ANALİZ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

– KÜMELER –

Küme : Bazı matematik varlıkların meydana getirdiği topluluk aşağıdaki koşulları sağlarsa buna küme denir.

1- Kümenin herhangi bir elemanı ya aynı ya da farklıdır.

2- Aynı matematik varlık bir küme aynı zamanda o kümenin bir elemanı olama

3- Bir matematik varlığın kesinlikle hangi kümenin elemanı olduğunu bilmek gerekir.

4- Bütün kümelerin meydana getirdiği bir kümeden söz edilemez.

$\{x\}$ $\{a,b,c\}$ A , B, X, Y

a b x y

$\{1,1,2,3\}$ → küme değil

$a \in A$ $a \notin A$

Önermeler :

1- Ve : Bu önerme her ikisi anlamında kullanılır.

Örneğin, f fonksiyonu sürekli ve çift fonksiyondur.

2- Veya : Önermelerden bir tanesi sağlanabildiği gibi ikiside beraber sağlanabilir.

Örneğin, f fonksiyonu sürekli veya integrallenebilir.

$\forall$ (Her) $\forall x \in \mathbb{R}$

$\exists$ (öyle ki) vardır, bazı gibi bir anlamı vardır.

Önermenin Değili :

$P \longrightarrow$ değili P'

Alt Küme :

X, A

$\forall x \in A \rightarrow x \in X \iff A \subset X$

İki Kümenin Eşitliği :

X ve Y,

$X \subset Y$ ve $Y \subset X \iff X = Y$ dur.

Boş Küme :

Hiçbir elemanı olmayan kümeye denir.

Sonlu Elemanlı Küme:

Elemanlarının sayısı sonlu olan kümeye denir.

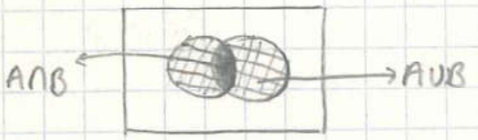
İki Kümenin Arakesiti ve Kesişimi.

A, B gibi iki tane küme verilmiş olsun. Bu iki kümenin arakesiti;

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$ şeklinde tanımlanır. Birleşimi ise;

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım: İki kümenin ara kesiti boş ise buna ayrık küme denir.



Alt Kümenin Tümleyeni:

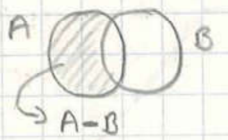
E bir küme ve $A \subset E$ ise

$C_E A \rightarrow$ A kümesinin E'ye göre tümleyeni denir.

$$C_E A = \{ x \mid x \in E \text{ fakat } x \notin A \}$$

İki Kümenin Farkı:

A, B $\quad A - B = \{ x \mid x \in A \text{ fakat } x \notin B \}$



$B - A = \{ x \mid x \in B \text{ fakat } x \notin A \}$

Genelde $B - A \neq A - B$ dir.

$A \Delta B = (B - A) \cup (A - B) \rightarrow$ A ile B nin simetrik farkı.

P(x) Kuvvet Kümesi:

Örnek// $X = \{a, b, c\} \quad P(X) = \{\{a\}\{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X, \emptyset\}$

İki Kümenin Kartezyen (Dik) Çarpımı:

X ve Y küme olmak üzere, $X \times Y$ ile gösterilir. Şöyle tanımlanır.

$X \times Y$ ikili $\quad X \times Y = \{ z \mid z = (x, y), x \in X, y \in Y \}$

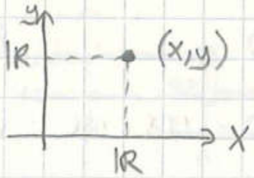
Özel Hal: 1) $X=Y$ ise

$X\times Y = X \times X = X^2$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}.\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

Ör// $X = Y = \mathbb{R}$

$X \times Y = \mathbb{R}.\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



Genelleştirme:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ n tane küme olsun.

$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{z \mid z = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots\ldots$

$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X \quad X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \underbrace{X \times X \times X \times \ldots \times X}_{n\ tane} = X^n$

$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$

$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\ tane} = \mathbb{R}^n$

Sayı Sistemleri:

Sayılar: $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I})$

$1, 2, 3, \ldots\ldots$ Doğal sayılar $\rightarrow \mathbb{N}$

Sayma sayıları $\quad \mathbb{N} = \{x \mid x \text{ doğal sayı}\} - \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

$x+1 = 1 \Rightarrow x = 0 \qquad x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$

$\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\ldots -3, -2, -1\}$

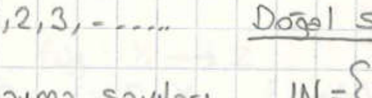
$\mathbb{N} \subset \underset{\text{tamsayılar}}{\mathbb{Z}} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Rasyonel sayılar $(\mathbb{Q})$: İki tamsayının oranı olarak kabul edilen sayılardır.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ rasyonel sayı}\} \qquad x \in \mathbb{Q} \quad x = \frac{m}{n}$ → tamsayı, $n \neq 0$

Reel (Gerçel) Sayılar $(\mathbb{R})$:

