DOĞRUSAL CEBİR

Babamın Anısına ...

ve Aileme ...

Erhan GÜLER

Matrisler ve Lineer Denklem Sistemleri

Tanım: K halka, $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere,

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \dots$

$\dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$; elemanlarının,

$$\begin{array}{c} 1 \to \\ 2 \to \\ \\ \\ m \to \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = A = [a_{ij}] \left(\begin{array}{c} \leq i \leq \\ \leq j \leq \end{array} \text{ veya } [a_{ij}]_{m\times n} \right)$$

şeklinde ifade edilmesine K'da bir matris denir.

$a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \Rightarrow$ matrisin birinci satırıdır, diğerleri, 2., 3., ... m. satır. Yukarıdan aşağıya olanlar da sütunlardır.

NOT: i; matrisin satırını, j; sütununu gösterir. Matrisler büyük harfle gösterilir. $m \times n$ ye matrisin boyutu (tipi) denir.

(i,j) girişi; i. satır, j. sütundur.

Tanım: $\forall (i,j)$ için $a_{ij} = 0$ ise böyle matrislere sıfır matris denir. (O_m)

Tanım: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ iki matris olsun $\forall (i,j)$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A matrisi B matrisine eşittir.

Bütün $m\times n$ tipindeki matrislerin kümesini; K_n^m şeklinde yazarız.

$+ : K_n^m \times K_n^m \longrightarrow K_n^m$

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \longrightarrow [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} \underset{\downarrow}{+} b_{ij}]_{m\times n}$$

$(K, +, \cdot)$ daki toplamadır.

Özellikleri

1- Kapalılık öz.

2- $A + (B + C) = (A + B) + C$ Birleşme özelliği.

$$[a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = (A + B) + C$$

3- $\forall A \in K_n^m$, $\forall O_m$ için

$A + O_m = O_m + A = A$ etkisiz matris.

4- $A = [a_{ij}]$, $-A = [-a_{ij}]$ $\Rightarrow A + (-A) = (-A) + A = O_m$
Toplamaya göre tersi.

O halde $(K_n^m, +)$ bir gruptur. Değişmeli gruptur.

$A+B = B+A$ dır.

$\cdot : K_n^m \times K_p^n \longrightarrow K_p^m$

$([a_{ij}], [b_{ij}]) \longrightarrow [a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}]$

$(A, B) \rightarrow A.B = C \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{array}{c} \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} & \overset{3}{|} & \\ & | & \end{bmatrix} \qquad c_{23} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k3}$$

$= a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + \dots + a_{kn} b_{n3}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{m1} & a_{11}b_{1p} + a_{1n}b_{np} \\ - - - & - - - \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} \; - - - & a_{m1}b_{1p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}$$

Örnek 1 // $A = [1 \; -2 \; 4 \; 3]_{1 \times 4} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$ A ve B matrisleri tanımlı mıdır? Tanımlı ise bu matrisleri çarpınız.

$A.B = [2 + 0 - 4 + 0] = [-2]$

$$B.A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [1 \; -2 \; 4 \; 3]_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$AB \neq BA$

Örnek 2 // $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ AB ve BA yı hesaplayınız.

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matris Çarpımın Özellikleri

1- $\forall \in K_n^m, \; B \in K_p^m, \; C \in K_r^p$

$A(BC) = (AB)C$ birleşme öz

2- $A \in K_m^n \quad B, C \in K_p^m$

$A(B+C) = AB + AC$ dağılma öz.

$A, B \in K_m^n \quad C \in K_p^m$

$(A+B)C = AC + BC$

3- $A \in K_n^n$,
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad A.I_n = I_n A = A$$

etkisiz el. öz.

4- $\forall A \in K_n^n$ için, (Bir matris kare matris değilse çarpmaya göre tersi yoktur.)

$AB = BA = I_n$ olacak şekilde,

bir $B \in K_n^n$ <u>varsa</u> B ye A nın çarpmaya göre tersi denir ve

$A^{-1} = B$ şeklinde yazılır.

Sonuç 1// Bir matrisin tersi varsa tektir.

