HAREKET GEOMETRİSİ

Babamın Anısına ...

Ve Aileme ...

Kaynaklar :

1 - Kinematik Dersleri H. R. Müller (Tercüme: E. Egesoy - M. Oruç)

Ankara Ün. Fen-Fak.

2 - Mekanik Dersleri, Kinematik (Dinamik-I)

Hasan Özaktav (İTÜ Makina Fak. - Çağlayan kitapevi)

3 - Mekanik Kitapları (Kinematik Bölümleri)

Konular :

1- Düzlemsel Hareketler (Esas işlenecek konu)

2- Küresel "

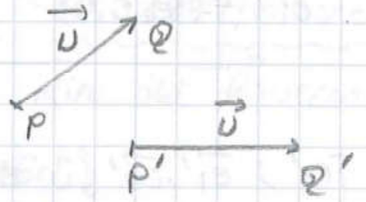
3- Uzay " i

3.3.97/P.tesi

Geometri: Dönüşümler altındaki değişmezlerin teorisini (invaryant) inceleyen bilim dalıdır.

Hareket Geometrisi = Kinematik

Hareket + Uzaklık
↓ ↓
Dönüşüm Değişmez.



Hareket dönüşümü altındaki değişmezlerin teorisine hareket geometrisi denir.

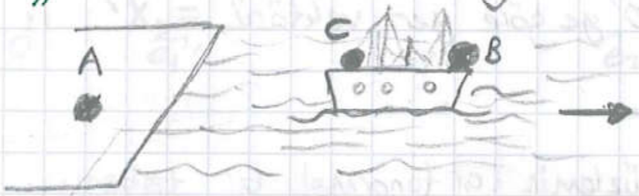
Projektif Geometri: Projektif dönüşüm altındaki değişmezlerin teorisidir.

Topolojik Geometri: Topolojik dönüşüm altındaki değişmezlerin teorisidir. Homeomorfizm = Topolojik Dönüşüm.

Diferensiyel Geometri: Diferensiyel dönüşüm altındaki değişmezlerin teorisidir. Diferensiyel = Türev (Eğrilik - Burulma değişmez)

DÜZLEMSEL HAREKET

Örnek // Samsun Limanından ayrılan bir gemiyi düşünelim.



A: Limanda sabit nokta, B: Gemideki sabit nokta,

C: Gemideki hareketli nokta.

A'ya göre B hareketli, B ye göre A hareketlidir.

B - A'ya, C - A'ya, C - B'ye göre durumları :

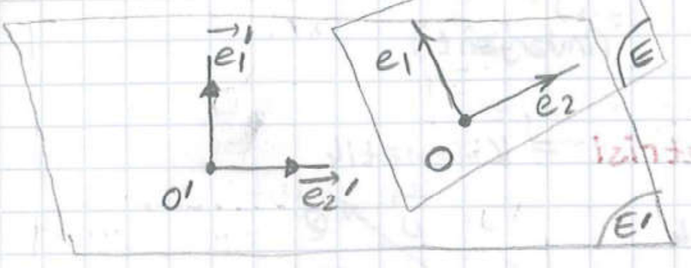
i- B/A hareketi (Geminin limana göre hareketi)

ii- C/A hareketi (Gemideki hareketlinin limana göre hareketi)

iii- C/B " (Sabit noktanın, hareketliye " ")

A/B, A/C, B/C tanımlanabilir.

Düzlemde sabit bir O' noktası alalım. Sonra O' noktasına



ortonormal $\vec{e_1}', \vec{e_2}'$ vektörlerini yerleştirelim. $\{\vec{e_1}', \vec{e_2}'\}$ vektörleri O' gibi sabit.

$\{O' ; \vec{e_1}', \vec{e_2}'\}$ sabit sistem. (sabit düzlem)

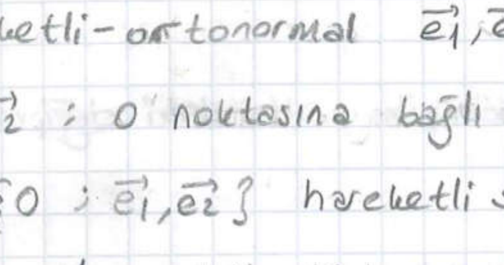
O' ye göre hareketli bir nokta O olsun. O noktasına hareketli-ortonormal $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ vektörlerini yerleştirelim.

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$: O noktasına bağlı olsun.

$\{O ; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ hareketli sistem (hareketli düzlem)

E' : sabit düzlem

E : hareketli düzlem



X; hem O, hem de O' ye göre hareketlidir.

X : hareketli nokta.

$\overrightarrow{O'X}$ = hareketli noktanın O' ye göre yer vektörü $= \vec{X}'$

$\overrightarrow{OX} = \vec{X}$ olsun.

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ve $\{\vec{e_1}', \vec{e_2}'\}$ düzlemin ortonormal bir tabanı olduğundan :

$\vec{X}' = x_1' \vec{e_1}' + x_2' \vec{e_2}'$ (tektürlü)

$\vec{X} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$ (tektürlü)

şeklinde yazılabilir.

$\overrightarrow{OO'} = \vec{U}$ diyelim.

$\Rightarrow U = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} = u_1' \vec{e_1}' + u_2' \vec{e_2}'$

şeklinde yazılabilir.

$\overset{\triangle}{O'OX}$ de paralelkenar kuralı yazılırsa ;

$$\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{X}' = -\overrightarrow{U} + \overrightarrow{X}} \quad \text{olur.}$$

Sonuç: $\boxed{\overrightarrow{X}' = (-u_1 + x_1)\overrightarrow{e_1} + (-u_2 + x_2)\overrightarrow{e_2}}$

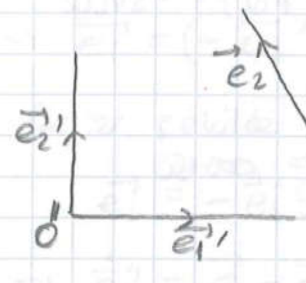
10.3.1997/Pazartesi

E/E' düzlem hareketini belirlemek için iki kavram gereklidir. Bunlar : a) Öteleme vektörü,

b) Dönme açısı.

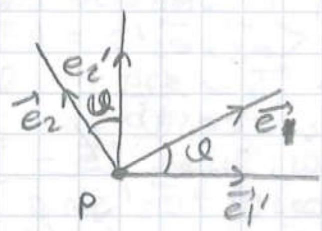
i- Öteleme vektörü : Hareketli sistemin başlangıç (O) noktasından, sabit sistemin (O') başlangıç noktasına giden $U = \overrightarrow{OO'}$ yer vektörüne öteleme vektörü denir.

ii- Dönme açısı : Sabit ve hareketli sistemlerin aynı numaralı birim vektörleri arasındaki açıya, E/E hareketinin dönme açısı denir.



$\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_1}) = \measuredangle(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_2})$

φ : dönme açısı



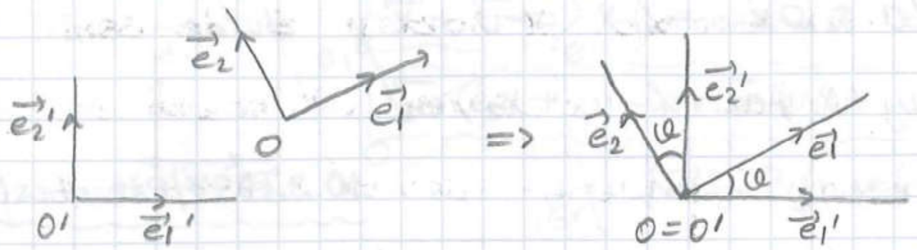
TANIM: (1-Parametreli Düzlemsel Hareket) :

Eğer, $U = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$ öteleme vektörünün ; u_1, u_2 bileşenleri ve φ dönme açısı ; $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ ve $\varphi = \varphi(t)$ şeklinde birtek reel parametrenin (zaman gibi) fonksiyonu iseler, E/E' hareketine bir parametreli düzlemsel hareket denir.