$x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$ //



İrrasyonel Sayılar Kümesi $(\mathbb{I})$: Rasyonel ve irrasyonel sayı ekseni üzerindeki bütün noktaların temsil ettikleri sayılara reel sayılar (gerçel sayılar) denir. Ve tüm bu sayıların kümesi reel sayılardır.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

Mutlak (=Salt) Değer :

Tanım : $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir. Ve,

$$|x| = \begin{cases} x , & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \text{ise}$$

ör// $x=3 \quad |x| = |3| = 3$

$x=-2 \quad |x| = |-2| = 2$

Fonksiyonlar :

Tanım : X ve Y ≠ ∅ olmak üzere, X in her elemanına karşılık, Y nin yalnız bir elemanı bulunuyorsa, bu şekildeki her f kuralına X'ten Y ye bir <u>fonksiyon</u> denir ve

X ve Y ≠ ∅ her $x \in X$ için bir tek $y \in Y$

her f kuralına, $X \xrightarrow{f} Y$ X : tanım kümesi

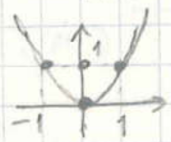
$f : X \longrightarrow Y$ Y : değer (görüntü) kümesi

Bir fonksiyonun grafiği, $x \longrightarrow f(x)$

G_f ile gösterilir. $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

Örneğin ; $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ $x=0 \Rightarrow y=0$
$x=1 \Rightarrow y=\mp 1$
$x=-1 \Rightarrow y=+1$

$x \longrightarrow f(x) = x^2 \qquad G_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$



$X \times Y$ $A \subset B \quad \forall a \in A \Rightarrow b \in B$

$a \in X \quad b \in Y \ (a,b) \qquad G_f \subset X \times Y$

Tanım : G, X ve Y kümeleri verilmiş olsun.

1- $G \subset X \times Y$ dir.

2- $\forall x \in X$'e karşılık ancak bir tek $y \in Y$ vardır.

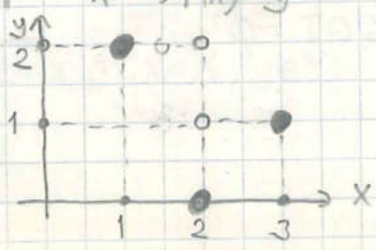
(x,y) dir. Veya her $x \in X$ için (x,y) olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

$f = (G, X, Y)$ üçlüsüne bir fonksiyon denir.

Örnek : $[1,3]$ kapalı aralığından $\mathbb{R}$ sayılara giden bir fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır. $X \xrightarrow{f} Y \qquad x \longrightarrow f(x) = y$

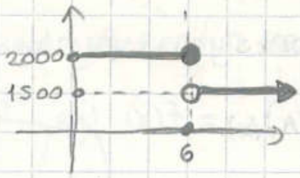
$$f(x) = \begin{cases} 2 , & 1 \le x < 2 \\ 0 , & x = 2 \\ 1 , & 2 < x < 3 \end{cases}$$

Y: $\mathbb{R}$, X: $[1,3] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$



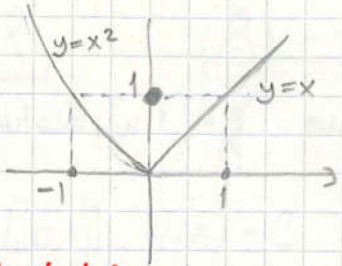
Örnek : 3 kişi çalışarak bir aileye 2000 lira gelir getiriyor. 6 ay sonra birisi ölüyor. Ailenin geliri 1500 liraya düşüyor. Fonksiyon grafiğini çiziniz.

$$f(x)=\begin{cases} 2000 \text{ lira} & 0\leq x\leq 6 \\ 1500 \text{ lira} & 6<x \end{cases}$$



Örnek :

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x & x>0 \end{cases}$$



Fonksiyonların Birleşimi :

$X,Y,Z\neq\emptyset$ olmak üzere $X\xrightarrow{f}Y$, $Y\xrightarrow{g}Z$ fonksiyonu için bir $X\xrightarrow{gof}Z$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyona g ile f fonksiyonlarının birleşimi denir.

$x\longrightarrow(gof)_{(x)}=g(f(x))$

$x\xrightarrow{g}y\xrightarrow{f}z$

$fog: X\longrightarrow Z$

$f: X\longrightarrow Y \quad g: Y\longrightarrow Z \quad h: Z\longrightarrow W$

$(hogof): X\longrightarrow W$

$(ho(gof)_{(x)})=h(gof)_{(x)}=h(g(f(x)))$

Genelleştirme : $X_1,X_2,\dots,X_n$ n tane küme olsun.