İspat// Kabul edelim ki, B_1 ve B_2 ; A'nın iki tersi olsun.

$B_1 = B_2$ olduğunu göstermeliyiz.

$AB_1 = B_1 A = I_n \qquad AB_2 = B_2 A = I_n$

$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2$

Sonuç 2// A ve B terslenebilir matrisler ise AB de terslenebilirdir,

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

İspat// $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$

Sonuç 3// $A_1, A_2, \ldots, A_n$ terslenebilir matrisler ise $A_1.A_2 \ldots A_n$'de terslenebilirdir ve bunun tersi

$(A_1.A_2 \ldots A_n)^{-1} = (A_n^{-1}.A_{n-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}.A_1^{-1})$

Sonuç 4// $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$(A^{-1})^{-1} = A$

3. $\odot : K \times K_n^m \longrightarrow K_n^m$, $k \in K$

$(k,A) \rightarrow k \odot A = [k a_{ij}]$

Tanım : $A \in K_n^m$, $A = [a_{ij}]$, $[a_{ji}] = A^t$ (transpoz A dır.)

Transpozun Özellikleri :

1- $(A+B)^t = A^t + B^t$

2- $k \in K$, $(kA)^t = kA^t$

3- $(A^t)^t = A$

4- $(AB)^t = B^t A^t$

Özel Matrisler

1- Köşegen elemanları dışında tüm elemanları sıfır olan matrise köşegen matris denir. Şayet, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$ ise bu matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2- A bir skaler matris ise ve A nın tersi var ise bu matrise regüler matris denir.

3- $A = A^t$ ise bu matrise simetrik matris denir.

$A = -A^t$ ise " " ters simetrik " ".

4- $A = (\bar{A})^t$ ise A ya hermit matris denir.

$A = -(\bar{A})^t$ ise " ters hermit " ".

5- $A^{-1} = A^t$ ise A'ya ortogonal matris denir.

6- $A^p = O_m$ olacak şekilde en küçük p^+ tamsayısı varsa A'ya nilpotent matris denir.

7- $A^2 = I_n$ ise A matrisine involitif matris denir. $(A^{-1} = A)$

(Tersi kendisine eşit olan matrise de involitif matris denir.

8- $A^2 = A$ ise A'ya idempotent matris denir.

Alıştırmalar

1- $A=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}$ matrisi idempotentmidir?

$$A.A=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3-5&-3-9+15&-5-15+25\\-1-3+5&3+9-15&5+15-25\\1+3-5&-3-9+15&-5-15+25\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}=A^2=A \quad \text{idempotenttir.}$$ //

2- $A=\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&0&-1\\-4&-4&x\end{bmatrix}$ matrisinin involutif $(A^2=I_3)$ olması için x ne olmalıdır?

$$A^2=\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&0&-1\\-4&-4&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&0&-1\\-4&-4&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16-3-12&12-12&12-3+3x\\-4+0+4&-3+0+4&-3+0-x\\-16+4-4x&-12+0-4x&-12+4+x^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&9+3x\\0&1&-3-x\\-12-4x&-12-4x&-8+x^2\end{bmatrix} \quad x=-3 \text{ alınmalı.}$$ //

3- $A=\begin{bmatrix}1&1+i&2\\1-i&3&i\\2&-i&0\end{bmatrix}$ matrisi hermit midir?

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1-i&2\\1+i&3&-i\\2&i&0\end{bmatrix}\Rightarrow(\overline{A})^t=\begin{bmatrix}1&1+i&2\\1-i&3&i\\2&-i&0\end{bmatrix}=A \quad \text{hermit olur.}$$ //

4- Bir hermit matrisin köşegen elemanlarının reel sayılar olduğunu gösteriniz. (Köşegen üzerinde enaz bir elemanı komplex olan matris hermit değildir.)