Hareket Denklemleri

$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{U}$ vektörleri birbirlerinden bağımsız değildir.

$$U = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} = u_1'\vec{e_1}' + u_2'\vec{e_2}'$$



$$\vec{e_1} = a_{11}\vec{e_1}' + a_{12}\vec{e_2}'$$

$$\vec{e_2} = a_{21}\vec{e_1}' + a_{22}\vec{e_2}'$$

$$a_{11} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_1}' \rangle = \langle a_{11}\vec{e_1}' + a_{12}\vec{e_2}', \vec{e_1}' \rangle$$

$$= \underbrace{\|e_1\|}_{1} . \underbrace{\|e_2\|}_{1} \cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow a_{11} = \cos\varphi \ //$$

$$a_{12} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2}' \rangle = \underbrace{\|e_1\|}_{1} \underbrace{\|e_2\|}_{1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow a_{12} = \sin\varphi \ //$$

$$a_{21} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_1}' \rangle = \|\vec{e_2}\| . \|\vec{e_1}'\| \left(\cos\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$$

$$\Rightarrow a_{21} = -\sin\varphi \ //$$

$$a_{22} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_2}' \rangle = \|\vec{e_2}\| \|\vec{e_2}'\| \cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow a_{22} = \cos\varphi \ //$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e_1} &= \vec{e_1}'\cos\varphi + \vec{e_2}'\sin\varphi \\ \vec{e_2} &= -\vec{e_1}'\sin\varphi + \vec{e_2}'\cos\varphi \\ \vec{U} &= u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} \end{aligned}} \quad E/E' \text{ hareketindeki denklemler}$$

$$\vec{X} = \vec{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} \qquad U = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$$

$$\vec{O'X} = X' = x_1'\vec{e_1}' + x_2'\vec{e_2}'$$

$$\vec{O'X} = \vec{O'O} + \vec{OX} \Rightarrow \vec{X}' = -\vec{U} + \vec{X}$$

$$\vec{X}' = (-u_1 + x_1)\vec{e_1} + (-u_2 + x_2)\vec{e_2}$$

TANIM: Eğer X noktasının (x_1, x_2) koordinatları zamandan bağımsız ise: $(x_1, x_2 = \text{sabit})$ X noktası E de sabit bir noktadır, (X noktası, E düzleminin bir noktasıdır.) denir.

TANIM: x_1', x_2' zamandan bağımsız ise (sabit) X noktası E' de sabit bir noktadır (E' nün bir noktasıdır) denir.

Türev Denklemleri

Bir X noktasının E ve E' sistemlerine göre hızlarını araştırmak için, E/E' hareketinin türev denklemlerini bulalım.

O' noktasından hareketi incelersek;

$$\vec{e_1} = \vec{e_1}'\cos\varphi + \vec{e_2}'\sin\varphi \qquad \frac{d\vec{e_1}}{dt} = \dot{\vec{e_1}} \qquad \left(\frac{d}{dt} = \bullet\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e_1}} = \dot{\vec{e_1}}'\cos\varphi + \vec{e_1}'\dot{\cos}\varphi + \dot{\vec{e_2}}'\sin\varphi + \vec{e_2}'\dot{\sin}\varphi$$

$$= \vec{0} - \vec{e_1}'\sin\varphi . \dot{\varphi} + \vec{0} + \vec{e_2}'\cos\varphi . \dot{\varphi}$$

$$\left\{ y = \cos\varphi \quad \varphi = \varphi(t) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi . \dot{\varphi} \right\}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e_1}} = (-\vec{e_1}'\sin\varphi + \vec{e_2}'\cos\varphi)\,\dot{\varphi}$$

{ Sabit sistemde türev sıfır, hareketli'de parametreye bağlı }

Benzer şekilde $\vec{e_2}$ nin türevini bulalım.

$$\vec{e_2} = -\vec{e_1}'\sin\varphi + \vec{e_2}'\cos\varphi \qquad \frac{de_2}{dt} = \dot{\vec{e_2}} \qquad \left(\frac{d}{dt} = \bullet\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e_2}} = \vec{0} - \vec{e_1}'\cos\varphi . \dot{\varphi} + \vec{0} - \vec{e_2}'\sin\varphi . \dot{\varphi}$$

$$\dot{\vec{e_2}} = -(\vec{e_1}'\cos\varphi + \vec{e_2}'\sin\varphi)\,\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{e_1}} &= \vec{e_2}\,\dot{\varphi} \\ \dot{\vec{e_2}} &= -\vec{e_1}\,\dot{\varphi} \end{aligned}} \quad \text{(Frenet formülleri benzeri)}$$

$u = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$ öteleme vektörünün türevlerini bulalım.

$$\frac{du}{dt} = \dot{\vec{u}} \Rightarrow \dot{\vec{u}} = \dot{u}_1\vec{e_1} + u_1\dot{\vec{e_1}} + \dot{u}_2\vec{e_2} + u_2\dot{\vec{e_2}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{u}} = \dot{u}_1\vec{e_1} + u_1\vec{e_2}\,\dot{\varphi} + \dot{u}_2\vec{e_2} + u_2(-\vec{e_1}\,\dot{\varphi})$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}} = (\dot{u}_1 - u_2\dot{\varphi})\,\vec{e_1} + (\dot{u}_2 + u_1\dot{\varphi})\,\vec{e_2}}$$

TANIM: Bu denklemlere, hareketin türev denklemleri denir. (E/E' nün)

Türeve göre olan bu formülleri, diferensiyele göre yazalım.

$$\left\{ y = f(x) \Rightarrow dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx \right\}$$

$$\Rightarrow d\vec{e_1} = \dot{\vec{e_1}}\, dt \quad \Rightarrow \dot{\vec{e_1}} dt = \vec{e_2}\, \dot{\varphi}\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{e_1} = \vec{e_2}\, d\varphi} \text{ olur.}$$

Benzer şekilde; $\boxed{d\vec{e_2} = -\vec{e_1}\, d\varphi}$ olur.

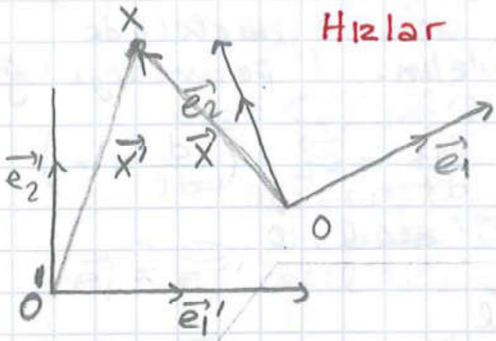
$$\boxed{d\vec{v} = (dv_1 - v_2\, d\varphi)\,\vec{e_1} + (dv_2 + v_1\, d\varphi)\,\vec{e_2}}$$

hareketin değişiminin diferensiyele göre yazılımıdır. Parametre ne olursa olsun, bu formüller parametreden bağımsızdır.

t yerine $t = f(t^*)$ bağıntısı ile bir t^* parametresi de alınabilir.

