DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

Bu dersin ana konusu ;

diferansiyel denklemlerin çözümlerini ve bazı özelliklerini tartışmaktır. Bazı özel metodları incelemek ve bazı durumlarda yaklaşık çözümleri oluşturmaktır.

- I. BÖLÜM -

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Fizikî bilimlerde, mühendislikte, sosyal bilimlerde, birçok önemli problem, matematiksel terimlerle formüle edildiğinde, bir fonksiyonun belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler, bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebe veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit matematiksel ifadelere diferansiyel denklem denir.

Örneğin, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 5x$ bir diferansiyel denklemdir.

Adî ve Kısmî Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın, eğer yalnız bir bağımsız değişken var ise bu denkleme adî diferansiyel denklem denir. Bağımlı değişkenin tek olması halinde, genellikle bağımsız değişken x ile, bağımlı değişken y ile gösterilir. Eğer diferansiyel denklem, birtek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa, bu tip denklemlere kısmî diferansiyel denklem denir.

Örneğin, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0$ $y(x,z)$ kısmî diferansiyel denklemdir.

Mertebe :

Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde bulunan en yüksek mertebede türevin mertebesidir.

$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ n. mertebedendir.

$y'' + (y')^4 = 0$ ikinci mertebedendir. Kabul edelim ki,

$$y^{(n)} = f(x,y,\dots,y^{n-1}) \quad \dots\dots (2)$$

olsun ve çözümü var olsun.

Çözüm// $\alpha < x < \beta$ aralığı üzerinde (2) adi diferansiyelin çözümü bir ϕ fonksiyonudur. Öyle ki; $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ var ve

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{n-1}(x))$$

eşitliğini $\forall x \in (\alpha, \beta)$ için sağlar.

Bir diğer şekilde verilmediği zaman f nin, reel değerli fonksiyon olduğunu kabul edeceğiz ve reel çözümleri bulmaya çalışacağız.

Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

denklemine lineerdir denir. Eğer F; $y, y', \ldots, y^{(n)}$'ye göre lineer ise, bu tanıma göre en genel anlamda n'inci mertebeden lineer diferansiyel denklem;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$$

şeklindedir.

- $1+x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ lineerdir.
- $1+y^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ değil.
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ değil
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin(x+y) = 0$ değil
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$ değil.

Alıştırmalar

1- Aşağıda verilen fonksiyonların, verilen diferansiyel denklemleri sağladığını gösteriniz.

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad y_1(x) = \sin x \quad y_2(x) = \cos x$

b) $y'' + y = \sec x \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \quad y_1(x) = \cos x \ln\cos x + x\sin x$

Çözüm b// $y' = -\sin x \ln\cos x + \dfrac{-\sin x}{\cos x}\cos x + \sin x + (\cos x)x$

$$y' = -\sin x \ln\cos x - \sin x + \sin x + x\cos x$$

$$y' = -\sin x \ln\cos x + x\cos x$$

$$y'' = -\cos x \ln\cos x + \frac{-\sin x}{\cos x}(-\sin x) + \cos x + x(-\sin x)$$

$y''+y = \sec x$?

$$= -\cos x \ln\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x - x\sin x + \cos x \ln\cos x + x\sin x$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \text{ //}$$

2- Kabul edelim ki, aşağıdaki diferansiyel denklemler $y = e^{xr}$ formunda çözüme sahip olsunlar. Verilen herbir diferansiyel denklem için uygun r değerlerini bulunuz.

a) $y''-3y'+y=0$

b) $y''-y'+3y=0$

c) $y''+y=0$

Çözüm a// $y=e^{xr} \Rightarrow y' = re^{xr} \Rightarrow y'' = r^2 e^{xr}$

$$y''-3y'+y = r^2e^{xr} - 3re^{xr} + e^{xr} = e^{xr}(r^2-3r+1) = 0$$

$$r^2-3r+1 = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \frac{6 \mp \sqrt{2}}{2} \text{ //}$$

3 - Kabul edelim ki, aşağıdaki diferansiyel denklemler $y = x^r$ $(x>0)$ formunda çözüme sahip olsunlar. Verilen herbir diferansiyel denklem için uygun r değerlerini bulunuz.

a) $x^2y''-3xy'+y=0$

b) $x^2y''-xy'+3y=0$

c) $x^2y''+y=0$

Çözüm c// $y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$$x^2y''+y = x^2 r(r-1)x^{r-2} + x^r = x^r(r(r-1)) = 0$$

$$r(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \ r_2 = 1$$

4- $u_1(x,y) = \cosh\cosh y$, $u_2(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ / $u_{xx}+u_{yy}=0$ $\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0\right)$ Laplace denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz.

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{d^2u_2}{dx^2} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ //}$$

$$\frac{du_2}{dy} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{d^2u_2}{dy} = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ //}$$

– II. BÖLÜM –

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, $y' = f(x,y)$ ....(1)

şeklindeki diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde duracağız.