A hermit matris olsun. $A=(\overline{A})^t$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{a_{11}}&\overline{a_{21}}&\cdots&\overline{a_{m1}}\\\overline{a_{12}}&\overline{a_{22}}&\cdots&\overline{a_{m2}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\overline{a_{1m}}&\overline{a_{2m}}&\cdots&\overline{a_{mm}}\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}a_{11}=\overline{a_{11}}\\a_{22}=\overline{a_{22}}\\\vdots\\a_{mn}=\overline{a_{nm}}\end{matrix} \quad \overline{a}=a \Rightarrow a_{mn}\in\mathbb{R}$$

5- Nilpotent matrislerin tersinin olmadığını gösteriniz.

$A^p=O_m$ (p^+ tamsayı en küçük)

İspat// Kabul edelim ki tersi olsun. A^{-1} var olsun.

$p \geq 2$ almalıyız (Tanımlı olması için)

$A^p . A^{-1} = O_m . A^{-1}$ (her iki tarafı A^{-1} ile çarparak)

$A^{p-1} = O_m$ $(p-1>0)$

Bu bir çelişkidir. O halde nilpotent matrislerin tersi yoktur.

6- A regüler (A^{-1} var) bir matris ise $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ olduğunu gösteriniz.

$$\left.\begin{aligned} AA^{-1} = I_n &\Rightarrow (A^{-1})^t A^t = I_n \\ A^{-1}A = I_n &\Rightarrow A^t (A^{-1})^t = I_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

7- A simetrik bir matris ise $\forall a_i \in \mathbb{R}$ için

$M = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I_n$ ise M matrisi de simetriktir.

Gösteriniz.

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^t = A_1^t + A_2^t + \ldots + A_n^t$$

$$(A_1 A_2 \ldots A_n)^t = A_n^t A_{n-1}^t \ldots A_2^t A_1^t$$

$$M^t = (a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I_n)^t = (a_0 A^n)^t + (a_1 A^{n-1})^t + \ldots + (a_n I_n)^t$$

$$= a_0 (A^n)^t + a_1 (A^{n-1})^t + \ldots + a_n (I_n)^t$$

$$(A^n)^t = (A.A \ldots A)^t = \underbrace{A^t . A^t \ldots A^t}_{n \text{ tane}} = (A^t)^n$$

$$= a_0 (A^t)^n + a_1 (A^t)^{n-1} + \ldots + a_n (I_n)^t$$

$$= a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I_n$$

Olduğundan M simetrik bir matristir.

8- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+z & y+t \\ +4x-z & 4y-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x + z = 1$ $\quad 4x - z = 0$

$y + t = 0$ $\quad 4y - t = 1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$4x = z \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

$z = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, $5y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$ $\quad t = -\frac{1}{5}$

9- Her kare matrisin bir simetrik ve bir ters simetrik matrisin toplamı şeklinde yazılabildiğini gösteriniz. Ve bu yazılış tek türlüdür.

İspat// A, S, simetrik ; T, ters simetrik iki matris olmak üzere S ve T 'yi bulmaya çalışalım.

$S^t = S \qquad T^t = -T$

$A = S + T \Rightarrow A^t = S^t + T^t$

$A^t = S - T$

$A + A^t = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ //

$\Rightarrow T = A - S = A - \frac{1}{2}(A + A^t)$

$T = \frac{1}{2}(A - A^t)$ //

$S^t = \left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = S$

O halde S simetriktir.

$T^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -T$

O halde T ters simetriktir.

Bu yazılış, A 'ya bağlı olduğu için tek türlüdür.

Tanım: A, nxn tipinde bir matris olsun. Bileşenlerine $A = [a_{ij}]$ diyelim. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ toplamına, A matrisinin izi denir.

Özellikleri

1- $iz(A+B) = izA + izB$

İspat// $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \Rightarrow iz(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii})$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

$= izA + izB$ //

2- $k \in \mathbb{R}$, $iz(kA) = k\, izA$

İspat// $\sum k a_{ii} = k \sum a_{ii}$

3- $iz(AB) = iz(BA)$

$AB = C = [c_{ij}]$,

$BA = D = [d_{ij}]$ olsun.