İki parametreli hareketlerde, $v_1 = v_1(t_1, t_2)$, $v_2 = v_2(t_1, t_2)$ ve $\varphi = \varphi(t_1, t_2)$ şeklinde iki parametrenin fonksiyonu olacağından, $d\varphi = \frac{d\varphi}{dt_1} dt_1 + \frac{d\varphi}{dt_2} dt_2$ yazılır.

Hızlar



E düzlemi E′ düzlemine göre, hareket ederken (1-parametreli hareket) bir X noktasıda E ve E′ ye göre hareket etsin. (yerini t'ye göre değiştirsin)

Hız: yolun zamana göre 1. türevidir.

Yol: yer vektörü $\Rightarrow$ vektörel hız.

Açı: $\Rightarrow$ açısal hız.

TANIM: (Relatif Hız): X noktasının E hareketli düzlemine göre hızına relatif hızı denir ve $\vec{v_r}$ ile gösterilir.

Hesaplanması: $\vec{X} = \vec{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} \Rightarrow \vartheta_r = \frac{d\vec{X}}{dt} = \dot{\vec{X}}$ olduğundan

$\dot{\vec{X}} = \dot{x}_1\vec{e_1} + x_1\underbrace{\dot{\vec{e_1}}}_{0} + \dot{x}_2\vec{e_2} + x_2\underbrace{\dot{\vec{e_2}}}_{0}$ {hareketi O' den incelersek $\vec{e_1}$' ve $\vec{e_2}$' O' ye göre sabit}

$\Rightarrow \boxed{\vartheta_r = \dot{x}_1\vec{e_1} + \dot{x}_2 e_2}$

TANIM: (Mutlak Hız): X noktasının E' sabit düzlemine göre hızıdır. $\vec{\vartheta_a}$ ile gösterilir.

Hesaplanması: $\vec{X'} = -\vec{u} + \vec{X}$; $\vec{\vartheta_a} = \frac{d\vec{X'}}{dt} = \dot{\vec{X}}'$

$\vec{\vartheta_a} = -\dot{\vec{u}} + \dot{\vec{X}}$ $\quad \vec{X} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$ idi.

$\dot{\vec{X}} = \dot{x}_1\vec{e_1} + x_1\dot{\vec{e_1}} + \dot{x}_2\vec{e_2} + x_2\dot{\vec{e_2}}$

$= \dot{x}_1\vec{e_1} + x_1\vec{e_2}\dot{\varphi} + \dot{x}_2\vec{e_2} + x_2(-\vec{e_1}\dot{\varphi})$

$\dot{\vec{X}} = (\dot{x}_1 - x_2\dot{\varphi})\vec{e_1} + (\dot{x}_2 + x_1\dot{\varphi})\vec{e_2}$

$\vec{\vartheta_a} = -(\dot{u}_1 - u_2\dot{\varphi})\vec{e_1} - (\dot{u}_2 + u_1\dot{\varphi})\vec{e_2} + (\dot{x}_1 - x_2\dot{\varphi})\vec{e_1} + (\dot{x}_2 + x_1\dot{\varphi})\vec{e_2}$

$$\boxed{\vec{\vartheta_a} = (-\dot{u}_1 + u_2\dot{\varphi} - x_2\dot{\varphi})\vec{e_1} + (-\dot{u}_2 - u_1\dot{\varphi})\vec{e_2} + \underbrace{\dot{x}_1\vec{e_1} + \dot{x}_2\vec{e_2}}_{\vartheta_r}}$$

TANIM: (Sürükleme Hızı): Mutlak hız ifadesindeki ;

$\boxed{\vec{\vartheta_f} = (-\dot{u}_1 + u_2\dot{\varphi} - x_2\dot{\varphi})\vec{e_1} + (-\dot{u}_2 - u_1\dot{\varphi})\vec{e_2}}$ vektörüne,

X noktasının sürükleme hızı denir.

Sonuç: $\boxed{\vec{\vartheta_a} = \vec{\vartheta_f} + \vec{\vartheta_r}}$

Teorem: İki düzlemli bir düzlem harekette hareketli bir X noktasının mutlak hız vektörü ;sürükleme hız vektörü ile relatif hız vektörünün toplamıdır.

Teorem: Hareketli bir düzlemde sabit bir X noktasının hızı (E'ye göre ϑ_a) sürükleme hızıdır.

İspat// X, E de sabit olsun. $X = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} = (x_1, x_2) = \text{sabit}$

$\Rightarrow x_1 = \text{sabit} \wedge x_2 = \text{sabit} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \vec{\vartheta_r} = \vec{0} \Rightarrow \vartheta_a = \vartheta_f$

TANIM: (Açısal hız): φ dönme açısının ,t zamanına göre türevine E/E' düzlem hareketinin açısal hızı denir. $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}}$ olur.

Genel olarak $\dot{\varphi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

Soru: Bir E/E' düzlem hareketinin 17.3.97/ Pazartesi

$\forall t$ anında $\vec{v}_f = 0$ yapan noktalar var mıdır?

Çözüm// E'de öyle X noktalarını arıyoruz ki;

$$\vec{v}_f = (-\dot{u}_1 + u_2\dot{\varphi} - x_2\dot{\varphi})\vec{e_1} + (-\dot{u}_2 - u_1\dot{\varphi} + x_1\dot{\varphi})\vec{e_2} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dot{u}_1 + u_2\dot{\varphi} - x_2\dot{\varphi} = 0 \\ -\dot{u}_2 - u_1\dot{\varphi} + x_1\dot{\varphi} = 0 \end{array}\right\} \; X(x_1, x_2) \text{ noktaları}$$

Eğer $\dot{\varphi} \neq 0$ (hareketin açısal hızı) ise (x_1, x_2) çözülebilir.

$$x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} = p_1 \qquad x_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\varphi}} = p_2$$

Sonuç: Açısal hızı $\dot{\varphi} \neq 0$ olan bir E/E' düzlem hareketinde $\forall t$ anında, sürükleme hızı sıfır olan bir tek nokta vardır.

TANIM: Bu noktaya E/E' düzlem hareketinin POL (dönme polü, veya ani dönme merkezi) noktası denir.

Pol noktasını P ile gösterirsek;

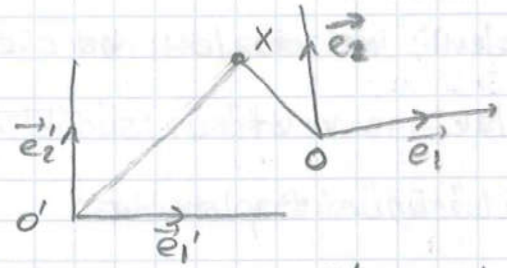
$$\vec{OP} = \vec{P} = p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2}$$

$$= u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} + u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\varphi}}, \quad \dot{\varphi} \neq 0 \text{ bağıntısı sağlanır.}$$

$\vec{v}_r$: E ye göre hız

$\vec{v}_a$: E' ye " "

$\vec{v}_f$:



Sonuç: P pol noktası hem E, hem de E' de bir anlık sabit olan bir noktadır.