$f_1: X_1\longrightarrow X_2 \quad f_2: X_2\longrightarrow X_3 \quad f_{n-1}: f_{n-1}\longrightarrow f_n$

$(f_{n-1}\circ f_{n-2},\dots\circ f_n): X\longrightarrow X_n$

NOT : $X\xrightarrow{f}X\xrightarrow{f}X$ ise $f^2: X\longrightarrow X$

$f^2(x)=(fof)_{(x)}=f(f(x))$

Tanım : İzdüşüm fonksiyonu

$X\times Y\xrightarrow{\text{izdüşüm}}X \qquad iz\,d_1(x,y)=x \Rightarrow$ (x,y) ikilisini x'e götüre 1. izdüşüm fonksiyonu

$(x,y)\rightarrow x \qquad X\times Y\xrightarrow{\text{izd.}}Y \qquad (x,y)\longrightarrow iz\,d_2(x,y)=y$

$F(x,y)$ X'ten Y ye giden tüm fonksiyonların kümesi

NOT : $X,Y\neq\emptyset$ olmak üzere $f(x,y)$ ile X'ten Y'ye giden tüm fonksiyonların kümesini göstereceğ

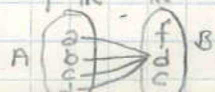
Fonksiyon Çeşitleri :

Birim Fonksiyon : $X\xrightarrow{I_X}X \quad X\longrightarrow I_X(x)=x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona denir.

Sabit Fonksiyon : $X\xrightarrow{f}Y$ ve X'in her elemanına karşı C gibi bir sabit sayıya gidiyorsa, f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

$X\xrightarrow{f}Y \quad x\longrightarrow f(x)=c\in Y$

$f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$



$x\rightarrow f(x)=c$

Bir Fonksiyonun Kısıtlanması :

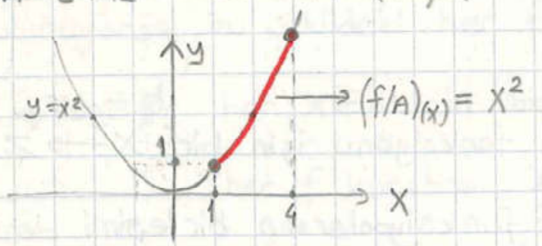
$f: X \longrightarrow Y \quad A \subset X$

$f/_A : A \rightarrow Y$ bir fonksiyon tanımlayalım.

$\forall x \in A$ için $(f/_A)(x) = f(x)$ ise $f/_A$ fonksiyonuna f'in A'ya kısıtlanışı ya da kısıtlanmış fonksiyon denir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longrightarrow f(x) = x^2$ olsun $A = [1,4]$ alalım. $A = [1,4] \subset \mathbb{R}$

$f/_A : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longrightarrow (f/_A)(x) = x^2$



Bir Fonksiyonun Genişletilmesi :

X, Y iki küme, $A \subset X$ olsun. Ve $A \xrightarrow{g} Y$ verilsin.

$X \xrightarrow{f} Y$ verse bu fonksiyonun A'ya kısıtlanması eşitse bu taktirde f fonksiyonuna g'nin genişletilmiş fonksiyonu denir.

NOT : Bir fonksiyonun genişletilmesi tek olmayabilir.

$f: X \rightarrow Y \quad f/_A : A \rightarrow Y \quad \forall x \in A$ için $(f/_A)(x) = f(x)$
$A \subset X$

Uyarı : $f: X \rightarrow Y \quad g: X \rightarrow Y \quad g \neq f \quad A \subset X$

$f/_A : A \rightarrow Y \quad g/_A : A \rightarrow Y \quad \forall x \in A$ için $(f/_A)(x) = (g/_A)(x)$ olur.

Çok Değişkenli Fonksiyonlar :

$X, Y, Z \neq \emptyset$ olmak üzere $X \times Y \rightarrow Z$ giden bir f fonksiyonu için

$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona 2 değişkenli fonksiyon denir.

$X \times Y \times W \xrightarrow{f} Z, \quad (x,y,w) \longrightarrow f(x,y,w) = z$

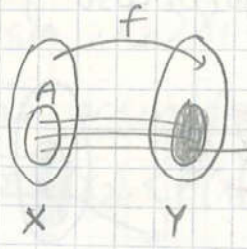
Genişletilmesi :

(Bir Alt Kümenin Görüntüsü :)

$X \xrightarrow{f} Y$, $A \subset X$ olsun,

A nın f altındaki görüntüsü, $f(A)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$



Örnek $f: R \longrightarrow R$

$f(x) = x^2 - 1 \quad A = [0,1] \quad f(A) = ?$

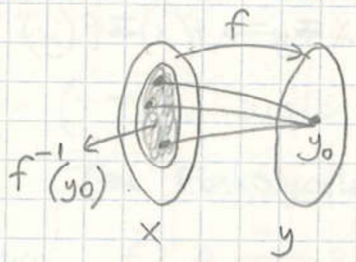
$f(A) = \{ f(x) \mid x \in [0,1] \} = [-1, 0]$

Ters Görüntü =

Tanım 1 : $X \xrightarrow{f} Y$, $y_0 \in Y$

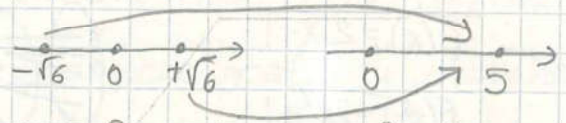
Bu y_0 elemanının f ye göre ters görüntüsü, $f^{-1}(y_0)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$f^{-1}(y_0) = \{ x \in X \mid f(x) = y_0 \}$$



