SOYUT MATEMATİK

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

İki Önermenin Denkliği

rnek // p ve q herhangi iki önerme olduğuna göre

$(p \vee q) \wedge p' \equiv p' \wedge q$ olduğunu gösterin.

p	q	p'	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p'$	$p' \wedge q$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

Temel Özellikler =

Teorem: p, q, r herhangi önermeler ; f doğru bir önermeyi, t'de yanlış bir önermeyi göstermek üzere aşağıdaki özellikler vardır :

1- $p \vee p \equiv p$ ($\vee$'nın ayrılık, tek kuvvet özelliği.)

2- $p \wedge p \equiv p$ ($\wedge$'nın " " " " .)

3- $p \vee q \equiv q \vee p$ ($\vee$'nın değişme özelliği.)

4- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ($\wedge$'nın " " .)

5- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ($\vee$'nın birleşme özelliği.)

6- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ ($\wedge$'nın " " .)

7- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\wedge$ nın $\vee$ üzerine dağılma özelliği.) soldan

8- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ($\vee$'nın $\wedge$ " " " .) soldan.

9- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ($\vee$'nın $\wedge$ " " " .) sağdan

10- $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ ($\wedge$ nın $\vee$ " " " .) sağdan

11- $(p \vee t) \equiv p$, $p \vee f \equiv f$ ($\vee$'nın özdeşlik özellikleri.)

12- $p \wedge t \equiv t$, $p \wedge f \equiv p$ ($\wedge$ nın " " .)

13- $p \vee p' \equiv f$ ($\vee$'nın tamlama özelliği.)

14- $p \wedge p' \equiv t$ ($\wedge$ nın " " .)

15- $(p')' \equiv p$ (' ın " " .)

16- $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ($\vee$'nın Demorgan özelliği)

17- $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ ($\wedge$ nın " ") ispat// $p \vee p \equiv p$

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

ispat// $p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

t: yanlış

f = doğru

ispat// $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

r	p	q	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

ispat// $p \wedge t \equiv t$

p	t	$p \wedge t$
1	0	0
1	0	0
0	0	0
0	0	0

ispat// $p \vee t \equiv p$

p	t	$p \vee t$
1	0	1
1	0	1
0	0	0
0	0	0

ispat// $p \vee f \equiv f$

p	f	$p \vee f$
1	1	1
1	1	1
0	1	1
0	1	1

ispat// $p \wedge f \equiv p$

p	f	$p \wedge f$
1	1	1
1	1	1
0	1	0
0	1	0

ispat// $(p')' \equiv p$

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

ispat// $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

p	q	$(p \vee q)'$	p'	q'	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

ispat// $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

p	q	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Teorem: P ve q herhangi iki önerme olmak üzere

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

ispat//

p	q	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Teorem: P ve q iki ön. olsun.

ispat// $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$$(p \Rightarrow q) \equiv (p' \vee q) \text{ (Teoremden)}$$
$$\equiv (q \vee p') \text{ (} \vee \text{ nın değişme öz.)}$$
$$\equiv (q')' \vee p' \text{ (önerme öz.)}$$
$$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p') \text{ (Teoremden)}$$

Problemler:

1) Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk tablolarını düzenleyin.

a) $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$

p	q	r	$p \vee r$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0

c) $[q' \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p'$

p	q	p'	$q' \wedge (p \Rightarrow q)$			$[q' \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p'$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

$\Rightarrow p'$

b) $(p \Rightarrow p) \vee (p \Rightarrow p')$

p	p'	$p \Rightarrow p'$	$(p \Rightarrow p) \vee (p \Rightarrow p')$		
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1

$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

d)

p	q	r	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$f(x)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2) " p: Havalar soğuktur." " q: Yağmur yağıyor." olduğuna göre, aşağıdaki önermeleri düzgün birer cümleyle ifade edin;

a- p' : Havalar soğuk değildir.

b- $p \wedge q$ Havalar soğuk ve yağmur yağıyor.

c- $p \vee q$ Havalar soğuk veya yağmur yağıyor.

d- $q \Leftarrow p$ Yağmur yağdığı için havalar soğuk.

e- $p \Rightarrow q'$ Havalar soğuk ise yağmur

f- $q \vee p'$: Yağmur yağıyor veya havalar soğuk değil.

g- $p' \vee q'$: Havalar soğuk değil veya yağmur yağmıyor

h- $p' \Rightarrow q'$: Havalar soğuk değilse yağmur yağmıyor.

i- $(q')'$: Yağmurun yağmadığı doğru değildir.

k- $(p \wedge q') \Rightarrow p$: Havalar soğuk ve yağmur yağmıyor

③ P: "O uzun boyludur." q: "O esmerdir." ise aşağıdakileri ifade ediniz:

a- O uzun boylu ve esmerdir. $(p \wedge q)$

b- Onun kısa boylu ve esmer olduğu doğru değildir. $(p' \wedge q)' \equiv p \vee q'$

c- O ne uzun boyludur ne de esmerdir. $p' \wedge q'$

④ Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin,

a) Eğer 3+2=7 ise 4+4=8 dir. $p' \Rightarrow q \longrightarrow 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ //

b) 2+2=5 in doğru olması için gerek ve yeter şartın 4+4=10 olduğu doğru değildir.