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$

$iz(AB) = iz C = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} + \sum^{n} a_{2k} b_{k2} + \dots + \sum^{n} a_{nk} b_{kn}$

$iz(BA) = iz D = d_{11} + d_{22} + \dots + d_{nn}$

$= \sum^{n} b_{1k} a_{k1} + \dots\dots + \sum^{n} b_{nk} a_{kn}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1n} b_{n1} \\ b_{11} a_{11} + b_{21} a_{12} + \dots + b_{n1} a_{1n} \end{array}\right\} \Rightarrow iz(AB) = iz(BA) \; //$$

Tanım: A, B $n \times n$ tipinde iki matris olsun.

$B = P^{-1} A P$ olacak şekilde regüler P matrisi varsa A matrisi B matrisine benzerdir denir. Ve $A \approx B$ yazılır.

Soru 1// Her matris kendisine benzerdir. ?

$AA^{-1} = A^{-1} A$ $\quad A = A^{-1} A$ (tersi varsa doğrudur.)

Soru 2// $A \approx B$ ise $B \overset{?}{\approx} A$

$B = P^{-1} A P$ $\exists P$ regüler matrisi var.

$A = P B P^{-1} = (P^{-1})^{-1} B P^{-1}$

P regüler iken P^{-1} de regülerdir. $\Rightarrow B \approx A$ dır.

Soru 3// $A \approx B$ ve $B \approx C \Rightarrow A \approx C$?

$B = P^{-1} A P$

.

.

Soru 4// Benzer matrislerin izleri aynıdır. ?

$A \approx B \Rightarrow B = P^{-1} A P$ $\exists P$ reg.

$iz B = iz(P^{-1} A P) = iz A$ olduğunu göstermeliyiz.

$= iz\left(\underbrace{(P^{-1} A)}_{C} P\right) = iz\left(P (P^{-1} A)\right) = iz A \; //$

(iz. özellik 3 'den)

Elemanter İşlemler

1- Bir matrisin herhangi iki satırını (sütununu) yerdeğiştirmek.

2- Herhangi bir satırı (sütunu) bir k skaleri ile çarpmak.

3- Herhangi bir satırın (sütunun) k katını herhangi bir satıra (sütuna) eklemek.

örneğin; $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&-2\\1&2&3\end{bmatrix}$ $\quad \varepsilon_1=-2.1.sa.+3sa\rightarrow 3.sa$

$\varepsilon_2 = 3.2.sa$

Bu elemanter işlemler sonucunda elde edilen matrisler, verilen matrise denktirler denir. Ve $\backsim$ şeklinde yazılır.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&-2\\1&2&3\end{bmatrix}\backsim\underset{\varepsilon_1}{\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&-2\\-1&-4&3\end{bmatrix}}\backsim\underset{\varepsilon_2}{\begin{bmatrix}1&3&0\\0&3&-6\\-1&-4&3\end{bmatrix}}$$ olur.

Tanım: Elemanter işlemlerin birim matrise uygulanmasıyla elde edilen matrislere elemanter matrisler denir.

Örnek// $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad \varepsilon_1: -2.1sa+2sa\rightarrow 2.sa$

Tanım: (Bir matrisin eşalon formu)

A, mxn tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki şartları gerçekleyen bir matrise, A'nın satır eşalon formu denir.

1- $1\leq k\leq m$ şeklindeki k tamsayısı için, ilk k tane satır sıfırdan farklıdır. m-k tanesi sıfırdır.

2- Herbir i için, $(1\leq i\leq k)$ i. satırın ilk sıfırdan farklı bileşeni birdir. (1'dir.).

3- 1'in bulunduğu sütunun, 1'in altındaki tüm bileşenleri sıfırdır.

Tanım: (Bir matrisin indirgenmiş eşalon formu)

Önceki tanımdaki 1-2-3 şartlarına ilaveten;

4- 1'in bulunduğu sütunun üstündeki tüm bileşenler sıfır ise, bu taktirde bu forma indirgenmiş eşalon form denir.

Örnekler

1- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ indirgenmemiş

2- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ eşalon.

3- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ eşalon

4- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ indirgenmiş eşalon

5- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ " " "

6- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ indirgenmiş eşalon.

7- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ indirgenmiş.

Her matris, sonlu sayıda elemanter işlemler uygulanmak suretiyle eşalon forma getirilebilir.