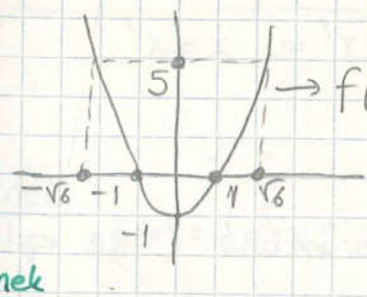
1. Örnek $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longrightarrow f(x) = y = x^2 - 1 \qquad y_0 = 5 \quad y_0 \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(5) = ?$

Görüntüsü 5 olan



$f^{-1}(5) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 5 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 5 \} = \{ -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \}$

$x^2 = 6 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6}$
$x_2 = -\sqrt{6}$



2. Örnek

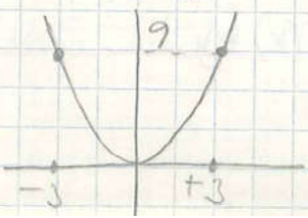
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = y = x^2$

$y_0 = 9 \Rightarrow f^{-1}(9)$

$f^{-1}(9) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 9 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9 \} = \{ -3, +3 \}$

$x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$
$x_2 = -3$



Genişletilmesi:

$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \xrightarrow{f} Z$

$(x_1, x_2 \dots x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots x_n) = z$

Açıklama (Uyarı): X ve $Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$U, W, V \neq \emptyset$ ve $X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W$ geçen bir fonksiyon nasıl tanımlanır?

$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W$ giden fonksiyon nasıl değer alır?

(Sıralı ikiliden, üçlüye giden fonksiyon nasıl tanımlanır?)

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (u, v, w)$

$U \times V \times W \xrightarrow{izd_1} U$

$(u, v, w) \longrightarrow izd_1(u, v, w) = u$

$U \times V \times W \xrightarrow{izd_2} V$

$(u, v, w) \longrightarrow izd_2(u, v, w) = v$

$U \times V \times W \xrightarrow{izd_3} W$

$(u, v, w) \longrightarrow izd_3(u, v, w) = w$

$z = (u, v, w)$

$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W \xrightarrow{izd_1} U$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (u, v, w) = u$

$f : X \longrightarrow Y$

$g : Y \longrightarrow Z$

$(g \circ f) : X \longrightarrow Z$

$f_1 = (izd_1 \circ f) : X \times Y \longrightarrow U$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = u$

$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W \xrightarrow{izd_2} V$

$f_2 = (izd_2 \circ f) = f_2(x, y) = v$

$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W \xrightarrow{izd_3} W$

$f_3 = (izd_3 \circ f) = f_3(x, y) = w$

$X \times Y \xrightarrow{f} U \times V \times W = (f_1, f_2, f_3)$

$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$

$f = (f_1, f_2, f_3)$ //

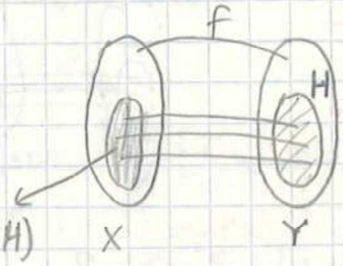
—— o ——

Bir Alt Kümenin Ters Görüntüsü

Tanım 2: $X \xrightarrow{f} Y$, $H \subset Y$ verilmiş olsun

H'nın f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(H)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f^{-1}(H) = \{x \in X \mid f(x) \in H\}$$



Örnek $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to f(x) = x - x^2 \quad H = [0, +\infty) \quad f^{-1}(H) = ?$

$$f^{-1}(H) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - x^2 \in [0, +\infty)\} =$$

$x - x^2 \geq 0$

$x(1-x) \geq 0$

$x \geq 0 \qquad 1 - x \geq 0$

$x = 0 \;\vee\; x = 1$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0 $+$	$+$	
$(1-x)$	$+$	$+$ 0	$-$	
	$-$	$+$	$-$	

$f^{-1}(H) = [0, 1]$ //

Birebir Fonksiyon

Tanım 1 $f: X \xrightarrow{f} Y$ verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Tanım 2 $\forall x, y \in X$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Örnek $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad \forall x, x \in \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = 2x + 1$

$x^2 \neq x$ olsun $\quad 2x = 2x^2$

$2x + 1 = 2x^2 + 1$

$f(x) \neq f(x^2)$

2.yol: $\forall x, x \in \mathbb{R}$ için

$f(x) = 2x + 1$

$f(x^2) = 2x^2 + 1$

$f(x) = f(x') \Rightarrow 2x + 1 = 2x' + 1 \Rightarrow$

$2x = 2x' \Rightarrow x = x'$

Örten Fonksiyon

$f: X \to Y$

Tanım 1 $f(X) = Y$ Eğer tanım kümesinin f altındaki görüntüsü Y'ye eşitse buna örten fonksiyon denir.

Tanım 2 $\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$

Eşitleyen Fonksiyon:

Birebir ve örten fonksiyona eşitleyen fonksiyon denir.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

1. Tanım $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ ise

$A \subset \mathbb{R}$ bu fonksiyona artan fonksiyon denir.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ ise bu fonksiyona azalan fonksiyon denir.

