır. Tersini kabul edelim. ν_0, U_1 ve U_2'nin birleşimi olmadığını varsayalım. $\nu_0 \notin U_1$ ve $\nu_0 \notin U_2$ olsun. Eğer $\nu_0 \notin U_1$ ve $\nu_0 \notin U_2$ ise

$$\frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,\phi_{\nu_0}-\phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| < \frac{\alpha}{2},$$

ve

$$\frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,t_{\nu_0}-\phi_1, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| < \frac{\alpha}{2}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,(\phi_{\nu_0}+t_{\nu_0})-(\phi_0-\phi_1), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,\phi_{\nu_0}-\phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| + \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,t_{\nu_0}-\phi_1, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \\
&\qquad < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha
\end{aligned}$$

bulunur, bu da (4.2) ile çelişir. Böylece $\nu_0 \in U_1 \cup U_2$ olup $U \subset U_1 \cup U_2$ elde edilir. Her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}(\phi_\nu + t_\nu) = \phi_0 + \phi_1$$

ispatlanmıştır.

(ii) $\mathcal{J}^{2N} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty}\phi_\nu = \phi_0$, $q \in \mathbb{R}$ ve $q \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,(\phi_\nu-\phi_0), w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \frac{\varrho}{|q|}\right\}\right| \geqslant \alpha\right\} \in \mathcal{J} \tag{4.3}$$

yazılır. $\|q\phi_\nu - q\phi_0, w\| = |q|\|\phi_\nu - \phi_0, w\|$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,q\phi_\nu-q\phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \alpha\right\} \\
&\qquad = \left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\,q\phi_\nu-q\phi_0, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \frac{\varrho}{|q|}\right\}\right| \geqslant \alpha\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{J}^{2N} - \text{st} - \lim_{\nu\to\infty} q\phi_\nu = q\phi_0,\ q \in \mathbb{R}$ sağlanır.

G2NLU $\mathcal{Y}'$nin boyutu $2 \leqslant d < \infty$ olmak üzere d ve $r = \{r_1, r_2, \dots, r_d\}$ ise $\mathcal{Y}$ için bir baz olsun.

Lemma 4.7. $\mathcal{J}$ uygun bir ideal olsun. $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ dizisi, $y \in \mathcal{Y}'$e gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, \dots, d$ için $\mathcal{J}^{2N} - \text{st} - \lim_{\nu\to\infty} \| \phi_\nu - \phi_0, r_i \|_{\mathcal{P}} = 0$ olmasıdır.

İspat. Eğer her $i = 1, \dots, d$ için $\mathcal{J}^{2N} - \text{st} - \lim_{\nu\to\infty} \| \phi_\nu - \phi_0, r_i \|_{\mathcal{P}} = 0$ sağlandığında, her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{J}^{2N} - \text{st} - \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $w \in \mathcal{Y}$ ve bazı $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ için $w = \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_d r_d$ yazılabilir ve üçgen eşitsizliği uygulandığında her $\nu \in \mathbb{N}$ için

$$\| \phi_\nu - \phi_0, w \|_{\mathcal{P}} \leqslant |\alpha_1| \| \phi_\nu - \phi_0, r_1 \|_{\mathcal{P}} + \dots + |\alpha_d| \| \phi_\nu - \phi_0, r_d \|_{\mathcal{P}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t} \left| \left\{ \nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\| \phi_\nu - \phi_0, w \|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho \right\} \right| \geqslant \alpha \right\} \\ &\qquad \subseteq \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t} \left| \left\{ \nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\| \phi_\nu - \phi_0, r_1 \|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \frac{\varrho}{|\alpha_1|} \right\} \right| \geqslant \alpha \right\} \cup \cdots \\ &\qquad \cup \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t} \left| \left\{ \nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\| \phi_\nu - \phi_0, r_d \|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \frac{\varrho}{|\alpha_d|} \right\} \right| \geqslant \alpha \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Kapsamın sağ tarafı ideale ait olduğundan, sol tarafının da ideale ait olur. Her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{J}^{2N} - \text{st} - \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu = \phi_0$ gösterilmiş olur.

Lemma 4.8. $\mathcal{J}$ uygun bir ideal olsun. $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ dizisi, $\phi_0 \in \mathcal{Y}'$a gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeterli koşul

$$\mathcal{J}^{2\mathrm{N}} - \text{st} - \lim_{\nu\to\infty} \max \left\{ \mathcal{H}_{\| \phi_\nu - \phi_0, r_i \|_\infty^{\mathcal{P}}}(\varsigma) = 0, i = 1, \dots, d \right\} = 0$$

sağlamasıdır.