$(p' \Leftrightarrow q')' \longrightarrow (0 \Leftrightarrow 0)' \equiv 0$ //

c) Samsun, Marmara Bölgesindedir. Ya da Karadeniz Bölgesi Türkiye'nin batısındadır.

$(p' \vee q') \longrightarrow (0 \vee 0) \equiv 0$ //.

⑤ Aşağıdaki bileşik önermeleri, önerme özelliklerinden yararlanarak en basit şekilde yazın,

a- $(p \vee q')' \equiv p' \wedge q$

~~b~~- $(p' \Rightarrow q)' \equiv \cancel{p \Rightarrow q'}$

c- $(p \wedge q')' \equiv p' \vee q \equiv q \vee p' \equiv (q')' \vee p'$

$\equiv q \Rightarrow p' \equiv p \Rightarrow q$

d- $(p' \wedge q')' \equiv (p \vee q)$

~~e~~- $(p' \Leftrightarrow q)' \equiv \cancel{p \Leftrightarrow q'}$

f- $(p' \Leftrightarrow q')' \equiv \cancel{p \Leftrightarrow q}$

⑥ Aşağıdaki önermeleri değişik biçimlerde ifade edin;

a) Havanın yağmurlu ve soğuk olduğu doğru değildir. $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

b) Kar yağıyor ise hava soğuktur önermesi doğru değildir. $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$

c) "Gülün kırmızı olması için gerek ve yeter şart menekşenin mor olmasıdır." önermesi doğru değildir. $(p \Leftrightarrow q)'$

⑤ b- $(p' \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

ⓔ $(p' \Leftrightarrow q)' \equiv \left[(p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')\right]' \equiv \left[((p')' \vee q) \wedge (q' \vee p')\right]' \equiv \left[(p \vee q) \wedge (q' \vee p')\right]'$

$\equiv \underbrace{(p' \wedge q')}_{r} \vee (q \wedge p)$

$\equiv r \vee (q \wedge p) \equiv (r \vee q) \wedge (r \vee p)$

$\equiv \left[(p' \wedge q') \vee q\right] \wedge \left[(p' \wedge q') \vee p\right]$

$\equiv \left[(p' \vee q) \wedge (q' \vee q)\right] \wedge \left[(p' \vee p) \wedge (q' \vee p)\right]$

$\equiv \left[(p' \vee q) \wedge f\right] \wedge \left[f \wedge (q' \vee p)\right]$

$\equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \equiv p \Leftrightarrow q$

Soru // $p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Soru // $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Soru // $p \Rightarrow (q \vee r) \overset{?}{\equiv} (p \Rightarrow q) \vee r$

p	q	r	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Soru // $p' \Leftrightarrow q'$ uyuşma mıdır?

p	q	p'	q'	$p' \Leftrightarrow q'$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

totoloji

$$p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$$

$$p' \Leftrightarrow q' \equiv (p' \Rightarrow q') \wedge (q' \Rightarrow p') \equiv \left[(p')' \vee q'\right) \wedge \left((q')' \vee p'\right]$$

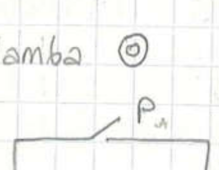
$$\equiv (p \vee q') \wedge (q \vee p') \equiv (q \vee p') \wedge (p \vee q') \equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv p \Leftrightarrow q$$

Önermelerin Elektrik Devrelerine Uygulanması :

En basit bir elektrik devresinde; bir anahtar

bir lamba akım kaynağı vardır.

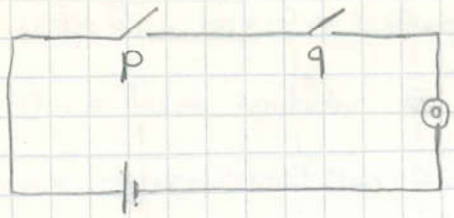


p : "P anahtarı kapalıdır" "Devreden akım geçer" "Lamba yanar" doğru ise, "P anahtarı açıktır" "devreden akım geçmez" "lamba yanmaz" önermeleri de yanlıştır.

$p \Rightarrow q$ nun doğruluk değeriyle ifade edilir.

Seri Bağlı Devreler :

p ve q gibi iki anahtar bulunan bir devreyi düşünelim.

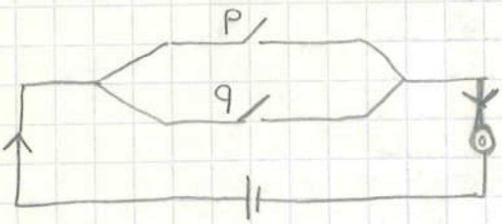


$p \wedge q$ nun doğru olduğu zaman lamba yanar aksi halde lamba yanmaz.

p	q	$p \wedge q$	
1	1	1	→ yanar
1	0	0	yanmaz.
0	1	0	
0	0	0	

Paralel Bağlı Devreler :

p ve q gibi iki anahtar bulunan bir devreyi düşünelim.