Sonuçlar: Pol noktası ifadesinde $\dot{u}_1$ ve $\dot{u}_2$ çözülürse;

$$\Rightarrow \dot{u}_1 = (u_2 - p_2)\dot{\varphi} \quad \wedge \quad \dot{u}_2 = (p_1 - u_1)\dot{\varphi}$$

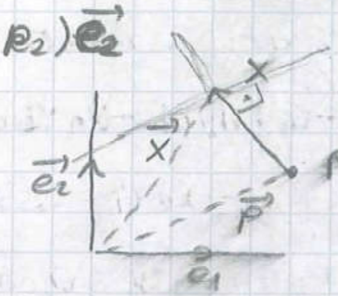
Bunları $\vec{v}_f$ de yerine yazalım.

$$\vec{v}_f = \left[-(u_2 - p_2)\dot{\varphi} + u_2\dot{\varphi} - x_2\dot{\varphi}\right]\vec{e_1} + \left[-(p_1 - u_1)\dot{\varphi} - u_1\dot{\varphi} + x_1\dot{\varphi}\right]\vec{e_2}$$

$$\boxed{\vec{v}_f = \left[-(x_2 - p_2)\vec{e_1} + (x_1 - p_1)\vec{e_2}\right]\dot{\varphi}}$$

Hareketin $P(P_1,P_2)$ pol noktasından E de sabit bir $X(X_1,X_2)$ noktasına giden ışın vektör $\overrightarrow{PX}$ olsun.

$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{X} - \overrightarrow{P} = (X_1 - P_1)\overrightarrow{e_1} + (X_2 - P_2)\overrightarrow{e_2}$



Sonuç:

i- $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{\vartheta_f}$

$= -(X_1 - P_1)(X_2 - P_2) + (X_2 - P_2)(X_1 - P_1) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{\vartheta_f}$

$\forall t$ anında hareketin pol noktasından E de sabit bir X noktasına giden ışın vektörü ile sürüklenme hızı birbirine diktir.

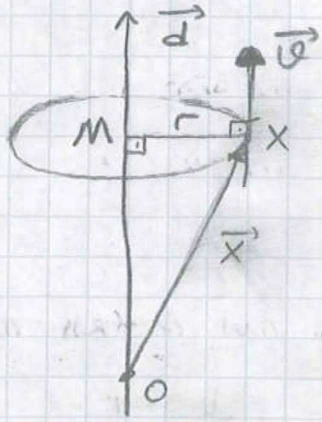
ii- $\|\overrightarrow{\vartheta_f}\| = \sqrt{(X_2 - P_2)^2 + (X_1 - P_1)^2}\ \dot{\varphi}$

$\|\overrightarrow{PX}\| = \sqrt{(X_1 - P_1)^2 + (X_2 - P_2)^2}$

$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{\vartheta_f}\| = \|\overrightarrow{PX}\| \cdot \dot{\varphi}}$ $\quad (\Rightarrow \vartheta = r \cdot w$ olur.)

Dairesel Hareket

Bir X noktası bir eksen etrafında dairesel hareket yapsın.



$\overrightarrow{\vartheta}$: vektörel hız

$\vartheta = \|\overrightarrow{\vartheta}\|$ skaler hız (hız)

w: açısal hız

r: yörünge yarıçapı

$\boxed{\vartheta = w \cdot r}$

Sonuç: X noktası M noktası etrafında; ϑ hızlı, w açısal hızlı ve $r = \overline{MX}$ yarıçaplı bir dönme hareketi yapar $\Leftrightarrow \vartheta = w \cdot r$ olur.

Teorem: Hareketli E düzleminin her $\overset{\text{sabit}}{X}$ noktası $\forall t$ anında P merkezli ve $\dot{\varphi}$ açısal hızlı bir dönme hareketi (ani dönme hareketi) yaparlar.

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$; hareketin açısal hızı olduğuna göre ;

$d\varphi = \dot{\varphi}dt$, hareketin sonsuz küçük dönme açısıdır.

iii - Hareketin her t anında bir tek P noktası vardır.

E/E' hareketi sırasında P noktası E ve E' düzlemlerinde birer eğri çizer.

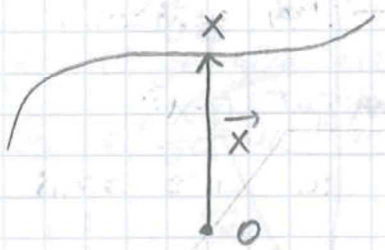
a-TANIM: P pol noktasının E hareketli düzlemindeki geometrik yerine, E/E' hareketinin hareketli pol eğrisi denir.

b-TANIM: P, pol noktasının E' sabit düzlemindeki geometrik yerine, E/E' hareketinin sabit pol eğrisi denir.

(P): hareketli pol eğrisi.

(P'): sabit pol eğrisi.

$X: I \longrightarrow E^2$, $X = X(t)$ t keyfî parametre



$\overrightarrow{OX} = \vec{X} = \vec{X}(t)$

$\vec{v} = \frac{d\vec{X}}{dt}$ vektörel hız.

$v = \|\vec{v}\| = \left\|\frac{d\vec{X}}{dt}\right\|$ skaler hız.

Yay uzunluğu : $X = X(t)$, $[a;b]$ de tanımlı (a,b) de türevli ise

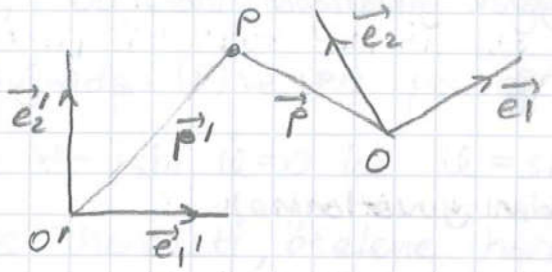
$S_{[a,b]} = \int_a^b \left\|\frac{dX}{dt}\right\| dt$ olur. $\Rightarrow S = \int_a^t \left\|\frac{dX}{dt}\right\| dt$ ise

zaman elementi.

$ds = \left\|\frac{d\vec{X}}{dt}\right\| dt = \left\|\frac{d\vec{X}}{dt}dt\right\| = \|d\vec{X}\|$ olur.

TANIM: $ds = \left\|\frac{dX}{dt}\right\| dt = \|\vec{v}\| dt = \overset{\text{hız}}{v} dt = \|d\vec{X}\|$ ifadesine $X = X(t)$ eğrisinin yay elementi denir.

Pol eğrilerinin hızları



$\vec{\vartheta_a}$: Pol noktasının E' ye göre hızı

$\vec{\vartheta_r}$: Pol noktasının E ye göre hızı

$\Rightarrow \vec{\vartheta_a} = \vec{\vartheta_f} + \vec{\vartheta_r} \wedge \vec{\vartheta_f} = \vec{0}$ olup

$\Rightarrow \underline{\vec{\vartheta_a} = \vec{\vartheta_r}}$.

Teorem: Hareketin pol noktasının sabit ve hareketli sistemlere göre hızları eşittir. (Pol eğrilerinin çizilme hızları eşittir.)

$$\vec{\vartheta_a} = \frac{d\vec{P}'}{dt} \qquad \vec{\vartheta_r} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \Rightarrow \vec{\vartheta_a} = \vartheta_r .$$

(P') ; sabit pol eğrisinin ds' yay elemanı

(P) ; hareketli pol eğrisinin ds yay elemanı olsun.

$$ds' = \left\| \frac{d\vec{P}'}{dt} \right\| dt = \| \vec{\vartheta_a} \| dt \quad \wedge \quad \vec{\vartheta_a} = \vec{\vartheta_r} \text{ olup,}$$

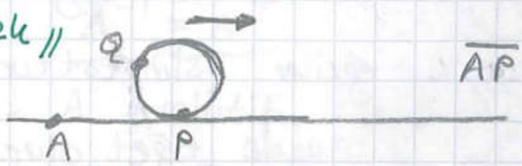
$$= \| \vec{\vartheta_r} \| dt = \left\| \frac{d\vec{P}}{dt} \right\| dt = ds$$

$\Rightarrow \underline{ds' = ds}$ (Pol eğrilerinin yay eğrileri eşittir.)