2. Tanım $\forall x_2'', x_1' \in A$ için

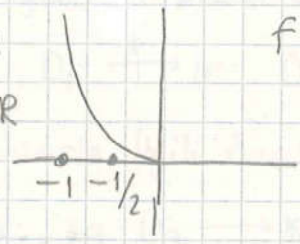
$$\frac{f(x_2'') - f(x_1')}{x_2'' - x_1'} > 0$$

Bu fonksiyona o aralıkta artan, aksi halde bu fonksiyona azalan fonksiyon denir.

Örnek $-1 < -1/2$

$A = [-\infty, 0] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$x \to f(x) = x^2$



$f(-1) > f(-1/2)$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(-1/2) = (-1/2)^2 = 1/4 \quad x_2 > x_1$

$(-\infty, 0]$ azalan $[0, \infty)$ artan

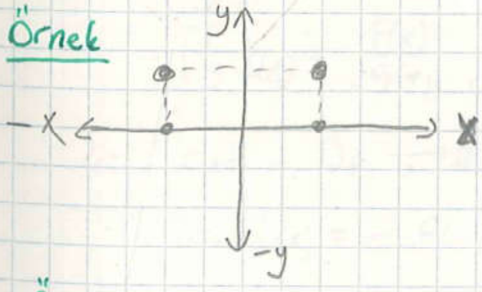
Tek Fonksiyonlar, Çift Fonksiyonlar

Tanım $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ $A \in \mathbb{R}$ eğer

$\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

Bu fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

Örnek



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longrightarrow f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Örnek

$f(x) = \cos x$

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ çift fonksiyondur.

Tanım $\forall x \in A$ için $f(x) = -f(-x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Örnek $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = 2x$

$-f(-x) = -(-2x) = 2x = f(x)$

$f(x) = \sin x$

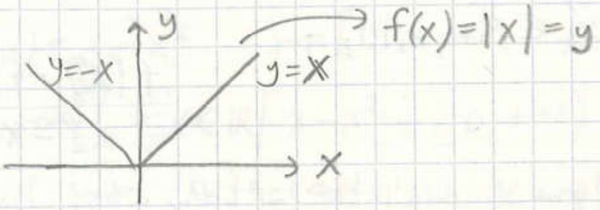
$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$

$-f(-x) = -(-\sin x) = \sin x = f(x)$

Tek bir fonksiyonun grafiği başlangıç noktasına göre simetriktir.

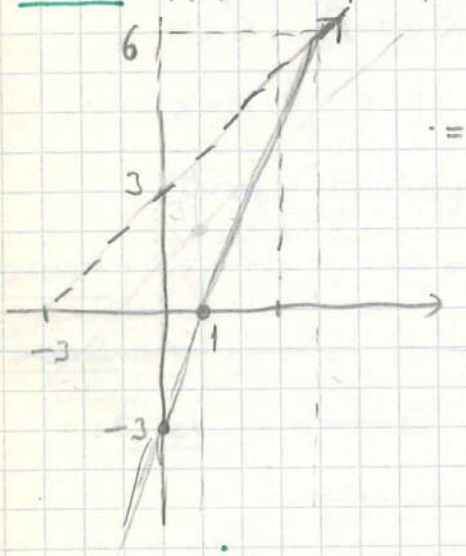
Mutlak Değer Fonksiyonu

Örnek $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



Örnek $f(x) = 2x - |x-3| = \begin{cases} 2x - x + 3 & x-3 \geqslant 0 \quad x \geqslant 3 \\ 2x + x - 3 & x-3 < 0 \quad x \leqslant 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} x+3 \;, & x \geqslant 3 \\ 3x-3 \;, & x < 3 \end{cases}$



$f(x) = x+3 = y$

$x=0, \; y=3 \quad (0,3)$

$y=0, \; x=-3 \quad (-3,0)$

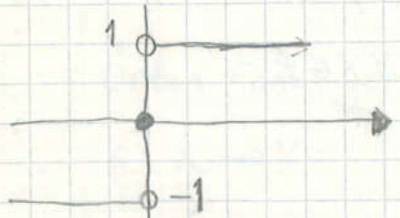
$f(x) = 3x-3 \quad f(3) = 6$

$x=0 \quad y=-3 \quad (0,-3)$

$y=0 \quad x=1 \quad (0,1)$

İşaret Fonksiyonu

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 \;, & x > 0 \\ 0 \;, & x = 0 \\ -1 \;, & x < 0 \end{cases}$ Bu fonksiyona işaret fonksiyonu denir. Ve Sgn ile gösterilir. $\mathrm{Sgn}(x) = f(x)$



Tamdeğer Fonksiyonu

$[\![x]\!]$ $n \leqslant x$ koşulunu sağlayan en büyük n tamsayısıdır.