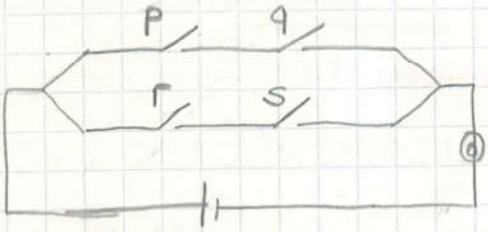
$p \vee q$ doğru ise lamba yanar aksi halde lamba yanmaz.

p	q	$p \vee q$	
1	1	1	yanar
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	→ yanmaz.

Karışık Devreler :

Bir devrede, seri ve paralel bağlı anahtar varsa karışık devredir.

Soru



$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ p

Lambanın yanması için gerek ve yeter şart nedir?

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$	
1	1	1	1	1	1	1	geçer
1	1	1	0	1	0	1	
1	1	0	1	1	0	1	
1	1	0	0	1	0	1	
1	0	1	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	1	— geçer
0	1	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	1	1	— geçer
0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	

Teoremler İçin İspat Yolları :

Teoremler $p \Rightarrow q$ ve $p \Leftrightarrow q$ şeklinde olur. p hipotez, q hükümdür. İki ispat metodu vardır.

a- Tümevarım metodu (ilkesi).

b- Tümdengelim " " .

Teorem (Tümdengelim İlkesi)

p, q, r herhangi üç önerme olmak üzere $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin doğru olduğu durumlarda $p \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow q$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Tümdengelim ilkesinden faydalanarak teoremler iki türlü ispatlanır.

1- Doğrudan ispat

2- Dolaylı ispat

Doğrudan İspat :

$p \Rightarrow q$ teoremi veriliyor. Bu teoremin doğruluğunu ispatlamak istersek,

$p \Rightarrow r_1$, (özellik, tanım, teorem) (p nin doğruluğundan r_1 doğru önermesi)

$r_1 \Rightarrow r_2$, (. . . . .) (r_1 in " r_2 " ")

$r_2 \Rightarrow r_3$, (. . . . .) (r_2 nin " r_3 " ")

⋮

$r_{n-1} \Rightarrow r_n$ (. . . . .) (r_{n-1} in " r_n " ")

$r_n \Rightarrow q$

$(p \Rightarrow r_1 \wedge r_1 \Rightarrow r_2) \Rightarrow (p \Rightarrow r_2)$ de doğrudur.

$(p \Rightarrow r_2 \wedge r_2 \Rightarrow r_3) \Rightarrow (p \Rightarrow r_3)$ "

⋮

$(p \Rightarrow r_n \wedge r_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ de doğrudur.

Teoremler İçin İspat Yolları :

Teoremler $p \Rightarrow q$ ve $p \Leftrightarrow q$ şeklinde olur. p hipotez, q hükümdür. İki ispat metodu vardır.

a- Tümevarım metodu (ilkesi).

b- Tümdengelim " " .

Teorem (Tümdengelim İlkesi)

p, q, r herhangi üç önerme olmak üzere $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin doğru olduğu durumlarda $p \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow q$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Tümdengelim ilkesinden faydalanarak teoremler iki türlü ispatlanır.

1- Doğrudan ispat

2- Dolaylı ispat

Doğrudan İspat :

$p \Rightarrow q$ teoremi veriliyor. Bu teoremin doğruluğunu ispatlamak istersek,

$p \Rightarrow r_1$, (özellik tanım teorem .....) (p nin doğruluğundan r_1 doğru önermesi)

$r_1 \Rightarrow r_2$, (..........) (r_1 in " r_2 " ")

$r_2 \Rightarrow r_3$, (..........) (r_2 nin " r_3 " ")

⋮

$r_{n-1} \Rightarrow r_n$ (..........) (r_{n-1} in " r_n " ")

$r_n \Rightarrow q$

$(p \Rightarrow r_1 \wedge r_1 \Rightarrow r_2) \Rightarrow (p \Rightarrow r_2)$ de doğrudur.

$(p \Rightarrow r_2 \wedge r_2 \Rightarrow r_3) \Rightarrow (p \Rightarrow r_3)$ "

⋮

$(p \Rightarrow r_n \wedge r_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ de doğrudur.

Örnek// n doğal sayısı tek ise n^2 doğal sayısı da tektir.

$n=2k+1$

İspat $\quad \overset{p}{n \text{ tek ise}}$ $\quad n=\overset{r_1}{2k+1}$ (teksayı tanımı)

$n=\overset{r_1}{2k+1} \Rightarrow n^2=\overset{r_2}{(2k+1)^2}$ (n yerine değeri yazılarak)

$n^2=(2k+1)^2 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1$ (Doğal sayılarda çarpma işlemi)

$n^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2=2(2k^2+2k)+1$ (ortak çarpan parantezine alma)

$n^2=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2=2r+1$ ($r=2k^2+2k$ yazılarak)

$n^2=2r+1 \Rightarrow n^2$ tek sayıdır (tek sayı teoremi)

n tek ise n^2 tektir.

Dolaylı İspat :

1) $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ olmayana ergi metodu ile ispat.

Örnek $\quad \underset{p}{3X+2 \neq 5}$ ise $\underset{\Rightarrow}{}$ $\underset{q}{2X+3 \neq 5}$ doğruluğunu ispatlayınız?