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx$$
$$\Rightarrow y = \int^x f(t)\,dt + c$$

$y' + P(x)y = g(x)$ .... (2)

f, y'ye göre bir denklem ise bu durum elde edilir. Kabul edelim ki, $g(x)=0$ olsun. ve $P(x)$ sabit olsun. $y' + ay = 0$ olur. Bu taktirde,

$$y' + ay = 0 \Rightarrow y = e^{-ax} \text{ yazarsak,}$$
$$= -ae^{-ax} + ae^{-ax} = 0 \text{ olur.}$$

$$y' + ay = g(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[\ ?\ ] = g(x) \Rightarrow [\ ?\ ] = \int^x g(t)\,dt + c$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[b(x)y\right] = b(x)y' + b'(x)y \qquad b(x) = e^{ax}$$

$$\Rightarrow b(x)y' + a\,b(x)y = g(x)\,b(x) \qquad \text{(denklemi } b(x) \text{ ile çarparak)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{ax}y\right] = g(x)e^{ax}$$

$$\Rightarrow e^{ax}y = \int^x g(t)e^{at}\,dt + c \Rightarrow y = \frac{1}{e^{ax}}\left(\int^x g(t)e^{at}\,dt + c\right) \text{ olur.}$$

Örnek// $y' - 3y = \sin x$ denklemini çözünüz.

$b(x) = e^{-3x}$ dersek, $y'e^{-3x} - 3e^{-3x}y = e^{-3x}\sin x$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x}y\right] = e^{-3x}\sin x$$

$$\Rightarrow e^{-3x}y = \int^x e^{-3t}\sin t\,dt + c \Rightarrow y = e^{3x}\left(\int^x e^{-3t}\sin t\,dt + c\right)$$

$$\int^x e^{-3t}\sin t\,dt = ? \qquad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$$

$u = \sin t \qquad e^{-3t}dt = dv$

$du = \cos t\,dt \qquad -\frac{1}{3}e^{-3t} = v$

$$= \sin t\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right) + \int^x \frac{1}{3}e^{-3t}\cos t\,dt$$
$$= -\frac{1}{3}e^{-3t}\sin t + \frac{1}{3}\int^x e^{-3t}\cos t\,dt$$

$e^{-3t}dt = dz \qquad s = \cos t$

$-\frac{1}{3}e^{-3t} = z \qquad ds = -\sin t\,dt$

$$\int^{x} e^{-3t}\cos t\,dt = \cos t\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right) - \int^{x} -\frac{1}{3}e^{-3t}(-\sin t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3t}\cos t - \int^{x} \frac{1}{3}e^{-3t}\sin t\,dt$$

$$\int^{x} e^{-3t}\sin t\,dt = -\frac{1}{3}e^{-3t}\sin t + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\cos t - \int \frac{1}{3}e^{-3t}\sin t\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3t}\sin t - \frac{1}{9}e^{-3t}\cos t - \frac{1}{9}\int e^{-3t}\sin t\,dt$$

$$\frac{10}{9}\int e^{-3t}\sin t\,dt = -\frac{1}{3}e^{-3t}\sin t - \frac{1}{9}e^{-3t}\cos t$$

$$\int e^{-3t}\sin t\,dt = -\frac{3}{10}e^{-3t}\sin t - \frac{1}{10}e^{-3t}\cos t$$

$$\Rightarrow y = e^{3x}\left(-\frac{3}{10}e^{-3x}\sin x - \frac{1}{10}e^{-3x}\cos x\right) + c$$

$$= -\frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x + c = -\frac{1}{10}(3\sin x + \cos x) + c \,//$$

Ödev // $(y+1)\frac{dy}{dx} = (y^2+2y+5)x^2$ denklemini lineer duruma getirip çözünüz.

$y' + ay = g(x)$, $y' + p(x)y = g(x)$

$\Rightarrow \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x)$ ..... (1)

$\Rightarrow \frac{d}{dx}[\,?\,] = \mu(x)g(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu'(x)y + \mu(x)y'$ .... (2)

$\Rightarrow \mu'(x) = \mu(x)p(x) \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \Rightarrow \ln\mu(x) = \int^{x} p(t)\,dt$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int^{x} p(t)\,dt}$ .... (3) $\mu(x)$: integral çarpanı.

$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)g(x) \Rightarrow \mu(x)\cdot y = \int^{x}\mu(t)g(t)\,dt + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^{x}\mu(t)g(t)\,dt + c\right]$

Örnek // $y' + 3xy = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\mu(x) = e^{\int^{x} 3t\,dt} = e^{3/2\cdot x^2}$ $\quad p(x) = 3x,\ g(x) = x^3$

$\Rightarrow e^{\frac{3}{2}x^2}y' + 3xe^{\frac{3}{2}x^2}y = e^{\frac{3}{2}x^2}\cdot x^3$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{\frac{3}{2}x^2}\cdot y\right] = e^{\frac{3}{2}x^2}x^3$

$\Rightarrow e^{3/2x^2}y = \int^{x} e^{\frac{3}{2}t^2}\cdot t^3\,dt + c$

$\int^x e^{3/2 t^2} t^3\, dt = ?$ $u = \frac{t^2}{2} \Rightarrow du = t\,dt$

$$= \int e^{3u}\, 2u\, du \qquad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du \text{ 'dan}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} u e^{3u} - \frac{1}{9} e^{3u}\right) = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2} e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{2}{9} e^{\frac{3}{2}x^2} + c$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}\right) + c e^{-\frac{3}{2}x^2} \quad //$$

Örnek // $y' + \frac{3}{x} y = x^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. $x>0$

$$y' + P(x) y = g(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int^x \frac{3}{t} dt} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$y = \frac{1}{x^3}\left[\int^x t^3 t^3\, dt + c\right] = \frac{1}{x^3}\frac{x^7}{7} + c = \frac{x^4}{7} + c x^{-3}$$

$$y(1) = \frac{1}{7} \Rightarrow y(x_0) = y_0$$

$$y_0 = \frac{x_0^4}{7} + c x_0^{-3} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + c \Rightarrow c = 0 \qquad y = \frac{x^4}{7} \quad //$$

Örnek // $y' + p(x) y = g(x)$ denklemini gözönüne alalım.