Örnek $-2 \leqslant x < -1 \quad [\![x]\!] = -2$

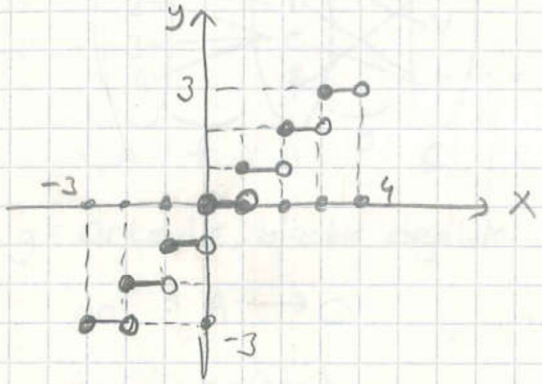
$[\![1{,}75]\!] = 1 \quad [\![0{,}5]\!] = 0 \quad [\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$

$f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonuna tamdeğer fonksiyonu denir.

$k \leqslant x \leqslant k+1$ ise $f(x) = k$ dır. $k \in \mathbb{R}$

Örnek

$3 \leqslant x < 4$	$[\![x]\!] = 3$	$0 \leqslant x \leqslant 1$	$[\![x]\!] = 0$
$2 \leqslant x < 3$	$[\![x]\!] = 2$	$-1 \leqslant x \leqslant 0$	$[\![x]\!] = -1$
$1 \leqslant x < 2$	$[\![x]\!] = 1$	$-2 \leqslant x < -1$	$[\![x]\!] = -2$
		$-3 \leqslant x \leqslant -2$	$[\![x]\!] = -3$



D_f = (f fonksiyonunun tanım kümesidir)

$f: X \rightarrow Y \quad D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad D_f \subseteq \mathbb{R}$

Fonksiyonlarla İlgili Özellikler :

$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$; $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

1- $f \mp g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$

2- $f.g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f.g)(x) = f(x).g(x)$

3- $\left(\frac{f}{g}\right) : D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

4- $c.f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$(c.f)(x) = c.f(x)$

Uygulama :

Problem 1 : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = 1/x$ ise

$5f$, $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarını bulunuz ?

Çözüm// $D_g = \{x \mid g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

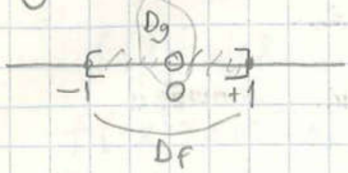
$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$-x^2+1$	$-$	$+$		$-$

$D_f = [-1, 1]$

$D_f = [-1, 1]$

- $f+g$: $\quad D_f \cap D_g = [-1,+1] - \{0\} = [-1,0) \cup (0,+1]$



$f+g : [-1,0) \cup (0,+1]$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= \sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{x}$

- $f-g : [-1,0) \cup (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{1}{x}$

- $f.g : [-1,0) \cup (0,1] \to \mathbb{R}$

$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

- $\dfrac{f}{g} : [-1,0) \cup (0,1] \to \mathbb{R}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{x}} = x.\sqrt{1-x^2}$

- $5f : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(5f)(x) = 5.f(x) = 5.\sqrt{1-x^2}$

Problem 2: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 2 \;, \quad x \Rightarrow g(x) = x^3$

$(gof) = ? \quad (fog) = ?$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2-2) = (x^2-2)^3$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3)^2 - 2 = x^6 - 2$

$(fog) \neq (gof)$

Soru // $f : D_f \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$g : D_g \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^3 \quad (gof) = ? \quad (fog) = ?$

$$\begin{tikzcd} {[-1,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(gof)"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

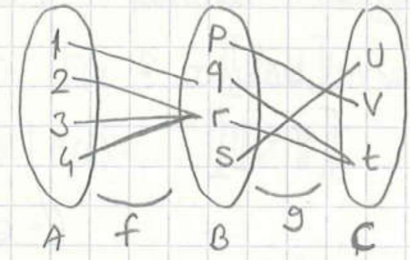
$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) = (\sqrt{1-x^2})^3 \quad (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{1-x^6}$

Problem 3 : $A=\{1,2,3,4\}$ $\quad f:A\to B$ ve $g:B\to C$ fonksiyonları

$B=\{p,q,r,s\}$ $\quad f=\{(1,q),(2,r),(3,r),(4,r)\}$

$C=\{u,v,t\}$ $\quad g=\{(p,v),(q,t),(r,t),(s,u)\}$ biçiminde ise

(gof) fonksiyonunu ve bu fonksiyonun tanım kümesini bulunuz?



(Eğer A'dan bir eleman 2 kere diğer elemanlara gitseydi fonksiyon değil, bağıntı olurdu)

g: Örtendir, birebir değildir.

$gof: A\to C$

$(gof)(x)=g(f(x))$

$(gof)(1)=g(f(1))=g(q)=t$

$(gof)(2)=g(f(2))=g(r)=t$

$(gof)(3)=g(f(3))=g(r)=t$

$(gof)(4)=g(f(4))=g(r)=t$

Sabit fonksiyondur.

(Tanım kümesindeki tüm değerler değer kümesindeki bir değere gidiyor.)