$r = \{r_1, r_2, \dots, r_d\}$ bazı kullanılarak, $\mathcal{Y}$ üzerinde $\|.,.\|_\infty^{\mathcal{Y}}$ normu

$$\|\phi_\nu\|_\infty^{\mathcal{Y}} := \max\left\{\mathcal{H}_{\|\phi_\nu, r_i\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) : i = 1, \dots, d\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.9. $\mathcal{J}$ uygun ideal olsun. $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ dizisi, $y \in \mathcal{Y}'$e gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, \dots, d$ için, $\mathcal{J} - \mathrm{st} - \lim_{\nu\to\infty} \| \phi_\nu - \phi_0, r_i\|_\infty^{\mathcal{P}} = 0$ sağlanmasıdır.

Elde edilen $\|.,.\|_\infty^{\mathcal{Y}}$ normuna göre, ϕ_0 merkezli ve ϱ yarıçaplı, $B_r(\phi_0, \varrho)$ yuvarları

$$B_r(\phi_0, \varrho) := \left\{x : \mathcal{H}_{\|\phi_0 - x, w\|_\infty^{\mathcal{Y}}}(\varsigma) \leqslant \varrho\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$\|\phi_0 - x, w\|_\infty^{\mathcal{Y}} = \max\{\, \|\phi_0 - x, r_i\|_\infty^{\mathcal{Y}}, \qquad i = 1, \dots, d\,\}$$

olarak alınmıştır.

Lemma 4.10. $\mathcal{J}$ uygun ideal olsun. $(\phi_\nu) \in \mathcal{Y}$ dizisi, $y \in \mathcal{Y}'$e gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta_{\mathcal{J}}(\mathcal{D}_n(\varrho)) = 0$ sağlanmasıdır, burada $\mathcal{D}_t(\varrho) = \left\{\nu \leqslant t : \phi_\nu \notin B_y(\phi_0, \varrho)\right\}$ şeklindedir.

Tanım 4.7. $(\mathcal{Y}, \|.,.\|_{\mathcal{P}})$ G2NLU olsun. Her $\varrho > 0$, $\alpha > 0$ ve her $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\delta_{\mathcal{J}}\left(\left\{t \in \mathbb{N} : \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t : \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_N, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \alpha\right\}\right) = 0$$

sağlayacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ mevcut ise $\{\phi_\nu\} \in \mathcal{Y}$ dizisine gradual $\mathcal{J}$-istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bu $0 \neq w \in \mathcal{Y}$ için

$$\left\{t \in \mathbb{N}: \frac{1}{t}\left|\left\{\nu \leqslant t: \mathcal{H}_{\|\phi_\nu - \phi_N, w\|_{\mathcal{P}}}(\varsigma) \geqslant \varrho\right\}\right| \geqslant \alpha\right\} \in \mathcal{J}$$

şeklinde de ifade edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, gradual 2-normlu lineer uzaylar (G2NLU) alanında gradual istatistiksel yakınsamanın derinlemesine incelenmesine odaklanmıştır. Araştırmamız, gerçel sayı dizilerinin G2NLU içindeki dizilere genişleyen gradual istatistiksel yakınsama özelliklerini açıkça ortaya koymaktadır. Ayrıca, G2NLU içinde gradual istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanıtmış ve bu tür uzaylarda bir dizinin gradual istatistiksel Cauchy dizisi olarak nitelendirilmesi için kriterler belirlemiştir. Bu çalışma, matematiksel çerçevedeki bu kavramların uygulanabilirliğini ve özgün özelliklerini aydınlatarak, G2NLU bağlamında gradual istatistiksel yakınsamanın derinlemesine bir anlayışını sağlamaktadır.

Araştırmamız ayrıca, gradual $\mathcal{J}$-yakınsama normlu uzaylar kavramını incelemekte, gradual 2-norm kullanarak yeni dizi uzaylarını tanıtmakta ve detaylı bir şekilde incelemektedir. G2NLU içinde gradual $\mathcal{J}$-yakınsaklık ve gradual $\mathcal{J}$-Cauchy dizileri kavramlarını ele alarak, bu sınıflar arasındaki ilişkiyi derinlemesine irdelemekte ve bu sınıflarla ilgili önemli bulgular sunmaktadır.