a) Eğer $g(x) = 0$ ise gösteriniz ki, yukarıdaki denklemin çözümü,

$$y = A e^{-\int^x p(t)dt} \text{ olsun,} \quad (A: \text{sabit})$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow y' + p(x) y = 0$$

$$\mu(x) y' + \mu(x) P(x) y = 0 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int^x P(t)dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\mu(x) y\right] = 0 \Rightarrow \mu(x) y = c \Rightarrow y = \frac{c}{e^{\int^x p(t)dt}}$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-\int^x p(t)dt}$$

b) Eğer $g(x) \neq 0$ ise kabul edelim ki, verilen denklemin çözümü

$$y = A(x) e^{-\int^x P(t)dt} \quad \text{----(2)} \quad \text{formundadır.}$$

$$y' + p(x) y = g(x) \quad \text{----(1)}$$

(2) 'yi, (1) de yerine koyarak gösteriniz ki,

$$A'(x) = g(x) e^{\int^x p(t)dt} \quad \text{olmalıdır.}$$

Çözüm // $y' = A'(x) e^{-\int^x P(t)dt} - A(x) P(x) e^{-\int^x p(t)dt}$

$$\Rightarrow y' + P(x) y = A'(x) e^{-\int^x P(t)dt} - A(x)P(x) e^{-\int^x P(t)dt} + P(x) A(x) e^{-\int^x P(t)dt} = g(x)$$

$\Rightarrow A'(x) = g(x)\, e^{\int^{x} p(t)dt}$ ----- (3)

(3) deki $A(x)$ çözülür ve (2) de yerine konursa çözüm elde edilir.

Buna parametrelerin değişme metodu denir.

c) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$ denklemini yukarıdaki metodu kullanarak çözünüz.

$\Rightarrow A'(x) = x^2 e^{2x} e^{-\int^{x} 2dt}$

$= x^2 e^{2x} e^{-2x} = x^2$

$A'(x) = x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{x^3}{3} + c \Rightarrow y = (\frac{x^3}{3} + c)\, e^{2x}$

d) $y' + \frac{1}{x} y = 3\cos 2x$, $x > 0$ (ödev)

Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$$y' + P(x)y = g(x)y^{(n)}$$

tipindeki denklemlere Bernoulli diferansiyel denklemi denir. Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemler vardır ki, bağımlı değişkenin uygun surette değiştirilmesiyle lineer denkleme dönüşürler ve yukarıda belirttiğimiz Bernoulli diferansiyel denklemi bu tip denklemlere uygun en güzel örnektir. $y' + P(x)y = g(x)y^{(n)}$ denkleminde,

$n = 0$ ise denklem, $y' + P(x)y = g(x)$ lineerdir.

$n = 1$ ise denklem $y' + (P(x) - g(x))y = 0$ lineerdir.

$n \neq 0,1$ ise denklem,

$z = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)} y^n \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-n)} y^n \frac{dz}{dx} + P(x)y = g(x)y^{(n)}$ olur. ($\frac{(1-n)}{y^{(n)}}$ ile çarparsak)

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = g(x)^{(1-n)}$ olur, ki bu da bildiğimiz lineer diferansiyel denklemdir. Bir önceki kesimde gördüğümüz teknikle kolayca çözülür.

Örnek // $y' - \frac{3}{x} y = x^3 y^4$, $x > 0$ denklemini çözünüz.

$z = y^{1-4} = y^{-3} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} y^4 \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} y^4 \frac{dz}{dx} - \frac{3}{x} y = x^3 y^4 \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{6}{x} z = x^3$

$\Rightarrow z = x^{-6}\left(\int^{x} t^6 t^3 dt + c\right)$

$$z = \frac{x^4}{10} + cx^{-6} \Rightarrow \frac{1}{y^3} = \frac{x^4}{10} + cx^{-6} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{\frac{x^4}{10} + cx^{-6}}$$

$$y(1) = 4 \quad 4 = \frac{1}{\frac{1}{10} + c} \Rightarrow c = \frac{3}{20}$$

$$y^3 = \frac{1}{\frac{x^4}{10} + \frac{3}{20}x^{-6}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^4}{10} + \frac{3}{20}x^{-6}}} \quad //$$

Örnek // $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy - x^3y^3}$ bernoulli diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\frac{dx}{dy} = xy - x^3y^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - xy = -x^3y^3$$

$$x' + P_1(y).x = g_1(y)x^{(n)} \quad P_1(y) = -x \quad g_1(y) = -x^3 \quad n = 3$$

Değişkenlere Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$$m(x,y) + N(x,y)y' = 0 \quad \text{----} \quad (1)$$

$$y' = f(x,y) \Rightarrow y' - f(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow m(x,y) = -f(x,y)$$

$\Rightarrow N(x,y) = 1$ ve M ve N sürekli fonksiyonlar.