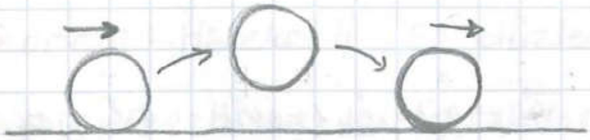
Sonuç: P Pol noktası E/E' düzlem hareketinde, (P) hareketli ve (P') sabit pol eğrileri üzerinde eşit zamanda eşit yollar alarak ilerler.

TANIM: İki eğri birbirine sürekli olarak teğet olur ve komşu iki değme noktası arasında eşit yaylar bulunursa "<u>bu iki eğri birbiri üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi yapıyorlar</u>" denir.

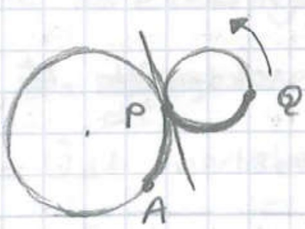
Örnek //



$\overline{AP} = \overset{\frown}{PQ}$ (kaymadan yuvarlanma)



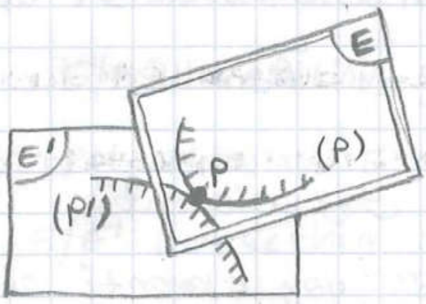
(kayarak yuvarlanma)



(kaymadan yuvarlanma)

$\widehat{PA} = \widehat{PQ}$

Teorem: Bir parametreli bir E/E' düzlem hareketinde E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi ; E' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymadan yuvarlanır.



Özel Haller :

i- (P) hareketli pol eğrisi büzülerek bir nokta olursa $(P) \longrightarrow P$ bu durum sabit (P') pol eğrisi için de geçerlidir. $(P') \longrightarrow P$

Sonuç: E/E' hareketi P noktası etrafındaki bir dönme hareketi olur.

ii- t parametresinin sonlu sayıdaki değerleri için, $\dot{\varphi}$ açısal hızı sıfır olursa ;

$\vec{v}_f = -\dot{u}_1 \vec{e}_1 - \dot{u}_2 \vec{e}_2$ olur. ve P pol noktası ;

$p_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} \wedge p_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\varphi}}$ ifadesinde

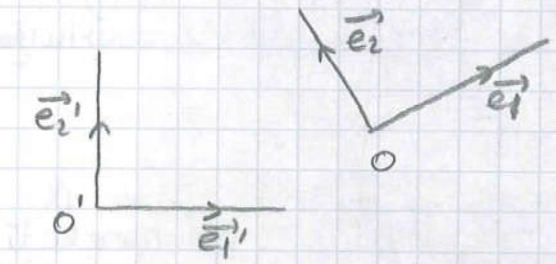
$p_1 = \mp\infty$, $p_2 = \mp\infty \Rightarrow P$ Pol noktası sonsuza gider.

İki eğri sonsuzda birbirine teğetse, bu eğriler asimptotturlar. Yani (P) ve (P') pol eğrileri birbirine sonsuzda teğet olur.

Sonuç: Bu sonlu sayıdaki teğet değerleri için $p \to \infty$ olduğundan (P) ve (P′) pol eğrileri birbirine asimptotturlar.

iii- $\forall t$ için $\dot{\varphi}=0$ ise $\varphi=$sabit olacağından bu durumda E/E′ hareketi, ötelene hareketi olur. (kayma hareketi)

Ters Hareket



I- Hareketi O′ dan incelersek, düzlem harekete ;
$B_1 = E/E'$ düzlem hareketi denir. (B_1 : 1 parametreli düzlem hareket)

II- Hareketi O dan incelersek, $B_1^{-1}=E'/E$ hareketi deriz. (E' nün E ye göre hareketi) B_1^{-1} hareketine ; B_1 hareketinin ters hareketi denir.

hareket ⟶ ters hareket

(E) hareketli düzlem ⟶ sabit düzlem

(E′) sabit düzlem ⟶ hareketli düzlem.

(P) hareketli pol eğrisi ⟶ sabit pol eğrisi

(P′) sabit pol eğrisi ⟶ hareketli pol eğrisi.

$$\left.\begin{aligned}\vec{e_1} &= \vec{e_1}'\cos\varphi + \vec{e_2}'\sin\varphi \\ \vec{e_2} &= -\vec{e_1}'\sin\varphi + \vec{e_2}'\cos\varphi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\end{bmatrix}}_{e} = \underbrace{\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\vec{e_1}'\\ \vec{e_2}'\end{bmatrix}}_{e'}$$

$\Rightarrow e = Ae'$ A matrisi ortogonal matristir.

$A^{-1}=A^T$ $\quad$ $A^{-1}=A \iff A^2=I_n$

A involütif matristir.

$\Rightarrow A^T e = A^T A e' \Rightarrow e' = A^T e$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{bmatrix}$$

E'/E ters hareketinde ;

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e_1}' &= \vec{e_1}\cos\varphi - \vec{e_2}\sin\varphi \\ \vec{e_2}' &= \vec{e_1}\sin\varphi + \vec{e_2}\cos\varphi \end{aligned}}$$

açı : $\underset{\text{hareket}}{\varphi} \longrightarrow \underset{\text{ters hareket}}{\phi = -\varphi}$ olur. (φ : Dönme açısı)

açısal hız : $\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\Phi} = -\dot{\varphi}$ olur.

Teorem: Bir parametreli bir B_1 hareketinin ters hareketi olan B_1^{-1} hareketinde sabit ve hareketli düzlemler yanında sabit ve hareketli pol eğrileri de rollerini değiştirirler. Her iki hareketin açısal hızlarının yalnızca işareti farklıdır.

Ödev: B_1 hareketinden B_1^{-1} ters hareketine geçildiğinde sürükleme hızının da işaret değiştirdiğini ispatlayın.

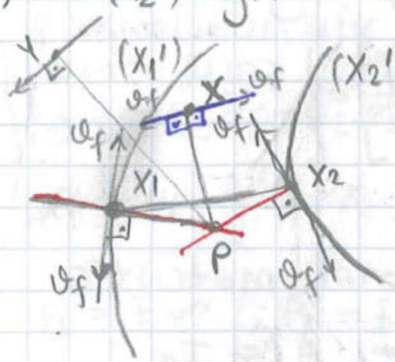
$\vec{v}_a = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ $\quad \vec{v}_r = \dfrac{d\vec{x}'}{dt}$ $\quad \vec{x}' = -u + \vec{x}$ idi.

Burada $\vec{x} = u + \vec{x}'$ olur.

Örnekler : 24.3.1997 / P.tesi

1 - İki nokta kılavuzluğu :

E düzleminin iki; X_1 ve X_2 noktası, E' düzlemindeki iki (X_1') ve (X_2') eğrileri üzerinde hareket ediyor.



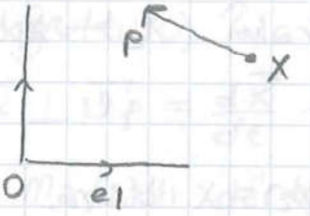
X_1, X_2 : E de sabit

X_1, X_2 : E'de hareketli

a) Hareketin pol noktasının yerini bulun.

b) E düzleminde sabit bir X noktasının yörüngesinin teğet doğrultusunu bulun.