$q' : 2X+3=5 \Rightarrow 3X+2=5 : p'$

$2X+3=5 \Rightarrow 2X+3=2+3$ (Doğal sayılarda toplama)

$2X+3=2+3 \Rightarrow 2X=2$ (Doğal sayılarda sadeleştirme)

$2X=2 \Rightarrow X=1$ (" " çarpma işlemi sadeleştirme öz.)

$X=1 \Rightarrow 3X=3$ (" " çarpma, her iki taraf 3 ile çarp.)

$3X=3 \Rightarrow 3X+2=3+2$ (iki tarafı 2 ile toplamak)

$3X+2=3+2 \Rightarrow 3X+2=5$ (toplama işlemi)

$3X+2 \neq 5 \Rightarrow 2X+3 \neq 5$

2) $(p \Rightarrow q) \equiv p' \vee q \equiv ((p')' \wedge q')' \equiv (p \wedge q')'$

$p \Rightarrow q$ nun doğruluğunu ispatlama yerine, $p \wedge q'$ in yanlış olduğunu ispatlarsak, teoremin doğruluğunu ispatlamış oluruz.

$p \wedge q' \equiv r \wedge r'$ Çelişki bulma yöntemi.

Örnek // $\underbrace{2X+3=5}_{p}$ $\underbrace{\text{ise}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{3X+2=5}_{q}$ olduğunu ispatlayınız?

$p \wedge q' : (2X+3=5 \ \wedge \ 3X+2 \neq 5)$

$\Rightarrow (2X+3=2+3) \wedge (3X+2 \neq 3+2)$ (Toplama işlemi)

$\Rightarrow (2X=2) \ \wedge \ (3X \neq 3)$ (Top. iş. sad. öz)

$\Rightarrow (X=1) \ \wedge \ (X \neq 1)$ (çarp. iş. sad. öz)

$p \Rightarrow q$ doğru $p \wedge q'$ yanlıştır.

Bir Önermenin Yanlış Olduğunu Gösterme :

① $p \Rightarrow q$ veriliyor. Aksine bir örnek bulma metodu.

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$

Örnek // Bir doğal sayı 6 ve 4 ile bölünürse bu doğal sayı 24 ile de bölünür.

60 $6/60$ ve $4/60$ $24 \not| 60$ olduğu için yanlış.

$p: 6/60 \wedge 4/60$ doğrudur.

$q: 24/60$ yanlıştır.

$q': 24 \not| 60$ doğrudur. $p \wedge q'$ doğrudur.

$(p \wedge q')'$ yanlıştır, $p \Rightarrow q$ yanlıştır.

② Çelişki bulma metodu :

$p \Rightarrow q$ veriliyor.

$p \Rightarrow q$ (1. sonuç)

p nin doğruluğundan faydalanarak doğru olduğu bilinen bir r_1 önermesi elde edelim. $p \Rightarrow r_1$

r_1'in doğruluğundan, r_2 doğru önermesi elde ediliyor. $r_1 \Rightarrow r_2$

$p \Rightarrow r_1, \ r_1 \Rightarrow r_2, \ r_2 \Rightarrow r_3, \ldots, r_n \Rightarrow r$

$\Rightarrow p \Rightarrow r$ doğrudur. (2. Sonuç)

$p \Rightarrow q, \ p \Rightarrow r$

Sonuç : $p \Rightarrow q$ doğru değildir.

Örnek// "Bir doğal sayı tek ise, karesi çift sayıdır," önermesinin yanlış olduğunu ifade ediniz?

n doğal sayı, n^2 karesi olsun.

$n=2k+1$ tek ise, $n=2k$ çift ise.

İspat// $\underset{p}{n \text{ tek}} \underset{\Rightarrow}{\Rightarrow} \underset{q}{n^2}$ çifttir doğru olsun. (1. sonuç)

n tek $\Rightarrow n=2k+1$ (Tek doğal sayı tanımı)

$n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2$ (n yerine değeri yazılarak)

$n^2=(2k+1)^2 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1$ (Doğal sayılarda çarpma işlemi tanımı)

$n^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2=2(2k^2+2k)+1$ (Ortak parantez)

$n^2=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2=2k'+1$ $(2k^2+2k=k'$ yazılarak$)$

$n^2=2k'+1 \Rightarrow n^2$ tek sayıdır (Tek sayı tanımı)

n tek $\Rightarrow n^2$ tektir. (2. sonuç)

Sonuç: n tek ise n^2 çifttir önermesi yanlıştır.

Problemler:

1- Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu ispat edin.

a) n doğal sayısı tek ise asaldır.

b) n doğal sayısı asal ise tektir.

2- Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu ispat edin.

a) n doğal sayısı çift ise $(n+1)$ tektir.

b) $(n+1)$ doğal sayısı tek ise n çifttir.

c) $(m+n)$ doğal sayısı tek ise m veya n doğal sayısı tektir.

3- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) Her teoremin karşıtı da doğrudur.

b) Her teoremin tersi de doğrudur.

c) Her teoremin karşıt-tersi de doğrudur.

1) a- p: $n=9$ tektir.

q: $n=9$ asaldır. q': $n=9$ asal değildir.

$p \wedge q'$: "$n=9$ tektir ve asal değildir" doğrudur.

$(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ yanlıştır.