Problem 4: $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ olduğuna göre,

$g(a+b)$ ve $g(a)+g(b)=?$

- $g(a)=a^2+\frac{1}{a^2}$

$g(b)=b^2+\frac{1}{b^2}$

$g(a+b)=(a+b)^2+\frac{1}{(a+b)^2}$

$g(a)+g(b)=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)$ $\quad g(a+b)=\frac{(a+b)^4+1}{(a+b)^2}$

$=\frac{a^4+1}{a^2}+\frac{b^4+1}{b^2}$

Problem 5 : $\varphi(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ise $\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a).\varphi(b)}=\frac{ab-1}{a+b}$

$\varphi(a)=\frac{a-1}{a+1}$

$\varphi(b)=\frac{b-1}{b+1}$

$\varphi(a)+\varphi(b)=\frac{a-1}{a+1}+\frac{b-1}{b+1}=\frac{(a-1)(b+1)+(b-1)(a+1)}{(a+b)(b+1)}=\frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)}$

$\varphi(a).\varphi(b)=\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{b-1}{b+1}=\frac{ab-a-b+1}{(a+1)(b+1)}$

$$1-\frac{ab-a-b+1}{(a+1)(b+1)} = \frac{ab+a+b+1-ab+a+b-1}{(a+1)(b+1)} = 1-\varphi(a)\cdot\varphi(b) = \frac{2a+2b}{(a+1)(b+1)}$$

$$\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)} = \frac{\frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)}}{\frac{2a+2b}{(a+1)(b+1)}} = \frac{2ab-2}{2a+2b} = \frac{2(ab-1)}{2(a+b)} = \frac{ab-1}{a+b} \quad //$$

Problem 6: Aşağıdaki fonksiyonların tanım aralıklarını bulunuz?

(a) $f(x)=\sqrt{1-2x-3x^2}$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

(c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$

(d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}$

(a) $f(x)=\sqrt{1-2x-3x^2}$

$1-2x-3x^2=0$

$3x^2+2x-1=0$

$x_1=-1 \quad x_2=\frac{1}{3}$

x		-1		$1/3$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

$16-x^2 \geq 0$ olmalı

$x_1=4 \quad x_2=-4$

x		-4		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$(-4,4)$

(c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}=f(x)$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$

x		1		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
	$-$		$+$		$-$

$[1,3)$

(d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}$

$4-x^2 \geq 0 \qquad 1-x \geq 0$

$x_1=2 \quad x_2=-2 \qquad x=1$

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
	$+$		$+$		$-$		$+$

$[-2,2]-\{1\}=[-2,1)\cup(1,2]$

Problem 7: $f(x)=\dfrac{x}{|x|-x}$

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$f(x),\ x\geq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x-x}=\dfrac{x}{0}=$ Tanımsız

$f(x),\ x<0 \Rightarrow \dfrac{x}{-x-x}=\dfrac{x}{-2x}=-\dfrac{1}{2} \quad (-\infty,0)$

Problem 8: $f(x)=\dfrac{1}{[\![2x]\!]}$

$0<x\leq 1 \quad [\![x]\!]=0$ //

$1<x\leq 2 \quad [\![x]\!]=1$

Problem 9: Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz?

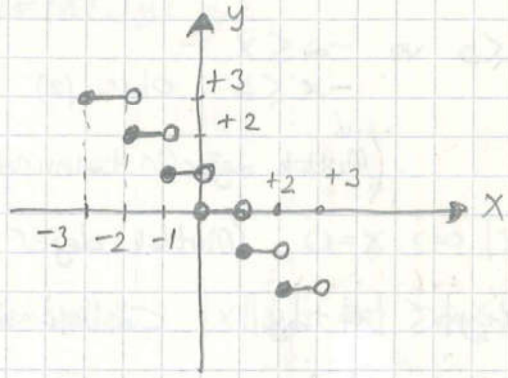
a- $f(x)=-[\![\,[\![x]\!]\,]\!]$

b- $f(x)=[\![\,[\![|x|]\!]\,]\!]$

$[\![x]\!]=k \Rightarrow k\leq x<k+1$

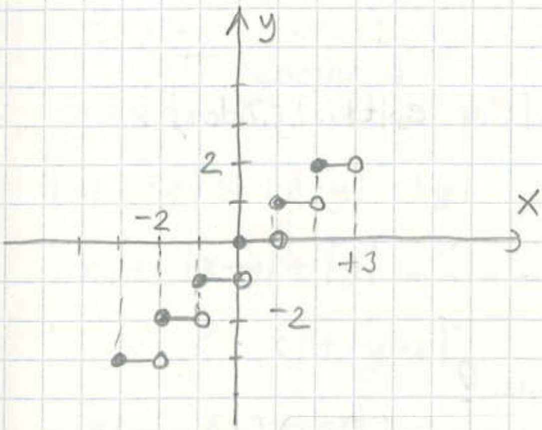
a-)

$$-[\![\,[\![x]\!]\,]\!]=\begin{cases}+3, & -3\leq x<-2\\ +2, & -2\leq x<-1\\ +1, & -1\leq x<0\\ 0, & 0\leq x<1\\ -1, & 1\leq x<2\\ -2, & 2\leq x<3\end{cases}$$



b-)

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0, \ [\![\,[\![x]\!]\,]\!]\\ -x, & x<0, \ [\![\,[\![-x]\!]\,]\!]\end{cases}$$



− işareti varsa eşitlik yön değiştirir.