Çözüm// a)



X, E'de sabit $\Rightarrow \vartheta_f = 0$

$\vartheta_a = \vartheta_f$

$PX \perp \overrightarrow{\vartheta_f}$ hız = teğet

pol ışını — fiziksel — matematiksel.

E'de sabit bir noktanın hızı, sürüklenme hızı ve bunun doğrultusu bir noktanın teğet vektörüdür.

$X \longrightarrow X_1$ alırsak, $PX_1 \perp \vartheta_f$

X_1 noktasında (X_1') eğrisine çizilen normal (teğete dik olan doğru) üzerinde P pol noktası bulunur.

X_2, E de sabit. X_2 noktasında (X_2') ye çizilen teğet sürükleme hızı doğrultusundadır.

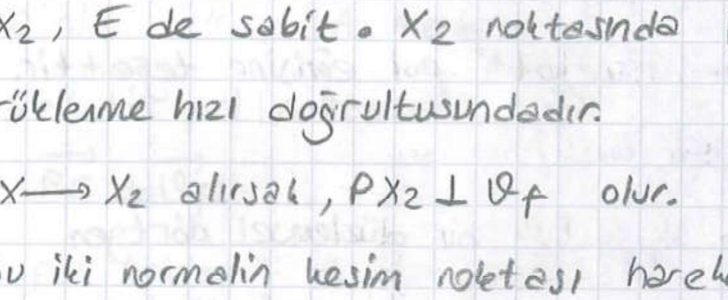
$X \longrightarrow X_2$ alırsak, $PX_2 \perp \vartheta_f$ olur.

Bu iki normalin kesim noktası hareketin pol noktasıdır. //

Çözüm// b) X : E'de sabit, E' de hareketli.

$\overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{\vartheta_f} = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt}$ $\qquad PY \perp \vartheta_f$. olur.

Özel Hâl : L = sabit uzunluklu bir doğru parçasının uç noktaları $(X_1') = (X_2') = c$ eğrisi üzerinde hareket etsin.



X_1, X_2 : hareketli düzlemde

c : sabit düzlemde

Soru: a- Hareketin pol noktası, ?

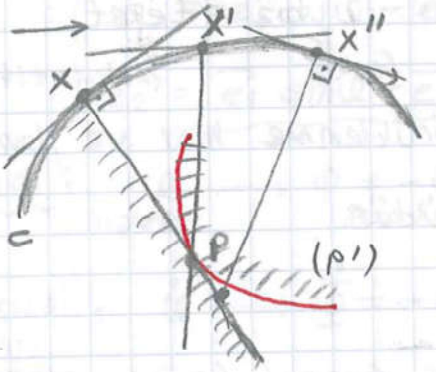
b- E de sabit bir X noktasının yörüngesinin teğet doğrultusu. ?

Çözüm// a) Şekilde. $\qquad \overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{\vartheta_f} = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt} \qquad PY \perp \overrightarrow{\vartheta_f}$

2- Bir eğri teğetinin kayma hareketi.

Özel haldeki X_1 ve X_2 yi yaklaştıralım. ($X_2 \longrightarrow X_1$ olsun)

L kiriş ⟶ L teğet olur.



$X_1 = X_2 = X$ olsun.

Hareketin pol noktası;

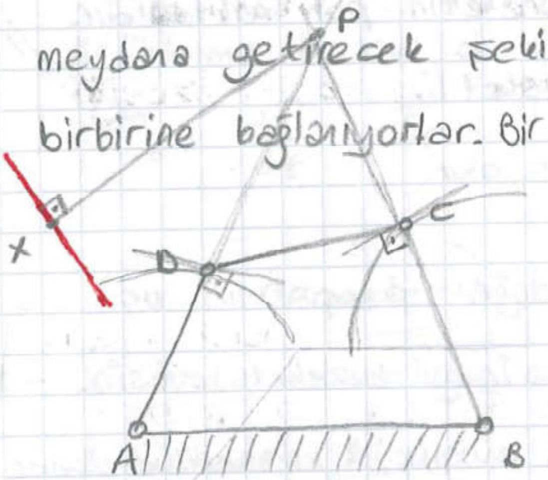
$$\vec{\vartheta}_f = \frac{dx}{dt}$$

Sonuç: X deki yörünge normali doğrusu hareketin hareketli pol eğrisidir. P eğrisi bu doğrudur.

(P'): sabit pol eğrisi, hareketli pol eğrisine teğettir.

3- Mafsallı (Eklenli) Dörtgen:

Çeşitli uzunlukta dört çubuk bir düzlemsel dörtgen meydana getirecek şekilde uçlarındaki mafsallarla birbirine bağlanıyorlar. Bir kenarı, $\overline{AB}$ bir yere tespit ediliyor.



(Sabit tutuluyor.) Diğer kenarlar bir düzlem içinde hareket ediyor.

$\overline{AB}$ sabit düzlemde

$\overline{CD}$ hareketli düzlemde

C noktasının yörüngesi, B merkezli ve $\overline{BC}$ yarıçaplı çember üzerindedir.

B noktasının yörüngesi, A merkezli ve $\overline{AD}$ yarıçaplı çember üzerindedir.

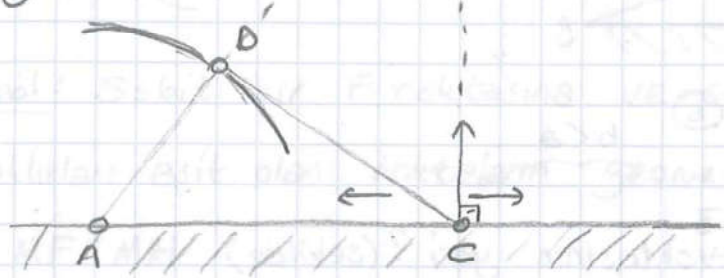
Soru: P pol noktasının yeri?

Çözüm // Hareketin pol noktası; $\overline{BC}$ ve $\overline{AD}$ nin kesim noktasıdır. //

Soru: Hareketli düzlemde sabit bir X noktasının yörüngesinin teğet doğrultusu ?

$\vec{PX} \perp \vec{v_f} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ olur. // (şekilde)

Özel Hâl: Mafsallı dörtgende C noktası A'dan geçen bir doğru üzerinde hareket etsin.



C nin yörüngesi A dan geçen sabit doğrusu

D'nin " A merkezli, $\overline{AD}$ yarıçaplı çember.

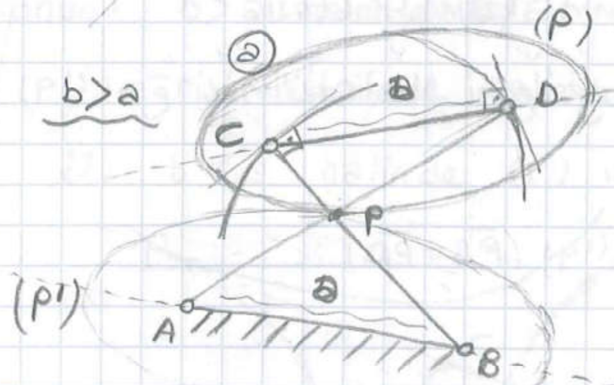
Hareketin pol noktasının yeri :

$\vec{PC} \perp \vec{v_f}$, $\vec{PD} \perp v_f$

P pol noktası : A dan geçen doğruya C noktasında çizilen dikmenin $\overline{AD}$ doğru parçasının uzantısını kestiği noktadır. //

4 - İkizler mekanizması :

Köşelerinden mafsallı öyle bir dörtgendir ki karşılıklı kenarları eşit uzunlukta ve uzun kenarları kesişir.