Tanım: Bir matris, eşalon forma getirildiğinde sıfırdan farklı satırların sayısına bu matrisin rankı denir. (ve rank A diye yazılır.)

Örnekler :

1- $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ Matrisini ;

a) Satır eşalon forma,

b) İndirgenmiş satır eşelon forma getiriniz,

c) Rankını bulunuz.

a- $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -16 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 9/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -8 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 9/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 9/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ //

b- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 19/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/4 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 19/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ //

c- Rank $A = 4$

2- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Matrisinin indirgenmiş eşelon formunu bulunuz.

$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 16 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ indirgenmiş forma getiriniz.

$\sim \begin{bmatrix} +1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$

Tanım : A ; $m\times n$ B, $m\times n$; $[A \vdots B]$ şeklindeki matrise eklemeli (ilaveli) matris denir.

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$$

Sonuç : A, $n\times n$ tipinde bir kare matris olsun. A^{-1} in varolması için gerekli ve yeterli şart, A'nın indirgenmiş eşalon formunun I_n'ye denk olmasıdır. $(A \sim I_n)$

Not// Bir matrisin tersinin, indirgenmiş eşalon form ile bulunması ;

$[A \vdots I_n] \sim [I_n \vdots B]$, $A^{-1} = B$ olur.

Örnek//

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi var ise indirgenmiş eşalon form ile bulunuz.

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -15 & 15 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & 17 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/15 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4/17 & -1/17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/15 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/15 & 0 & -1/17 \end{array}\right]$$

$rank A \neq 3$ olduğundan tersi yoktur.

Örnek//

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi varsa bulunuz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Alıştırmalar

1- n. mertebeden bütün ortogonal matrisler (matrislerin çarpımı işlemine göre)

Q ; ortogonal matris kümesini gösterirsek

$Q: \{ A \in K_n^n \mid A^{-1} = A^t \}$, $(Q, \cdot)$ gruptur. Gösterelim.

i- $A, B \in Q$? $A.B \in Q$?

A ve B iki ortogonal matris iken A.B de ortogonal mıdır?

$$\left.\begin{array}{l} A^t = A^{-1} \\ B^t = B^{-1} \end{array}\right\} (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} = B^t.A^t = (A.B)^t$$

(A.B) ortogonal bir matristir.

ii- Matrislerin çarpımı işlemi.

iii- $\forall A \in Q$, $AI_n = I_nA = A$

$I_n \in Q$

iv- $\forall A \in Q$, $A^{-1} = A^t$, $A^{-1} \in Q$

$(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^t \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^t)^t \Rightarrow A = A$

O halde ortogonal matris kümesi, matris çarpımına göre gruptur.

2-

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$ Matrisi ortogonal mıdır?

($A^{-1} = A^t$ ise veya $A.A^t = I_n$ ise A ortogonal.)

İşlem kolaylığı için, $A.A^t = I_3$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}}+\frac{2}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ O halde, A matrisi ortogonaldir.

3- $d_1, d_2, \ldots, d_n \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \ldots & d_2 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ d_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$ Matrisinin tersini bulunuz.

Verilen matris $n \times n$ tipinde kare matristir.

$$[A \vdots I_n] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} d_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ Satırları değiştirerek}$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1/d_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1/d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1/d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 & 0 \\ 1/d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur.//}$$

Soru// A simetrik, B ortogonal matrisler ise,

$B^{-1}AB$ matrisinin simetrik olduğunu gösteriniz.

$A = A^t \Rightarrow A$ simetrik matristir.

$$\left.\begin{array}{l} A = A^t \\ B^{-1} = B^t \end{array}\right\} \text{ olursa } \quad B^{-1}AB \overset{?}{=} (B^{-1}AB)^t$$

$$= B^t A^t (B^{-1})^t$$

$$= B^t A^t (B^t)^{-1}$$

$$= B^t A^t (B^{-1})^{-1} = B^t A^t B \text{ //}$$

O halde $B^{-1}AB$ simetriktir.