"$n=9$ tek ise asaldır" yanlıştır.

b- p: $n=9$ asaldır.

q: $n=9$ tektir. q': $n=9$ tek değildir.

$p \wedge q'$: $n=9$ asaldır ve tek değildir.

$(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ yanlıştır.

"$n=9$ asal ise tektir" yanlıştır.

2) a- p: n doğal sayısı çifttir.

q: $(n+1)$ " " tektir.

n çift $\Rightarrow$ $n=2k$ (çift sayı tanımı)

$n=2k \Rightarrow (n+1)=2k+1$ (yerine yazarak)

$(n+1)=2k+1 \Rightarrow n+1$ tek sayıdır. (Tek sayı tanımı)

n çift $\Rightarrow n+1$ tek sayıdır.

c- p: $(m+n)$ doğal sayısı tektir.

q: m veya n doğal sayısı tektir.

$p \Rightarrow q$: $(m+n)$ tek ise m veya n tektir.

i)) m çift olsun. $m=2r$

$m+n$ tek $\Rightarrow (m+n)=2k+1$ (Tek sayı tanımı)

$(m+n)=(2k+1) \Rightarrow 2r+n=2k+1$ ($m=2r$ yazılarak)

$2r+n=2k+1 \Rightarrow n=2k+1-2r$ (n çözülerek)

$n=2k+1-2r \Rightarrow n=2(k-r)+1$ (Çarpanlara ayırma)

$n=2(k-r)+1) \Rightarrow n$ tek sayıdır.

KÜME Herhangi bir topluluktur. (=cümle)

Kümeler, A, B, C..... gibi büyük harflerle gösterilir.

Meydana getirdiği topluluk, kümelerin elemanlarıdır. Elemanlar a, b, c gibi küçük harflerle gösterilir. Kümelerin elemanlarıyla gösterilmesi iki türlüdür.

1- Liste yöntemi (açık gösterim). $\{..., ..., ...\}$

Örnek// Türkiye'nin E harfiyle başlayan illerinin kümesi,

{Edirne, Eskişehir, Elazığ, Erzurum, Erzincan}

2- Özellik Yöntemiyle Gösterimi : $\{X : X$ in sağladığı özellikler$\}$

(kapalı gösterimi.)

Örnek// $\{X : X$ E harfiyle başlayan bir il$\}$

Örnek// $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A = \{X : X \text{ bir doğalsayı } 1 \leqslant x \leqslant 7\}$

$A = \{X : X \text{ bir doğal sayı } 0 < X^2 < 50\}$

- Eğer bir a elemanı bir A kümesine aitse, $a \in A$, "a eleman A" şeklindedir.
- " " " " " ait değilse, $a \notin A$ " a eleman değil A " dır.

İki Kümenin Eşitliği :

A ve B iki küme olsun. A ve B kümeleri aynı elemanlardan kurulmuşsa, iki kümeye eşittirler denir ve $A = B$ yazılır.

Örnek// $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $B = \{X : X \text{ bir doğal sayı } 1 \leqslant x \leqslant 7\}$ $A = B$ dir.

Alt Küme :

A ve B kümeleri verilsin.

$A \subset B$ veya $B \supset A$, A'nın her bir elemanı B'nin de elemanı ise, A kümesi B nin alt kümesidir. (B, A'yı kapsar.)

$A \not\subset B$, $B \not\supset A$ değilidir.

$A \subseteq B \Rightarrow (A = B$ veya $A \subset B$ doğru ise$)$

$B \supseteq A$

Eğer $A \neq B$ ve $A \subset B$ ise ; A kümesi, B kümesinin has (öz) alt kümesidir.

İki Kümenin Birleşimi :

A ve B kümeleri verilsin.

$A \cup B$: "A birleşim B" (A ve B de bulunan elemanlarla oluşan yeni küme.)

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$

İki Kümenin Kesişimi :

A ve B iki küme olmak üzere A ve B de ortak olan elemanların oluşturduğu yeni kümeye, iki kümenin kesişimi (arakesiti) denir.

$A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$

Boş Küme :

Hiçbir elemanı olmayan kümeye denir. ϕ, $\{\ \}$ şeklinde gösterilir.

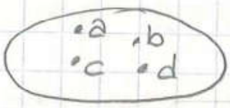
$\{x :$ x'in sağladığı özellikler $\}$

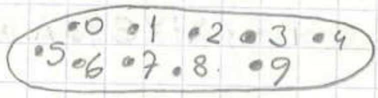
Örnek// $\{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 1 \wedge x \leqslant 1\} = \phi$

Venn Şeması

Bir kapalı şekil içine kümenin elemanları nokta halinde dizilir. Bu şekle Venn şeması denir.

Örnek// $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$





Açık Önerme

İçinde değişken (ya da değişkenler) bulunan ve bir hüküm bildiren ifadelere (cümlelere) açık önerme denir. Eğer bir tek değişken varsa; $p(x)$, $q(x)$ ---- gibi 1- değişkenli açık önerme denir. 2 değişken varsa; $p(x,y)$, $q(x,y)$ ---- gibi 2- değişkenli açık önerme denir.

Örnek// 1- x tamsayısı sıfırdan büyüktür.