Eğer (1) denkleminde $m(x,y)$ sadece x'in fonksiyonu ise ve $N(x,y)$ de sadece y'nin fonksiyonu ise bu tür denklemlere, değişkenlere ayrılabilen diferansiyel denklemler denir.

$$m(x,y) + N(x,y)y' = 0 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$M(x) + N(y)y' = 0 \quad \text{----} \quad (2)$$

$$H_1'(x) = m(x), \quad H_2'(y) = N(y)$$

$$\frac{d}{dx}H_1(x) + \frac{d}{dy}H_2(y) = 0 \qquad (H_1'(x) + H_2'(y) = 0)$$

- $y^2 = x^3, \quad y^2 - x^3 = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 3x^2\frac{dx}{dx} \Rightarrow 2yy' - 3x^2 = 0$

1. Örnek // $\mathrm{Arctan}x + (1+x^2)\tan y.y' = 0 \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Arctan}x}{1+x^2} + \tan y\, y' = 0$$

$$\Rightarrow m(x) = \frac{\mathrm{Arctan}x}{1+x^2} = [\ ?\ ]$$

$$\Rightarrow [\ ?\ ] = \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} x)^2$$

$$\Rightarrow [\ ?\ ] = \int \tan y\,dy = -\ln\cos y = N(y)$$

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} x)^2 \ , \quad H_2(y) = -\ln\cos y$$

$$H_1'(x) + H_2'(y) = c \Rightarrow \frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} x)^2 - \ln\cos y = c \ //$$

2.Örnek// $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{2y-x}$ ifadesi değişkenlere ayrılamaz. Gösteriniz.

Eğer $y = x.v$ bağımlı değişken dönüşümü yapılabilirse değişkenler ine ayrılabilir.

$$(2y-x)dy - (x-2y)dx = 0$$

$$y = x.v \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x-2xv}{2xv-x} = \frac{1-2v}{2v-1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v}{2v-1} - v = \frac{1-2v-2v^2+v}{2v-1} = \frac{-2v^2-v+1}{2v-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v-1}{-2v^2-v+1}.dv \ //$$

Tam Diferansiyel Denklemler

$$G(x,y) = c \ ,$$

$$dG(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial x}dx = 0 \ ---- \ (2)$$

$$m(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

$\frac{\partial G}{\partial y} = G_y = m(x,y)$ (y'ye göre kısmi türev alınırsa x'ler gözükmez.)

$\frac{\partial G}{\partial x} = G_x = N(x,y)$ (x'e göre kısmi türev alınırsa y'ler gözükmez.)

$$\Rightarrow G_{yx} = N_x(x,y) = G(x,y) = m_y(x,y)$$

$$N_x(x,y) = m_y(x,y)$$

★ $G(x,y) = \int^x m(t,y)\,dt + h(y)$

★ $G_y(x,y) = \int^x m_y(t,y)\,dt + h'(y) = N(x,y)$

$$h'(y) = N(x,y) - \int^{x} M_y(t,y)\,dt$$

$$h(y) = \int^{y} N(x,s)\,ds - \int^{y}\int^{x} M_y(t,s)\,dt\,ds$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} G_x = M(x,y) \\ G_y = N(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow G_{xy} = G_{yx}$$

$$G(x,y) = c \,,$$

☆ $$G(x,y) = \int^{y} N(x,t)\,dt + h(x)$$

☆ $$G_x(x,y) = \int^{y} N_x(x,t)\,dt + h'(x) = M(x,y)$$

$$h'(x) = M(x,y) - \int^{y} N_x(x,t)\,dt$$

$$h(x) = \int^{x} M(t,y)\,dt - \int^{x}\int^{y} N_x(x,t)\,dt\,ds$$

$$G(x,y) = \int^{y} N(x,t)\,dt + \int^{x} M(s,y)\,ds - \int^{x}\int^{y} N_x(x,t)\,dt\,ds \quad \text{----}(2)$$

$$G(x,y) = \int^{x} M(t,y)\,dt + \int^{y} N(x,s)\,ds - \int^{y}\int^{x} M_y(t,s)\,dt\,ds \quad \text{----}(3)$$

Eğer $M_y = N_x$ ise verilen denklem tam diferansiyel denklemdir.

Örnek// $(\underbrace{y\cos x + 2xe^{y}}_{M(x,y)}) + (\underbrace{\sin x + x^2e^{y} - 1}_{N(x,y)})y' = 0$ denklemini çözünüz.

$$\left.\begin{array}{l} M_y = \dfrac{dM(x,y)}{dy} = \cos x + 2xe^{y} \\ N_x = \dfrac{dN(x,y)}{dx} = \cos x + 2xe^{y} \end{array}\right\} M_y = N_x \text{ tam diferansiyel denklemdir.}$$

$$G(x,y) = \int^{y} N(x,t)\,dt + h(x)$$

$$= \int^{y} (\sin x + x^2e^{t} - 1)\,dt + h(x)$$

$$G_x(x,y) = y\cos x + 2xe^{y} + h'(x) = M(x,y) = y\cos x + 2xe^{y}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c$$

$$G(x,y) = y\sin x + x^2e^{y} - y + c$$

Örnek// $(\underbrace{3x^2 - 2xy + 2}_{M(x,y)})dx + (\underbrace{6y^2 - x^2 + 3}_{N(x,y)})dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dM}{dy} = -2x \qquad \frac{dN}{dx} = -2x$$

$M_y = N_x$ o halde denklem, tam diferansiyel denklemdir.

örnek // $\sin y = x^3$ denkleminin tam diferansiyelini alınız.

$\Rightarrow \cos y y' = 3x^2 \Rightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = 3x^2$

$\Rightarrow \cos y \, dy = 3x^2 dx$

$G(x,y) = c \Rightarrow dG(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy$

$G(x,y) = \sin y - x^3$

$dG(x,y) = -3x^2 dx + \cos y \, dy$ $\quad (\sin y = x^3 \Rightarrow y = \text{Arcsin}\, x^3)$

örnek // $G(x,y) = x\sin y - y\cos x$ tam diferansiyelini alınız.

$\Rightarrow$ $dG(x,y) =$ x'e göre türev $-$ y'ye göre türev

$\Rightarrow dG(x,y) = (\sin y + y\sin x)dx - (x\cos y - \cos x)dy = 0$?