$-3<x\leq -2 \Rightarrow 3>-x\geq +2$

$\Rightarrow 2\leq -x<3 \Rightarrow f(x)=2$

$-2<x\leq -1 \Rightarrow 1\leq -x<2 \quad f(x)=1$

$0\leq -x<1 \quad f(x)=0$

$-1\leq -x<0 \quad f(x)=-1$

$-2\leq -x<-1 \quad f(x)=-2$

$-3\leq -x<-2 \quad f(x)=-3$

Problem 10: $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$ ise

Aşağıdaki özellikleri ispatlayınız?

1- $|-x|=|x|$ 2- $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$

3- $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$ 4- $-|x|\leq x\leq |x|$

5- $|x+y|\leq |x|+|y|$ Üçgen eşitsizliği

6- $|x.y|=|x|.|y|$ 7- $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ 8- $|x|^2=x^2$

(1)

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$-x=y$,

$$|-x|=|y|=\begin{cases}y & y>0\\ 0 & y=0\\ -y & y<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x & -x>0\Rightarrow x<0\\ 0 & -x=0\Rightarrow x=0\\ -(-x)=x & -x<0\Rightarrow x>0\end{cases}$$

$|-x|=|x|$ //

$x>0 \quad x=x$

$x=0 \quad 0=0$

$x<0 \quad -x=-x$ //

$$=\begin{cases}-x & x<0\\ 0 & x=0\\ x & x>0\end{cases}$$

② $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

Kabul edelim ki $|x| \leq a$ olsun.

$x \geq 0$ ise $x \leq a$ olur. ①

$x < 0$ ise $-x \leq a$ ve $x \geq -a$ ise $-a \leq x$ tir ②

1 ve 2 den $-a \leq x \leq a$ olur.

Tersine $-a \leq x \leq a$ olsun. Acaba $|x| \leq a$ mıdır?

(1) $x \leq a$ ve $-a \leq x$
$-x \leq a$ olur. (2) buradan $|x| \leq a$ olur.
(Mutlak değer'in tanımından dolayı)

③ $|x| \iff x = 0$ (Mutlak değer tanımı gereğince açıktır)

⑤ $|x+y| \leq |x| + |y|$ Çözümü için 4. soru kullanılacak.

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$+ \quad -|y| \leq y \leq |y|$$
$$-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$$
$$-\underbrace{(|x| + |y|)}_{-a} \leq x+y \leq \underbrace{|x| + |y|}_{a}$$ olur $|x| \leq a$ eşitsizliğinden,

$$-a \leq x+y \leq a$$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ olur.

Ödev // $|x-y| \leq |x| + |y|$ olduğunu gösteriniz?

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$+ \quad -|y| \leq y \leq |y|$$
$$-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$$

$-\underbrace{(|x| + |y|)}_{-a} \leq x+y \leq \underbrace{|x| + |y|}_{a}$ $|x| \leq a$ dan,

$|x-y| \leq |x| + |y|$ olur.

⑥ $|xy| = |x| . |y|$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad |y| = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ -y & y < 0 \end{cases}$$

- $x \geq 0$, $y \geq 0$ olsun.

$|x| = x$ $|y| = y$ $xy \geq 0$ olur. $|xy| \geq 0$ $|xy| = xy$ $|x| . |y| = xy$

$|x . y| = |x| . |y|$ //

- $x \geq 0$ ve $y < 0$ olsun.

$|x| = x \quad |y| = -y \quad xy < 0 \quad |xy| = -(xy) \quad |x|.|y| = x.(-y) = -(xy)$

$$|xy| = |x|.|y| \quad //$$

$x < 0$ ve $y \geq 0$ için de aynıdır.

- $x < 0$ ve $y < 0$ olsun.

$|x| = -x \quad |y| = -y \quad xy > 0 \quad |xy| = xy \quad |x|.|y| = (-x).(-y) = xy$

$$|xy| = |x|.|y| \quad //$$

Problem 11 : $x, y \in \mathbb{R} \quad a > 0$

1- $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

2- $|x| < a \iff -a < x < a$

Çözüm (1) $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$ demektir. $|x| \leq a \iff -a \leq x < a$ olduğu için.

$|x+y| \leq |x| + |y|$

Üçgen eşitsizliğinde x yerine $x-y$, daha sonra y yerine $y-x$ yazalım.

$x = x-y$
$y = y-x$ yazılırsa

$|x-y+y| \leq |x-y| + |y|$ $\qquad$ $\boxed{|y-x| = |x-y|}$

$|x| \leq |x-y| + |y|$ - - - - - (1)

$|x+y-x| \leq |x| + |y-x|$

$|y| \leq |x| + |y-x|$ - - - - - (2)

(1) de y'yi eşitsizliğin soluna alırsak,

$|x| - |y| \leq |x-y|$ - - - - - (3)

(2) de x'i eşitsizliğin soluna alırsak,

$|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$ eşitsizliğini (-1) ile çarparsak

$|x| - |y| \geq -|x-y|$ veya

$-|x-y| \leq |x| - |y|$ - - - - - (4)

(3) ve (4) eşitsizlikleri birleştirilirse,

$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$ buradan

$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ olur.