2- $x = 3$ ve $y = 2$ dir.

3- $x^2 + y^2 = 1$ dir. İfadeleri birer açık önermedir.

Açık önermeden anlamsız ifadeler elde edilmesini önlemek için değişkenler yerine yazılan ifadeler (değerler) bir kümeden alınır. Bu kümeye açık önermenin tanım kümesi denir.

Örnek // X herhangi bir doğal sayı olmak üzere "$x+2>7$" dir. ifadesi doğal sayılar kümesinde tanımlı bir açık önermedir.

$p(x): x+2>7$ dir.

$x=2$ için $p(2)$: "$4>7$" önermesi yanlıştır. Doğruluk değeri 0. dır

$x=8$ için $p(8)$: "$10>7$" önermesi doğrudur. " " 1 dir.

Tanım : Bir A kümesinde tanımlı bir $p(x)$ açık önermesi verilsin. Bu açık önermede x yerine yazıldığında da hep doğru önermeler veren elemanların kümesine açık önermenin doğruluk kümesi denir.

Örnek // Doğal sayılar kümesinde tanımlı "$x+3>11$" açık önermesinin doğruluk kümesi nedir?

$\underset{\text{değer}}{D} = \{9, 10, 11, ...\}$ $\underset{\text{tanım}}{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, ...\}$

Örnek // Doğal sayılar kümesinde tanımlı $x+5<3$ açık önermesinin doğruluk kümesi nedir?

$D = \emptyset$ $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x+5<3\} = \emptyset$

Niceleyiciler :

1- Evrensel Niceleyici : $p(x)$, A kümesinde tanımlı bir açık önerme olsun.

"Her $x \in A$ için $p(x)$ dir." ifadesi bir önermedir.

Bu önerme $p(x)$'den elde edilen tüm önermeler doğru ise doğru, aksi halde yanlıştır.

"Her $x \in A$ için $p(x)$ tir." "$\forall x \in A, p(x)$"

$\forall$: (Her) : Evrensel niceleyici.

Örnek // $\forall k \in \mathbb{N}$ için $2k+1$ tek sayıdır.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $2k+1$ tektir.

Örnek // "$\forall x \in \mathbb{N}$ için $x+4>3$" $D=\mathbb{N}$

Sonuç = 1- $D \neq A$ ise önerme (doğruluk değeri) 0 dır.

2- $D=A$ ise " " 1 dir.

Örnek // "$\forall x \in \mathbb{N}$ için $x+2>8$"

$D=\{7,8,9,----\} \Rightarrow D \neq N$ yanlış bir önermedir.

2 - Varlıksal Niceleyici = $p(x)$, A kümesinde tanımlı bir açık önerme olsun. "En az bir $x \in A$ için $p(x)$ tir" ifadesi de bir önermedir. Bu önerme $p(x)$ den elde edilen önermelerden en az biri doğru olduğunda doğru, aksi halde yanlıştır.

En az bir $\equiv$ bazı

"Bazı $x \in A$ için $p(x)$ dir" "$\exists x \in A$, $p(x)$"

$\exists$: (Bazı = en az bir) : Varlıksal niceleyici.

Sonuç 1- $D=\emptyset$ ise yanlıştır.

2- $D \neq \emptyset$ ise doğrudur.

Örnek // "Bazı insanlar gözlüklüdür"

$D \neq \emptyset$ doğrudur.

Örnek // "$\exists x \in \mathbb{N}$ için $(x-1)(x+2)=0$ dır"

$D \neq \emptyset$ doğrudur. $x=1$ veya $x \neq -2$ için bu önerme sıfırdır.

Niceleyiciler ve Bağlaçlar :

$A=\{a_1, a_2, ----a_n\}$ kümesinde tanımlı bir açık önerme $p(x)$ olsun.

"$\forall x \in A$ için $p(x)$" $\equiv [p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge --- \wedge p(a_n)]$

"$\exists x \in A$ için $p(x)$" $\equiv [p(a_1) \vee p(a_2) \vee --- \vee p(a_n)]$

Niceleyicilerde Olumsuzluk

Teorem : A kümesinde tanımlı bir açık önerme $p(x)$ olsun.

a) $[\forall x \in A, p(x)]' \equiv [\exists x \in A, [p(x)]']$

b) $[\exists x \in A, p(x)]' \equiv [\exists x \in A, [p(x)]']$

İspat // a) i "$\forall x \in A$, $p(x)$" önermesi doğru ise $D=A$ doğrudur.

$\exists x \in A, [p(x)]'$ yanlıştır.

ii "$\forall x \in A,\ p(x)$" yanlış ise $D \neq A$

$\exists x \in A, [p(x)]'$ doğru olur.

$$[\forall x \in A, p(x)]' \equiv [\exists x \in A, [p(x)]']$$

b)

Niceleyicilerde Dağıtıcılık :

Teorem : Bir A kümesinde tanımlı iki açık önerme $p(x)$ ve $q(x)$ olsun.

a- $[\forall x \in A, [p(x) \wedge q(x)]] \equiv [[\forall x \in A, p(x)] \wedge [\forall x \in A, q(x)]]$

b- $[\exists x \in A, [p(x) \vee q(x)]] \equiv [[\exists x \in A, p(x)] \vee [\exists x \in A, q(x)]]$

ispat// $A = \{a_1, a_2, --- a_n\}$

a) $[\forall x \in A, p(x) \wedge q(x)] \equiv [p(a_1) \wedge q(a_1)] \wedge [p(a_2) \wedge q(a_2)] \wedge \ldots \wedge [p(a_n) \wedge q(a_n)]$

$\equiv [p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \ldots p(a_n)] \wedge [q(a_1) \wedge q(a_2) \wedge \ldots \wedge q(a_n)]$ ($\wedge$ nin birleşme ve değişme öz.)