$dG(x,y)$ verildiğinde, $G(x,y)$ nasıl bulunur?

Tersten gidersek;

$$\left.\begin{array}{l} M_y = \cos y + \sin x \\ N_x = \cos y + \sin x \end{array}\right\} \text{ denklem tam diferansiyel haline gelir.}$$

$G(x,y) = \int^{x} (\sin y + y\sin t)dt + h(y)$

$= x\sin y - y\cos x + h(y)$

$G_y(x,y) = x\cos y - \cos x + h'(y) = x\cos y - \cos x$

$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c$

$\Rightarrow G(x,y) = x\sin y - y\cos x + c$ //

integral Çarpanı

Bu bölümde, bazı tam olmayan diferansiyel denklemleri, bazı özel fonksiyonlar ile çarparak tam diferansiyel denklem haline geldiğini göstereceğiz.

$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ denkleminde eğer $M_y \neq N_x$ ise bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda,

$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$

$(\mu(x,y)M(x,y))_y = (\mu(x,y)N(x,y))_x$ olur. Açıkça ifade edilirse;

$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$ ...... (1) olur.

1°) μ sadece x'in fonksiyonu olsun. ($M+Ny'=0$, $M_y \neq N_x$ ise)

$$\mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\Rightarrow \mu_x = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx$$ buradan μ bulunur.

- $y' + P(x)y = g(x)$ denklemi verilsin,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y - g(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{1}_{N(x,y)}.dy + \underbrace{(P(x)y - g(x))}_{M(x,y)}dx = 0$$

$M_y = P(x)$ $N_x = 0$ olur. Buradan her iki tarafı μ ile çarparsak,

$$\Rightarrow \mu\, dy + \mu\,(P(x)y - g(x))dx = 0$$

$$\Rightarrow \mu_x = \mu P(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx \Rightarrow \ln\mu = \int^x P(t)dt$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int^x P(t)dt}$$ olur. Bu da integral çarpanıdır.

Örnek// $(3xy+y^2) + (x^2+xy)\frac{dy}{dx} = 0$ tam diferansiyel denklem midir?

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 3x+2y \\ N_x = 2x+y \end{array}\right\}$$ tam diferansiyel denklem olmaz.

(Tam dif. haline getirmek için μ bulmalıyız.)

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln\mu = \ln x \Rightarrow \mu = x$$ integral çarpanı

Denklemi x ile çarparsak,

$$\Rightarrow x(3xy+y^2) + x(x^2+xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3x^2y + xy^2)}_{M(x,y)} + \underbrace{(x^3 + x^2y)}_{N(x,y)}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (M+Ny'=0)$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 3x^2+2xy \\ N_x = 3x^2+2xy \end{array}\right\}$$ O halde denklem tam dif. denklem haline gelir.

$$G(x,y) = \int^x (3t^2y + ty^2)dt + h(y)$$

$$= x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$\mu_y M + \mu M_y = \mu N_x$ ---- (2)

$$\mu_y = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy$$ buradan μ bulunur. //

• $\mu(x,y) = y^2+2y$ olsun

$$\mu_y = 2y+2 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = 2y+2$$

$$d\mu = (2y+2)dy \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = 2y+2$$

1. Örnek // $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$M_y = 0 \quad N_x = \frac{1}{y} \Rightarrow M_y \neq N_x$ tam dif. denk. değil.

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\frac{1}{y} - 0}{1} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{y}dy$$

$$\Rightarrow \ln\mu = \ln y \Rightarrow \mu = y$$

Denklemi $\mu = y$ ile çarpalım.

$\Rightarrow \underbrace{y\,dx}_{M(x,y)} + (\underbrace{x - y\sin y}_{N(x,y)})dy = 0$ olur.

$M_y = 1$
$N_x = 1$ O halde tam dif. denklemdir.

$$G(x,y) = \int^x y\,dt + h(y) = xy + h(y)$$

$$G_x(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x} = x + h'(y) = x - y\sin y$$

$$h'(y) = -y\sin y \Rightarrow h(y) = -(-y\cos y + \sin y) = y\cos y - \sin y$$

$$G(x,y) = xy + y\cos y - \sin y + c \quad //$$

2. Örnek // $e^x dx + (e^x \cot y + 2y\,\mathrm{cosec}\,y)dy = 0$ integral çarpanını bulup, denklemi çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} M_y &= e^x \\ N_x &= e^x \cot y \end{aligned}\right\} M_y \neq N_x$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{e^x \cot y - 0}{e^x} = \cot y$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \cot y \, dy \Rightarrow \ln\mu = \ln \sin y$$

$\Rightarrow \mu = \sin y$ denklemi $\sin y$ ile çarpalım.

$$\Rightarrow \sin y \, e^x dx + \sin y (e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y) dy = 0$$

$$\Rightarrow \sin y \, e^x dx + \sin y \left(e^x \frac{\cos y}{\sin y} + 2y \frac{1}{\sin y}\right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin y \, e^x dx}_{M(x,y)} + (\underbrace{e^x \cos y + 2y}_{N(x,y)}) dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \cos y \, e^x \\ N_x &= e^x \cos y \end{aligned}\right\} M_y = N_x$$

$$G(x,y) = \int^x \sin y \, e^t dt + h(y)$$

$$= \sin y \, e^x + h(y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = G_y(x,y) = e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y + 2y$$

$$\Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2 + c$$

$$G(x,y) = e^x \sin y + y^2 + c \quad //$$

3°) Eğer $\dfrac{N_x - M_y}{xM - yN} = R$ ve R yalnızca xy'ye bağlı ise,

bu taktirde, $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ diferansiyel denklemi $\mu(x,y)$ olduğunda bir integral çarpanına sahiptir.