$\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{BC} = \overline{AD} = b$

$\overline{AB}$: sabit düzlemde (E')

$\overline{CD}$: hareketli düzlemde (E)

C'nin yörüngesi ; B merkezli, $\overline{BC}$ yarıçaplı çember.

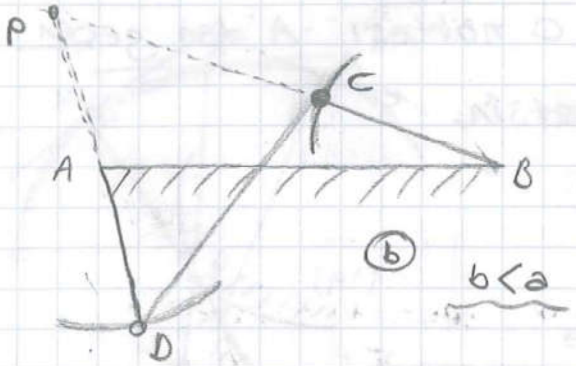
D nin " ; A " , $\overline{AD}$ " " .

Hareketin Pol noktası ; $\overline{BC}$ ve $\overline{AD}$ nin kesim noktasıdır.

Burada iki durumu ayırt edelim;

I- Az önce yapıldı. $b > a$ $\quad b = \overline{BC} = \overline{AD}$, $a = \overline{AB} = \overline{CD}$

II- $b < a$



Yörüngeler aynıdır.

Soru: Hareketin pol noktasının yeri ? (şekilde)

Soru: C noktası çember üzerinde bir yönde hareket ederken D noktası nasıl hareket eder ?

i- $b > a \Rightarrow$ C ve D noktaları çemberler üzerinde aynı yönde hareket eder.

Tanım: Bu durumda bu mekanizmaya aynı yönlü ikizler mekanizması denir.

ii- $b < a \Rightarrow$ C ve D noktaları çemberler üzerinde zıt yönde hareket eder.

Tanım: Bu durumda bu mekanizmaya zıt yönlü ikizler mekanizması denir.

Pol noktaları:

i'de $\overline{BC}$ ve $\overline{AD}$ nin kesim noktası.

ii de " " uzantılarının kesim noktası.

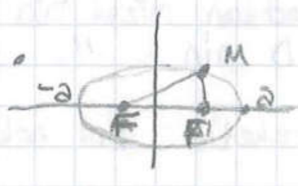
i. $b > a$ halinde (P) ve (P') Pol eğrilerini belirtelim.

$A\hat{B}P = C\hat{D}P$ (ödev)

$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PD} = \overline{AD} = b$ $\qquad (\overline{PB} = \overline{PD})$

$\boxed{PA + PB = b = sabit}$

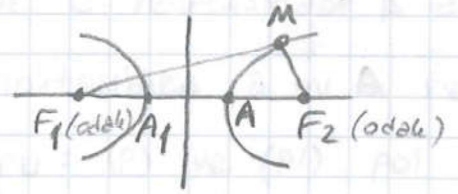
Elips: Düzlemde sabit olan iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri.



$2a = MF + MF' = Sabit$

$\{M : \overline{MF} + \overline{MF'} = 2a\} = \text{elips.}$

Hiperbol : Düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı (mutlak değerce) sabit olan noktaların geometrik yeri.



$\{M : |\overline{MF_2} - \overline{MF_1}| = 2a\} = \text{hiperbol}$

$\overline{A_1A} = 2a$

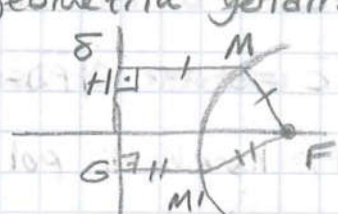
Parabol : Sabit bir F noktasına ve sabit bir δ doğrusuna uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeridir.

$MF = MH$

$\{M : \overline{MF} = \overline{MH}\} = \text{parabol}$

F : parabolün odağı

δ : // doğrultmanı.



Sonuç: (P') sabit pol eğrisi ; odakları, A ve B noktaları asal eksen uzunluğu b olan bir elipstir.

$\overline{PC} + \overline{PD} = \overline{PC} + \overline{PB} = \overline{BC} = b \qquad (\overline{PD} = \overline{PB})$

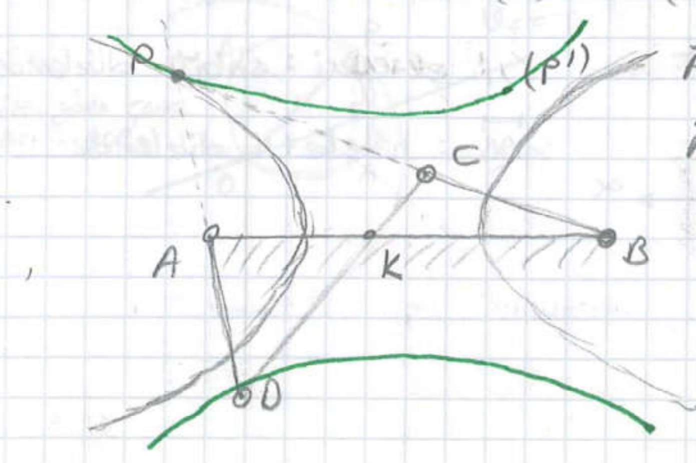
$\boxed{\overline{PC} + \overline{PD} = b = \text{sabit}}$

Sonuç: (C ve D hareketli noktalar)

(P) hareketli pol eğrisi ; odakları ; C ve D noktaları asal eksen uzunluğu b olan bir elipstir.

Sonuç: b > a halinde E/E' hareketinde (P) eğrisi (elips) (P') eğrisi üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi yapar.

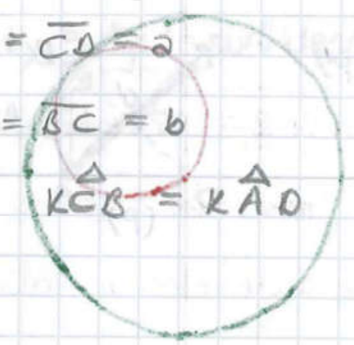
ii. b < a halinde (P) ve (P') pol eğrilerini belirtelim.