Bu çalışmanın sonuçları, gradual 2-normlu lineer uzaylar alanında yapılan ileri araştırmalara ışık tutacak niteliktedir. Gelecekteki çalışmalarda, G2NLU içindeki gradual istatistiksel yakınsama ve gradual $\mathcal{J}$-yakınsama kavramlarının farklı dizi uzaylarına nasıl genişletilebileceği ve bu uzaylarda başka hangi matematiksel yapıların incelenebileceği üzerinde durulabilir. Ayrıca, bu uzayların pratik uygulamaları ve bu teorilerin istatistiksel analiz ve mühendislik problemlerine nasıl uygulanabileceği üzerine çalışmalar önerilebilir. Bu yönde yapılan çalışmalar, G2NLU ve benzeri matematiksel yapıların anlaşılmasını derinleştirecek ve yeni bilimsel keşiflere kapı aralayabilecektir.

KAYNAKLAR

Aiche, F. ve Dubois, D. (2012). Possibility and gradual number approaches to ranking methods for random fuzzy intervals, *In Advances in Computational Intelligence. IPMU 2012. Communications in Computer and Information Science*, vol. 299, ed. S. Greco, B. Bouchon-Meunier, G. Coletti, M. Fedrizzi, B. Matarazzo, and R.R. Yager, Berlin: Springer, 9-18.

Choudhury, C. ve Debnath, S. (2021). On $\mathcal{J}$-convergence of sequences in gradual normed linear spaces. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 36(3): 595-604.

Choudhury, C. ve Debnath, S. (2022a). On lacunary statistical convergence of sequences in gradual normed spaces. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 49(2): 110-119.

Choudhury, C. ve Debnath, S. (2022b). On $\mathcal{J}$-statistical convergence of sequences in gradual normed spaces. *Matematički Vesnik*, 74(3): 218-228.

Das, P. ve Ghosal, S.K. (2010). Some further results on $\mathcal{J}$-Cauchy sequences and condition (AP). *Computers & Mathematics withApplications*, 59(8): 2597-2600.

Debnath, S. ve Rakshit, D. (2018). On $\mathcal{J}$-statistical convergence. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 13(2): 101-109.

Dubois, D. ve Prade, H. (2007). Gradual elements in a fuzzy set. *Soft Computing*, 12: 165-175.

Ettefagh, M., Azari, F.Y. ve Etemad, S. (2020). On some topological properties in gradual normed spaces. *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics*, 35(3): 549-559.

Ettefagh, M., Etemad, S. ve Azari, F.Y. (2020). On some properties of sequences in gradual normed spaces. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(4): 2050085.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2: 241-244.

Fortin, J., Dubois, D. ve Fargier, H. (2008). Gradual numbers and their application to fuzzy interval analysis. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16: 388-402.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313.

Kişi, Ö. ve Choudhury, C. (2023). Rough statistical convergence of sequences in gradual normed linear spaces. *The Journal of Analysis*, 31: 1511.

Kostyrko, P., Salát, T. ve Wilczyński W. (2000). $\mathcal{J}$-convergence. *Real Analysis Exchange*, 26(2): 669-686.

Kumar, V. ve Kumar, K. (2008). On the ideal convergence of sequence of fuzzy numbers.

Information Sciences, 178(24): 4670-4678.

Lietard, L. ve Rocacher, D. (2009). Conditions with aggregates evaluated using gradual numbers. *Control & Cybernetics*, 38: 395-417.

Nabiev, A., Pehlivan, S. ve Gürdal, M. (2007). On $\mathcal{J}$-Cauchy sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(2): 569-576.

Sadeqi, I. ve Azari, F.Y. (2011). Gradual normed linear space. *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 8(5): 131-139.

Savaş, E. ve Das, P. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Applied Mathematics Letters*, 24: 826-830.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, 66(5): 361-375.

Stock, E.A. (2010). Gradual Numbers and Fuzzy Optimization, Doktora Tezi, University of Colorado Denver, Denver, America.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8: 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:	
Doğum Yeri ve Tarihi	:	

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi	:	
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	
Bildiği Yabancı Diller	:	
Bilimsel Faaliyet/Yayınlar	:	

İş Deneyimi

Stajlar	:	
Projeler ve Kurs Belgeleri	:	
Çalıştığı Kurumlar	:	

İletişim

E-Posta Adresi	:	

Tarih	:	…/…/… (Tez Savunma Tarihi)