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \quad \text{-----} (1)$$

$xy = t$ olsun. $\Rightarrow \partial t = x \partial y \Rightarrow x = \dfrac{\partial t}{\partial y}$

$$\mu_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \partial_t \cdot x$$

$$\mu_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \partial_t \cdot y$$

$$\left\{\begin{aligned} & xy = t \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = ? \\ & dt = \underset{\frac{\partial t}{\partial x}}{y}\, dx + \underset{\frac{\partial t}{\partial y}}{x}\, dy \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \mu_t x M + \mu M_y = \mu_t y N + \mu N_x$$

$$\Rightarrow \mu_t (xM - yN) = (N_x - M_y)\mu$$

$$\Rightarrow \mu_t = \left(\frac{N_x - M_y}{xM - yN}\right)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = R \cdot \mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = R\,dt \Rightarrow \mu = e^{\int^{xy} R\,dt} \quad //$$

Örnek // $(3x+\frac{6}{y})+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})\frac{dy}{dx}=0$ denkleninin genel çözümü ?

$$\left.\begin{aligned} M_y &= -\frac{6}{y^2} \\ N_x &= \frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2} \end{aligned}\right\}$$ tam dif. denklem değildir.

$$\frac{N_x-M_y}{xM-yN}=\frac{\frac{2x}{y}-\frac{3y}{x^2}+\frac{6}{y^2}}{x(3x+\frac{6}{y})-y(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x})}=\frac{1}{xy}=R$$

$\mu=e^{\int^{xy}R\,dt}$ $\quad xy=t$ dersek,

$\mu=e^{\int^{xy}\frac{1}{t}dt}=e^{\ln xy}=xy$, denklemi xy ile çarpalım.

$$\Rightarrow xy(3x+\frac{6}{y})+xy(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3x^2y+6x)}_{M(x,y)}+\underbrace{(x^3+3y^2)}_{N(x,y)}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 3x^2 \\ N_x &= 3x^2 \end{aligned}\right\}$$ tam dif. denklemdir. $M_y=N_x$

$$G(x,y)=\int^x M(t,y)\,dt+h(y)$$

$$=\int^x(3t^2y+6t)\,dt+h(y)$$

$$=3\frac{x^3}{3}y+6\frac{x^2}{2}+h(y)$$

$$G(x,y)=x^3y+3x^2+h(y)$$

$$G_y(x,y)=\frac{\partial G}{\partial y}=\int^x M_y(t,y)\,dt+h'(y)=N(x,y)$$

$$=\int^x 3t^2\,dt+h'(y)=x^3+3y^2$$

$$=x^3+h'(y)=x^3+3y^2$$

$$\Rightarrow h'(y)=3y^2 \Rightarrow h(y)=y^3+c$$

$$\Rightarrow G(x,y)=x^3y+3x^2+y^3+c \quad //$$

Homojen Denklemler

Daha önceki iki bölümün aksine, bu bölümde bazı denklemleri değişken dönüşümü tekniğiyle çözmeye çalışacağız.

$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ denklemine homojendir denir.

Eger f, x ve y 'nin ayrı ayrı fonksiyonu değil fakat, $\frac{x}{y}$ veya $\frac{y}{x}$ in fonksiyonu ise denkleme homojen denklem denir.

O halde denklem, $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ formundadır.

- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$ homojendir.
- $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\frac{x}{y} + \frac{x(1+\frac{y}{x})}{x(1-\frac{y}{x})} = \ln\frac{1}{y/x} + \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ homojendir.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+2xy}{x^2} = y\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$ (homojen değil)

Verilen denklemin homojen olması için x veya y, çarpan olmamalıdır.

- $\frac{dy}{dx} = \sin\frac{y}{x} - \log\frac{y}{x}$ homojendir.

$\frac{y}{x} = v$ değişken dönüşümü yapılırsa, $\left(F(v) = F\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

$y = x.v \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$ (dx'e bölersek)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$ (denklemde yerine yazarsak)

$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v)-v}$ olur. Bu da değişkenlere ayrılabilen bir diferansiyel denklemdir. Çözümü kolayca yapılır.

Riccati Diferansiyel Denklemi

Bazı diferansiyel denklemler basit dönüşümlerle lineer denklemlere indirgenebilmektedir. Riccati diferansiyel denklemi de bunların en önemlilerindendir. Genel şekli ;

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 + \dots \quad \text{----}(1)$$

olan diferansiyel denklemine, Riccati diferansiyel denklemi denir.

$q_3(x)$ özdeş olarak sıfır olursa, (1) denklemi lineer denkleme,

$q_1(x)$ özdeş olarak sıfır olursa, Bernoulli denklemine indirgenir.

Bu iki halin dışında (1) denkleminin genel çözümünün bulunması oldukça zordur. Çözümün yapılabilmesi için bir yardımcı fonksiyon gerekir. Bu yardımcı fonksiyon (1) yardımcı denkleminin, ya soru ile birlikte ya da bizim bulacağımız bir özel çözümüdür.