$\overline{AB} = \overline{CD} = a$

$\overline{AD} = \overline{BC} = b$

$\widehat{KCB} = \widehat{KAD}$ (ödev)



$$\overline{PB}-\overline{PA} = \overline{PB}-\overline{PC} \quad \Big\} \; \overline{PC}=\overline{PA} \text{ (ödev)}$$

$$= \overline{PB}-\overline{PC} = \overline{BC} = b = \text{sabit}$$

$$\boxed{\overline{PB}-\overline{PA} = b = \text{sabit}}$$

Sonuç : (P') sabit pol eğrisi, odakları A ve B, asal eksen uzunluğu b olan <u>hiperboldür.</u>

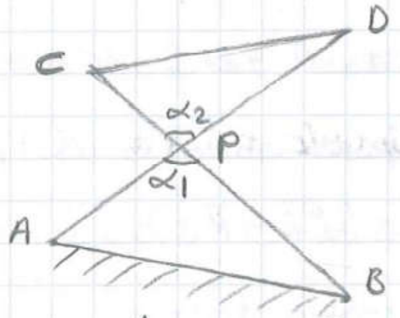
<u>31.3.97 / P.tesi</u>

$$\overline{PD}-\overline{PC} = \overline{PD}-\overline{PA} = \overline{AD} = b$$

$$\overline{PD}-\overline{PC} = b \Rightarrow |\overline{PD}-\overline{PC}| = b$$

Sonuç : (P) hareketli pol eğrisi, odakları C ve D, asal eksen uzunluğu b olan <u>hiperboldür.</u>

Soru :



$$\overset{\triangle}{ABP} \overset{?}{=} \overset{\triangle}{CDP}$$

$$\overset{\triangle}{ABD}, \quad \overset{\triangle}{CDP}$$

AD ortak, $\overline{AB} = \overline{CD} = a$

$\overline{AD} = \overline{BC} = b$

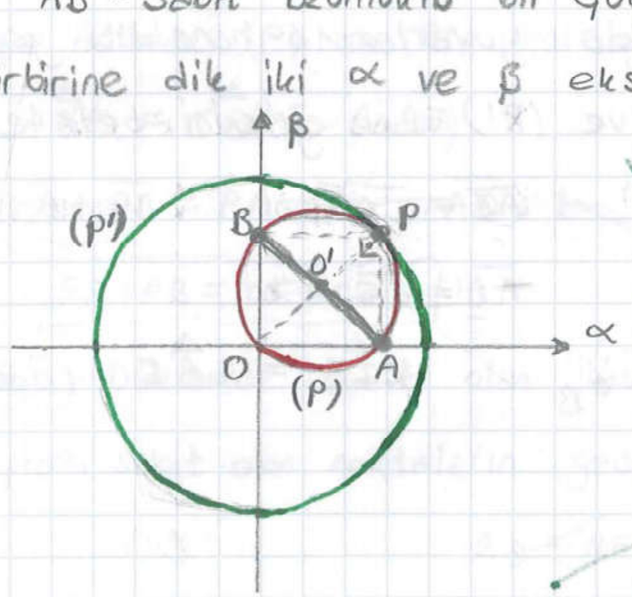
$\overset{\triangle}{ABP}$, $\overset{\triangle}{CDP}$

$\hat{A} = \hat{C}$, $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\alpha_1 = \alpha_2$

O halde, iki üçgen eşittir. //

5- <u>Elips Hareketi :</u>

$\overline{AB}$ = sabit uzunluklu bir çubuğun A ve B uçları, birbirine dik iki α ve β eksenleri üzerinde hareket ediyor.



α, β eksenleri : sabit düzlemde

$\overline{AB}$: hareketli düzlemde

Soru: E/E' hareketinin P pol noktasının yerini bulun.

Çözüm// Hareketin P pol noktası, A noktasından α ya, ve B noktasından β eksenine çıkılan dikmelerin kesim noktasıdır.

Soru: (P) ve (P') pol eğrilerini bulun.

a) $\overline{OP} = \overline{AB} = \text{sabit} \Rightarrow \overline{OP} = \text{sabit}$ olur.

$$(P') = \{ P : \overline{OP} = \text{sabit} \}$$

Sonuç: (P') sabit pol eğrisi, merkezi O noktası ve yarıçapı $\overline{AB}$ olan çemberdir.

b) P noktası, $\overline{AB}$ yi dik açı altında görüyor.

Sonuç: (P) hareketli pol eğrisi, AB çaplı ($\frac{AB}{2}$ yarıçaplı) ve O' merkezli bir çemberdir.

E/E' hareketi, küçük çemberin büyük çember içinde kaymadan yuvarlanmasıdır.

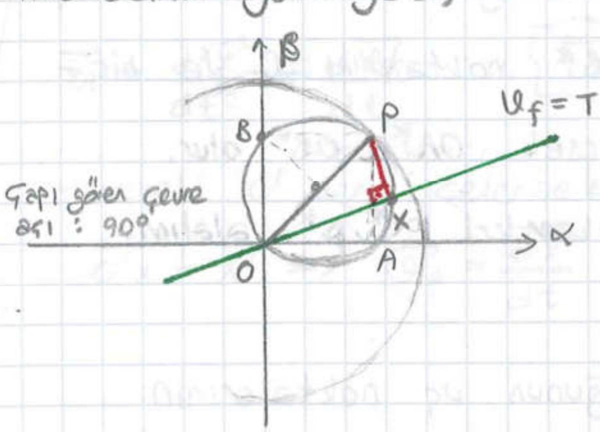
Bu harekete, elips hareketi denir.

E de sabit bazı X noktalarının yörüngesi ;

a- Hareketli pol eğrisinin O' merkezinin yörüngesi ;

O merkezli, $OO' = \frac{AB}{2}$ yarıçaplı çemberdir.

b- (P) hareketli çemberinin (hareketli pol eğrisi) herhangi bir noktasının yörüngesi;



X : E de sabit nokta.

$\text{Teğet}_X = \mathcal{V}_f$: sürüklenme hızı

$\mathcal{V}_f \perp PX$

Sonuç: (P) nin her X noktasının $\overline{OP} = \overline{AB}$ yörünge hareketleri O'dan geçer. (O = sabit)

$$\Rightarrow \vartheta_f \perp T = \text{sabit} = \vec{a} \quad \Rightarrow T = \vec{a}$$

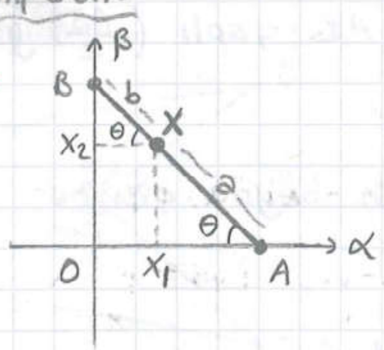
$$T = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{a} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{X} = \underset{\text{doğrultman}}{\vec{a}}\, t + \underset{}{b}} \to \text{nokta}$$

X'in yörüngesi doğru olur.

Sonuç: Hareketli çemberin bir X noktasının yörüngesi; bu noktayı başlangıca birleştiren bir doğru üzerinde yörünge çizer.

c- $\overline{AB}$ üzerindeki herhangi bir noktanın yörüngesi; bir elipstir.

İspat//



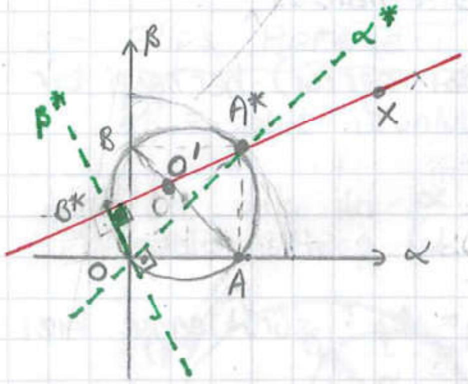
$BX = b \;\wedge\; AX = a$ olsun.

$$\frac{x_1}{b} = \cos\theta \qquad \frac{x_2}{a} = \sin\theta$$

$$\left(\frac{x_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1 \text{ elipstir. } //$$

d- E hareketli düzleminin herhangi bir noktasının yörüngesi elipstir.



X ve O' yü birleştirelim.

Bu doğru hareketli çemberi, A^* ve B^* noktalarında kessin.

A^* ve B^* noktalarını O ile birleştirirsek $OA^* \perp OB^*$ olur.

Yani, eksenleri α^*, β^* alalım.

$\overline{A^*B^*} = \overline{AB} = \text{sabit}$

Elips hareketi, $\overline{A^*B^*}$ çubuğunun uç noktalarının