Soru// $n \times n$ tipinde iki köşegen matrisin çarpımı da köşegen matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3} \text{ ise}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}_{3\times3} \text{ olur. O halde teorem doğrulanır.}$$

Soru// İndirgenmiş eşalon formdaki tüm 3×3 tipindeki matrisleri yazınız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek// $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisiyle değişimli olan 2×2 tipindeki tüm matrisleri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x,y,z,t \in \mathbb{R}$$

$$x+z = x \Rightarrow z = 0, \quad y+t = x+y \Rightarrow t = x, \quad z = z, \quad t = z+t \Rightarrow t = t$$

Lineer Denklem Sistemleri

Tanım:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \quad &(1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \quad &(2) \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \quad &(n) \end{aligned}$$

m bilinmeyenli, n tane denklem vardır. Eğer,

$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ ise bu denkleme homojen lineer denklem sistemi denir.

A; $n \times m$ tipinde bir matris ve $A = [a_{ij}]$,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \text{ formunda gösterilebilir.}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Özel olarak, $B = 0_m$ olmak üzere

$AX = 0_m$ homojen denklem sistemidir.

Lineer Homojen Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Teorem: A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $AX = 0$ homojen denklem sistemini ele alalım. rank $A = r$ olsun.

$AX = 0_m$ homojen denklem sisteminin her zaman çözümü vardır. Bu da sıfır çözümdür. ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ alınırsa)

i- $r < m$ ise (m, bilinmeyen sayısı) sistemin $m-r$'ye bağlı sonsuz çözümü vardır.

ii- $r = m$ ise tek çözüm sıfır çözümdür. $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Özel Durumlar

- Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise ($n < m$ ise) $r \leq n < m$ olur. $\Rightarrow r < m$ dir ve $m-r$ parametreye bağlı sonsuz tane çözüm vardır.
- $n = m$ ise (katsayılar matrisi kare matris ise) $A \sim I_m$ tek çözüm var. A^{-1} var. $AX = 0 \Rightarrow X = A^{-1}0 = 0$ //

Örnekler

1- $x+y-z=0$, $4x+y-2z=0$ homojen denklem sistemini çözelim.

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\4&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-3&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-2/3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1/3\\0&1&-2/3\end{bmatrix}$$

$m=3$ $\quad 3-2=1$ $\quad$ 1 parametreye bağlı sonsuz çözüm var.

$$\begin{bmatrix}1&0&-1/3\\0&1&-2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$z=t$ diyelim. $\quad t\in\mathbb{R}$

$$x-\frac{z}{3}=0 \qquad x=\frac{t}{3}$$

$$y-\frac{2z}{3}=0 \qquad y=\frac{2t}{3} \qquad Ç=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \middle|\ t\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

2- $\left.\begin{array}{l}x+2y+z=0\\2x+z=0\\2x+y=0\end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-4&-1\\0&-3&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1/4\\0&1&2/3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1/4\\0&0&5/12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1/4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1/4\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1/4\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3 \qquad \begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=0\end{array}$$

Tek çözüm sıfır çözümdür. Başka çözüm yoktur.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

3- $\begin{array}{l}x+y+z=0\\x+y-az=0\\-ax+y+z=0\\-x+ay-z=0\end{array}$ lineer homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için $a=?$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-a\\-a&1&1\\-1&a&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-a-1\\0&1+a&a+1\\0&a+1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1+a&1+a\\0&0&1+a\end{bmatrix}$$

$a=-1$ ise $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ iki parametreye bağlı sonsuz çözüm var.

$y=t \quad z=s$

$x=-t-s$

$$G=\left\{ t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R} \right\}$$

$a\neq -1$ ise $a+1\neq 0$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \text{tek çözüm sıfır çözümdür.}$$

4- $\left.\begin{array}{l}2x+y-z=0\\x-y+z=0\\x+2y-2z=0\end{array}\right\}$ homojen denklem sistemini çözelim.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-1&1\\1&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\1&2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad z=t\in\mathbb{R}$$

$x=0$
$y=t$
$z=t$

$$G=\left\{ t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R} \right\}$$

Homojen Olmayan Lineer Denklem Sistemleri

Teorem: A, $n\times m$, $AX=B$, $\text{rank}A=r$,

$\text{rank}([A\vdots B])=s$ olsun.

i- $r\neq s$ ise çözüm yoktur.