$\equiv [\forall x \in A, p(x)] \wedge [\forall x \in A, q(x)]$

b) $[\exists x \in A, [p(x) \vee q(x)] \equiv [p(a_1) \vee q(a_1)] \vee [p(a_2) \vee q(a_2)] \vee \ldots \vee [p(a_n) \vee q(a_n)]$

$\equiv [p(a_1) \vee p(a_2) \vee \ldots p(a_n)] \vee [q(a_1) \vee q(a_2) \vee \ldots \vee q(a_n)]$ ($\vee$ nın birleşme ve değişme öz.)

$\equiv [\exists x \in A, p(x)] \vee [\exists x \in A, q(x)]$

Problemler :

1- $A = \{0,1,2,3,4\}$ ise A kümesinde tanımlanan, aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümesini bulun?

a) $x+3=10$ b) $x+3<5$ c) $x+3<10$ d) $x+3<7$

2- $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ise A kümesinde tanımlanan, aşağıdaki önermelerin yanlış olduğuna dair örnek verin?

a) $\forall x \in A, x+5<11$

d) $\forall x \in A$, x tektir.

b) $\forall x \in A, x^2>11$

c) $\forall x \in A$, x asaldır.

3- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$ c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \geq x$ d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

4- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in Z, \frac{x}{x} = 1$ c) $\forall x \in Z, (x^2 = 2x)'$

b) $\exists x \in Z, \frac{x}{x} = 1$ d) $\exists x \in Z, x = 2x$

5- $A = \{2,3,4,5\}$ ise aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin ve olumsuzlarını (değilini) bulun.

a) $\exists x \in A, x+3 = 10$ c) $\exists x \in A, x+3 < 5$

b) $\forall x \in A, x+3 < 10$ d) $\forall x \in A, x+3 \leq 7$

Çözümler:

1- a) $x+3 = 10$, $D = \emptyset$ boş küme. $x+1 \geq x \Rightarrow x+1 > x$ veya $x+1 = x$

b) $x+3 < 5$ $D = \{0,1\}$

c) $x+3 < 10$ $D = A$ doğru.

d) $x+3 < 7$ $D = \{0,1,2,3\}$

2- a) $\forall x \in A, x+5 < 11$, $x = 7$ ise $p(7): 12 < 11$ $D \neq A$ yanlış

b) $\forall x \in A, x^2 > 11$ $x = 3$ ise $P(3): 9 > 11$ $D \neq A$ yanlış.

c) $\forall x \in A$ x asaldır. $x = 9$ $D \neq A$ yanlış.

d) $\forall x \in A$ x tektir $x = 2$ ise $P(2) =$ çifttir $D \neq A$

3- a) $|x| = -x$ ise $D \neq A$ olur. yanlıştır.

b) $x+1 \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ doğrudur.

c) $\exists x \in \mathbb{R}$ $|x| = 0$ $x = 0$ ise $P(0): |x| = 0$ dır. doğrudur.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$ doğrudur $\{0,1\}$ için.

4- a) $\forall x \in Z, \frac{x}{x} = 1$ sıfır için $\frac{0}{0}$ olduğu için yanlıştır. Doğruluk değeri 0 dır.

b) $\exists x \in Z, \frac{x}{x} = 1$ doğrudur.

c) $\forall x \in Z, (x^2 = 2x)' \Rightarrow \forall x \in Z, x^2 \neq 2x$ 2 için yanlıştır. Yanlış 0 dır.

d) $\exists x \in Z, x = 2x$ doğrudur. $x = 0$ için.

3- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \geq x$
c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| = 0$
d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

4- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in Z, \frac{x}{x} = 1$
b) $\exists x \in Z, \frac{x}{x} = 1$
c) $\forall x \in Z, (x^2 = 2x)'$
d) $\exists x \in Z, x = 2x$

5- $A = \{2,3,4,5\}$ ise aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin ve olumsuzlarını (değilini) bulun.

a) $\exists x \in A, x+3 = 10$
b) $\forall x \in A, x+3 < 10$
c) $\exists x \in A, x+3 < 5$
d) $\forall x \in A, x+3 \leq 7$

Çözümler:

1- a) $x+3=10$, $D=\emptyset$ boş küme. $x+1 \geq x \Rightarrow x+1 > x$ veya $x+1 = x$

b) $x+3<5$ $D=\{0,1\}$

c) $x+3<10$ $D=A$ doğru.

d) $x+3<7$ $D=\{0,1,2,3\}$

2- a) $\forall x \in A, x+5<11$, $x=7$ ise $p(7): 12<11$ $D \neq A$ yanlış

b) $\forall x \in A, x^2>11$ $x=3$ ise $P(3): 9>11$ $D \neq A$ yanlış.

c) $\forall x \in A$ x asaldır. $x=9$ $D \neq A$ yanlış.

d) $\forall x \in A$ x tektir $x=2$ ise $P(2)=$ çifttir $D \neq A$

3- a) $|x| = -x$ ise $D \neq A$ olur. yanlıştır.

b) $x+1 \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ doğrudur.

c) $\exists x \in \mathbb{R}$ $|x|=0$ $x=0$ ise $P(0)$: $|x|=0$ dır. doğrudur.

d) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2=x$ doğrudur $\{0,1\}$ için.