Böyle bir çözüm, $y_1(x)$ ise bağımlı değişkeni,

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)} \quad \text{---- (2)}$$

ile değiştiririz. Türevi alırsak,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \quad \text{(1) de yerine yazarsak}$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = q_1 + q_2\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + q_3\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad = q_1 + q_2 y_1 + \frac{q_2}{v} + q_3 y_1^2 + \frac{2q_3 y_1}{v} + \frac{q_3}{v^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dy_1}{dx} - q_1 - q_2 y_1 - q_3 y_1^2}_{=0} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{q_2}{v} + \frac{2q_3 y_1}{v} + \frac{q_3}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = q_1 + q_2 y_1 + q_3 y_1^2 \quad \text{yazabiliriz.}$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{q_2}{v} + \frac{2q_3}{v} + \frac{q_3}{v^2} \quad (-v^2) \text{ ile çarpalım.}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -q_2 v - 2q_3 y_1 v - q_3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + v(q_2 + 2q_3 y_1) = -q_3 \quad \text{---- (3)}$$

olur. Bu da $y' + P(x)y = g(x)$ şeklindeki lineer denklemdir.

Yani (2) dönüşümü; (1) denklemini, (3) lineer denklemine indirger.

Örnek 1// $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. (Yardımcı fonksiyonu $y_1(x) = x$ alınız.)

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = x + \frac{1}{v(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \quad \text{denklemde yazarsak,}$$

$$\Rightarrow \cancel{1}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{1}+x^2-2x\left(x+\frac{1}{v}\right)+\left(x+\frac{1}{v}\right)^2$$

$$= \cancel{x^2}-\cancel{2x^2}-\cancel{\frac{2x}{v}}+\cancel{x^2}+\cancel{\frac{2x}{v}}+\frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow v(x) = -x+c$$

$$y(x) = x+\frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = x+\frac{1}{-x+c} \quad // \text{ genel çözümdür.}$$

Örnek 2 // $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2$ Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü, özel çözümü $y_1=\frac{1}{x}$ alarak bulunuz.

$$y(x) = y_1(x)+\frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{v(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \cancel{-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{-\frac{1}{x^2}}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{v}\right)\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{xv}+\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{xv}+\frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{xv}+\frac{1}{v^2} \qquad (-v^2 \text{ ile çarpalım})$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}-1$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}+\frac{v}{x} = -1 \qquad \text{lineer denklem şeklini alır.}$$

$$\left(y'+p(x)y = g(x), \quad \mu(x) = e^{\int^x p(t)dt} \right)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int^x \frac{1}{t}dt} = e^{\ln x} = x \qquad (\text{her iki tarafı } \mu = x \text{ ile çarpalım})$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}+x\frac{v}{x} = -1.x \Rightarrow x\frac{dv}{dx}+v = -x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[x.v] = -x$$

$$\Rightarrow x\cdot v(x) = -\frac{x^2}{2}+k$$

$$\Rightarrow v = -\frac{x^2}{2x}+\frac{k}{x} = -\frac{x}{2}+\frac{k}{x} \qquad y(x) = y_1+\frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{-\frac{x}{2}+\frac{k}{x}} \quad // \text{ genel çözümdür.}$$

Örnek 3 // $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}$ Riccati denkleminin genel çözümünü, $y_1 = \sin x$ özel çözümünü kullanarak bulunuz.

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y(x) = \sin x + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{2\cos x} + \frac{\left(\sin x + \frac{1}{v}\right)^2}{2\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\cancel{\frac{\sin^2 x}{2\cos x}} + \frac{\frac{2\sin x}{v}}{2\cos x} + \cancel{\frac{\sin^2 x}{2\cos x}} + \frac{1}{2v^2\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{\tan x}{v} + \frac{1}{2v^2}\sec x \qquad (-v^2 \text{ ile çarpalım})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -v\tan x - \frac{1}{2}\sec x \qquad (y' + p(x)y = g(x))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} + v\tan x = -\frac{1}{2}\sec x \quad \text{olur. lineer denklemdir.}$$

$$\mu(x) = e^{\int \tan x\,dx} = e^{\ln\sec x} = \sec x \qquad \text{denklemi } \mu = \sec x \text{ ile çarpalım}$$

$$\Rightarrow \sec x\frac{dv}{dx} + v\tan x\sec x = -\frac{1}{2}\sec^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\sec x . v\right] = -\frac{1}{2}\sec^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \sec x . v = -\frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx \Rightarrow \sec x . v = -\frac{1}{2}(\tan x + c_1)$$

$$\Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{\tan x + c_1}{\sec x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sin x + \frac{1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tan x + c_1}{\sec x}\right)} \quad // \quad \text{genel çözümdür.}$$

Alıştırmalar

1- a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - y}{y - 3x}$ denklemini çözünüz.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\left(3 - \frac{y}{x}\right)}{x\left(\frac{y}{x} - 3\right)} = \frac{3 - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 3} \quad \text{homojen diferansiyel denklemdir.}$$

$\dfrac{y}{x} = v$ dönüşümüyle, $y = v.x \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{v-3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{v-3} - v \quad \left(\text{veya } x\frac{dv}{dx} = -1-v\right)$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v+v^2+3v}{v-3}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+2v+3}{v-3}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{v-3}{v^2+2v+3}\,dv$$

$$\Rightarrow \ln x + c = \int\frac{v-3}{v^2+2v+3}\,dv \quad //$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-y}{3y-x} = \dfrac{x\left(3-\frac{y}{x}\right)}{x\left(3\frac{y}{x}-1\right)} = \dfrac{3-\frac{y}{x}}{3\frac{y}{x}-1}$ homojen dif. denklemdir.