(katsayılar matrisinin rankı eklemeli matris rankına eşit değilse)

ii- $r=s=m$ ise tek çözümü var.

iii- $r=s<m$ ise $m-r$ parametreye bağlı sonsuz çözümü var.

$m=n \Rightarrow A^{-1}$ var ise $X=\underline{A^{-1}B}$

$A\sim I_n \Leftrightarrow$ tek çözüm vardır.

Örnekler

1- $\left.\begin{array}{l}2x-y=5\\x+5y=-4\\3x-y=4\end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}2&-1&5\\1&5&-4\\3&-1&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}0&-11&13\\1&5&-4\\0&1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}0&0&2\\1&0&1\\0&1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right]$$

$\text{rank}A=2$ $\text{rank}([A\vdots B])=3$ rankları farklı olduğundan

çözümü yoktur.

2- $x+2y-z=-4$
$x+y+z=3$
$2x-2y+z=7$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\1&1&1&3\\2&-2&1&7\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-4\\0&+1&-2&-7\\0&-6&3&15\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&10\\0&1&-2&-7\\0&0&1&3\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{array}\right] \quad \underline{\text{rank } A=3} = \underline{m=3} = \underline{\text{rank }[A \mid B]}$$

$x=1 \quad y=-1 \quad z=3$ tek çözümdür.//

$$A^{-1}\begin{bmatrix}-4\\3\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$$ olmalıdır.

Alıştırmalar

1- $\left.\begin{array}{l}x-ay+z=1\\ax-y+z=a\\x+y-z=0\end{array}\right\}$ tek çözümü olması için $a=?$

2- $\left.\begin{array}{l}x-y+4z=-4\\8x-3y-z=8\\2x-y+z=0\end{array}\right\}$ çözünüz.

3- $\left.\begin{array}{l}x_1+2x_3-x_5=3\\x_2-x_3-x_4=1\\x_2+2x_3+x_4-2x_5=2\end{array}\right\}$ çözünüz.

Çözümler

1- $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&1&1\\a&-1&1&a\\1&1&-1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&1&1\\0&a^2-1&-a-1&0\\0&a+1&-2&-1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&1&1\\0&0&a-1&a-1\\0&1+a&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&1&1\\0&1+a&-2&-1\\0&0&a-1&a-1\end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{l}a-1\neq 0\\a\neq 1\end{array}\right) \text{ olmalı.}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&1&1\\0&1+a&-2&-1\\0&0&1&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&0&3\\0&\boxed{1+a}&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right] \quad 1+a\neq 0 \Leftarrow a\neq -1 \text{ olmalı}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-a&0&3\\0&1&0&1+a\\0&0&1&1\end{array}\right] \quad a\neq 1,-1 \Rightarrow \text{tek çözüm vardır.}$$

2- $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&4&-4\\8&-3&-1&8\\2&-1&1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&4&-4\\0&5&-33&40\\0&1&-7&8\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&4&-4\\0&0&2&0\\0&1&-7&8\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ Tek çözüm var.

$x=-4 \quad y=8 \quad z=0$

3- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -7/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -4/3 & 1 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & 1/3 \end{array}\right]$$ 2 parametreli sonsuz çözümü var.

$x_4 = t \quad x_5 = s$

$x_1 = 7/3 + \frac{4}{3}t - s$

$x_2 = \frac{4}{3} + \frac{t}{3}$

$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t + s \quad x_4 = t \quad x_5 = s$

$$Ç = \left\{ t\begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

4- $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 &= a \end{aligned}\right\}$$ Çözümlerini a'nın değerleri için irdeleyiniz.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \mp 2$

i- $a=2$ ise bir parametreye bağlı sonsuz çözüm var. $(m-r=1)$

ii- $a=-2$ ise rank$A=2$ rank$([A:B])=3$ olup çözüm yok.

$a \neq 2$ ise tek çözüm vardır. Aynı şekilde.

$a \neq -2$ ise tek çözüm vardır.