4- a) $\forall x \in Z, \frac{x}{x}=1$ sıfır için $\frac{0}{0}$ olduğu için yanlıştır. Doğruluk değeri 0 dır.

b) $\exists x \in Z, \frac{x}{x}=1$ doğrudur.

c) $\forall x \in Z, (x^2=2x)' \Rightarrow \forall x \in Z, x^2 \neq 2x$ 2 için yanlıştır. Yanlış 0 dır.

d) $\exists x \in Z$, $x=2x$ doğrudur. $x=0$ için.

5- ⓐ $\exists x \in A,\ x+3=10$ $A=\{2,3,4,5\}$ yanlıştır. 0.

ⓑ $\forall x \in A,\ x+3<10$ doğrudur. 1 $D=A$ dır.

ⓒ $\exists x \in A,\ x+3<5$ $D=\emptyset$

ⓓ $\forall x \in A,\ x+3\leqslant 7$ yanlıştır. 0

– Alt Küme –

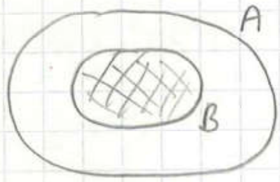
Tanım = A ve B iki küme olsun.

" $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ " önermesi doğru ise "A kümesi B kümesinin alt kümesidir" denir. (Veya B kümesi A kümesini kapsar denir.)

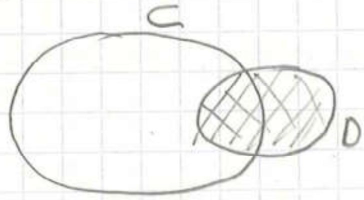
$A \subseteq B$ $((B \supseteq A)$ yazılır.

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B]}$$

A,B,C,D kümeleri verilirse.



$B \subseteq A$



$D \nsubseteq C$

Has Altküme =

Tanım = A, B nin alt kümesi ve $A \neq B$ ise. A, B nin has alt kümesidir denir. (öz)

$A \subset B$ yazılır.

Teorem = A,B,C herhangi kümeler olmak üzere

a- $A \subseteq A$ (yansıma özelliği)

b- $[A \subseteq B \land B \subseteq A] \Leftrightarrow A=B$ (ters simetri özelliği)

c- $[A \subseteq B \land B \subseteq C] \Rightarrow (A \subseteq C)$ (geçişme özelliği)

İspat// ⓐ $\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \subseteq A$

ⓑ $[A \subseteq B \land B \subseteq A] \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \land [\forall x \in B \Rightarrow x \in A]$

$\Leftrightarrow [\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow A = B$

ⓒ $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow (A \subseteq C)$

Alt küme tanımından

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \Rightarrow x \in C]$

$\Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in C)$ (Tümdengelim ilkesine göre)

$\Rightarrow (A \subseteq C)$ (Altküme tanımından.)

Teorem: Boş küme her kümenin alt kümesidir.

İspat// $x \in \emptyset$ yanlıştır. (Boş kümenin elemanı yoktur.)

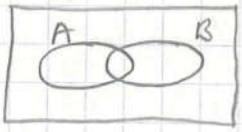
$\forall x \in \emptyset$ yanlış bir önermedir. (A herhangi bir küme olmak üzere)

$\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ doğrudur. $\Rightarrow \emptyset \subseteq A$ doğrudur.

Evrensel Küme :

Tanım: Bir araştırma ve inceleme v.s.'de sözü geçen tüm kümeleri kapsayan bir kümeye evrensel küme denir. E sembolü ile gösterilir.

E



Problemler :

1- $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$ ise aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a- $\{4,5\} \subset A$ c- $\{\{4,5\}\} \subset A$ e- $5 \in A$

b- $\{4,5\} \in A$ d- $\{5\} \in A$ f- $\{5\} \subset A$

2- A,B,C herhangi kümeler olmak üzere, $[A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ve $C \subseteq A]$ ise $A = B$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz?

① ⓐ yanlış ⓑ doğru ⓒ doğru ⓓ yanlış ⓔ yanlış ⓕ yanlış.

② $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge C \subseteq A] \Rightarrow A = B$

(Alt küme tanımından)

$[A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge C \subseteq A] \Rightarrow [(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in C) \wedge (\forall x \in C \Rightarrow x \in A)]$

$\Rightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)]$ (tümdengelim ilkesi)

$\Rightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (Alt küme tanımından)

Kümelerin bileşimi :

Tanım: A ve B iki küme olsun.

A ve B kümesinin tüm elemanlarıyla oluşan yeni kümedir.

$A \cup B$: "A bileşim B"