$\dfrac{y}{x} = v \Rightarrow y = x.v \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{3v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v}{3v-1} - v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-v-3v^2+v}{3v-1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3-3v^2}{3v-1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{3v-1}{3-3v^2}\,dv$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln(3-3v^2) + \frac{1}{6}\ln(v-1) - \frac{1}{6}\ln(v+1) - \ln c$$

$$\Rightarrow \ln cx = \ln(3-3v^2)^{-1/2} + \ln(v-1)^{1/6} + \ln(v+1)^{-1/6}$$

$$\Rightarrow \ln cx = \ln(3-3v^2)^{-1/2}(v-1)^{1/6}(v+1)^{-1/6}$$

$$\Rightarrow cx = \frac{(v-1)^{1/6}}{(3-3v^2)^{1/2}(v+1)^{1/6}} = \frac{(y/x-1)^{1/6}}{(3-3\frac{y}{x})^{1/2}(y/x+1)^{1/6}} \quad //$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-y+5}{3y-x-3}$ denklemini çözünüz.

★★ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ denkleminde $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ ise denklem çözülebilir.

x ve y'nin kuvveti birinci derecedendir. Ve homojen diferansiyel denklemlere dönüştürülen diferansiyel denklemlerdir.

$x = X - k$ ve $y = Y - l$ olsunlar. (k, l sabitler)

$\Rightarrow dx = dX - 0$, $dy = dY - 0$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{3(X-k) - 3(Y-l) + 5}{3(Y-l) - (X-k) - 3} = \frac{3X - 3k - 3Y + 3l + 5}{3Y - 3l - X + k - 3}$$

sabitler toplamını sıfıra eşitlemeliyiz.

$$3/ \; -3k + 3l + 5 = 0$$
$$-3l + k - 3 = 0$$
$$-8k = -12 \Rightarrow k = \frac{3}{2} , \; l = -\frac{1}{2}$$

$$cX = \frac{\left(\frac{Y}{X} - 1\right)^{1/6}}{\left(3 - 3\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right)^{1/2} \left(\frac{Y}{X} + 1\right)^{1/6}} \qquad Y = y + l = y - \frac{1}{2}$$
$$X = x + k = x + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow c\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{y - \frac{1}{2}}{x + 3/2}\right)^{1/6}}{\left(3 - 3\left(\frac{y - 1/2}{x + 3/2}\right)^2\right)^{1/2} \left(\frac{y - 1/2}{x + 3/2} + 1\right)^{1/6}} \quad //$$

2- a) Eğer $M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$ denklemi homojen ise gösteriniz ki,

$\dfrac{1}{xM + yN} = \mu(x,y)$ verilen denklem için bir integral çarpanıdır.

$\dfrac{M}{xM + yN} + \dfrac{N}{xM + yN}\, y' = 0$ (tam dif. denklem ise)

$\left(\dfrac{M}{xM + yN}\right)_y = \left(\dfrac{N}{xM + yN}\right)_x$ olmalı. Kısmî diferansiyelini alalım.

$$\Rightarrow \frac{M_y(xM + yN) - (xM_y + N + yN_y)M}{(xM + yN)^2} = \frac{N_x(xM + yN)^2 - (M + xM_x + yN_x)N}{(xM + yN)^2}$$

$$\Rightarrow yNM_y - NM - yMN_y = xMN_x - MN - xNM_x$$

$$\Rightarrow N(yM_y + xM_x) - M(yN_y + xN_x) = 0$$

homojen fonksiyonlar için Euler teoreminden,

$$\Rightarrow yM_y + xM_x = nM \quad , \quad yN_y + xN_x = nN$$

$$\Rightarrow NnM - MnN = 0$$

O halde $\mu(x,y)$ denklemin integral çarpanıdır.

Teorem: (Homojen Fonksiyonlar İçin EULER Teoremi):

Bir f(x) fonksiyonuna homojendir denir. Eğer,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \qquad (\lambda > 0)$$

oluyorsa. Her iki tarafın λ'ya göre türevini alalım.

$u = \lambda x \quad v = \lambda y \Rightarrow f(u,v) \rightarrow$

$$(f(u,v))' = f_u \cdot u_\lambda + f_v \cdot v_\lambda$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} y = n\lambda^{n-1} f(x,y) \quad (\lambda\text{'ya göre türev})$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y = n f(x,y)$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-y}{3y-x}$ denklemini integral çarpanı metoduyla çözelim.

$\Rightarrow (3x-y)dx - (3y-x)dy = 0$

$$\left.\begin{matrix} M_y = -1 \\ N_x = 1 \end{matrix}\right\} M_y \neq N_x$$

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM+yN} = \frac{1}{x(3x-y)-y(3y-x)} = \frac{1}{3x^2-3y^2} = \frac{1}{3(x^2-y^2)}$$

denklemde her iki tarafı μ ile çarpalım.

$$\Rightarrow \left(\frac{3x-y}{3(x^2-y^2)}\right)dx - \left(\frac{(3y-x)}{3(x^2-y^2)}\right)dy = 0$$

$$G(x,y) = \int \frac{3x-y}{3(x^2-y^2)}dx + h(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2-y^2) + \frac{1}{6}\ln(x-y) - \frac{1}{6}\ln(x+y) + h(y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = G_y(x,y) = -\frac{y}{(x^2-y^2)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-y} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+y} + h'(y) = -\frac{y}{x^2-y^2} + \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c$$

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2-y^2) + \frac{1}{6}\ln(x-y) - \frac{1}{6}\ln(x+y) + c \quad //$$

3 − Eğer, $M + Ny' = 0$ denklemi, $(f(xy) \neq g(xy))$

$y f(xy)dx + x g(xy)dy = 0$ şeklinde yazılabilirse, gösteriniz ki,

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM-yN} = \frac{1}{xy\cdot\{f(xy)-g(xy)\}}$$ bir integral çarpanıdır.