DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

KAYNAKLAR :

1°) Elemantary Differential Geometry (Barret O'Neill)

2°) Diferansiyel Geometri (H. Hilmi Hacısalihoğlu - Ank. Ünv.)

3°) Diferansiyel Geometri (H. Hilmi Hacısalihoğlu - Arif Sabuncuoğlu - M.E.B)

4°) Elements of Differential Geometry (R.S. Millman - G.D. Parker)

5°) Differential Geometry of Curves and Surfaces
(Eğri ve Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi) Manfedo P. do Carmo

KONULAR (İçerik) :

I - Temel Kavramlar :
Afin Uzay, Euclid Uzayı, Metrik Uzay, Topolojik Uzay

II - Tanjant Vektörler, Tanjant Uzaylar, Yöne Göre Türevler,
Vektör Alanları, Kovaryant Türevler, Dönüşümler (Euclid Uzaylarındaki Dönüşümler), Özellikler.

III - Eğriler Teorisi, (Euclid Uzayındaki), Özel Eğriler : Eğilim Çizgileri,
Bertand Eğrileri, İnvolüt Eğrileri, Evolüt Eğrileri, ...

5.10.1995
Perşembe

Geometri : Dönüşümler altındaki değişmezlerin (invaryantların) teorisidir.

Dönüşüm + Değişmezler = Geometri

Diferansiyel Geometri : Diferansiyel (türev) dönüşümü altındaki değişmezlerin teorisidir.

Temel Kavramlar :

Tanım : (Afin Uzay) : Boş olmayan bir A kümesi (uzayı), n-boyutlu bir reel vektör uzayı V verilsin.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisimdir. Buna reel sayılar cismi denir.

$(V, \oplus)$ = bir abel grubudur.

$[V, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot]$ $\quad \odot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$\quad (a, \alpha) \longrightarrow a \odot \alpha$

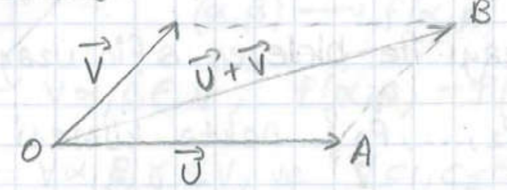
Bir f fonksiyonu, $f : A \times A \longrightarrow V$, $\forall P, Q \in A$ için
$(P, Q) \longrightarrow f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$

tanımlansın. Eğer ;

1°) $\forall P, Q, R \in A$ için, $f(P,R) = f(P,Q) + f(Q,R)$

2°) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için, $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. (afin uzayın aksiyomları)

özellikleri sağlanıyorsa A kümesine V ile birleşmiş bir afin uzay denir.

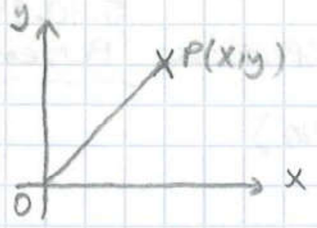


$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$: P başlangıç, Q uç noktasıdır.

Örnek // $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. (Vektörlerin toplamı ve çarpımı işlemine göre bir vektör uzayıdır.)

A kümesi düzlemdeki noktaların kümesi olsun.



$\overrightarrow{OP} = (x,y)$

$f: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(P,Q) \longrightarrow f(P,Q) = (a,b)$ afin uzaydır.

rnek// $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ vektörler kümesi

$A = \{P : P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \land P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{R}\}$ noktaların bileşenleri

A kümesi noktayı başlangıca birleştiren vektörlerin kümesidir.

$f: A \times A \longrightarrow V = \mathbb{R}^n$

$(P,Q) \longrightarrow f(P,Q) = Q - P = (q_1, q_2, \dots, q_n) - (P_1, P_2, \dots, P_n)$

$= (q_1 - P_1, q_2 - P_2, \dots, q_n - P_n)$

1°) $\forall P, Q, R \in A$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$

$f(P,Q) = Q - P = (q_1 - P_1, q_2 - P_2, \dots, q_n - P_n)$

$f(Q,R) = R - Q = (r_1 - q_1, r_2 - q_2, \dots, r_n - q_n)$

$+$

$f(P,Q) + f(Q,R) = R - P = (r_1 - P_1, r_2 - P_2, \dots, r_n - P_n) = f(P,R)$ (*)

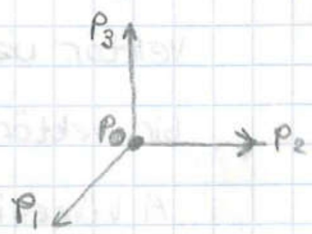
2°) $\forall P \in A \Rightarrow P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \land \forall \alpha \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$f(P,Q) = \alpha \Rightarrow Q - P = \alpha \Rightarrow Q = P + \alpha$

$\Rightarrow Q = (P_1 + x_1, P_2 + x_2, \dots, P_n + x_n) \in A$ tektir.

O halde A kümesi bir afin uzaydır.

anım : (afin çatı): Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. A afin uzayında $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta kümesi verilsin. $\alpha_i = f(P_0, P_i) = \overrightarrow{P_0 P_i}$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, eğer ; $\{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$ kümesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta kümesine A'da bir afin çatı denir.



P_0 : Çatının başlangıç noktasıdır.

P_i : " i-inci birim noktasıdır. $(i = 1, 2, \dots, n)$

Örnek// $f: A\times A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall P\in A$, $P=(P_1,P_2)$
$(P,Q) \longrightarrow f(P,Q) = Q-P$

$P_0=(1,1)$, $P_1=(0,-1)$, $P_2=(-1,2)$ olmak üzere ;

$\{P_0,P_1,P_2\}$ nokta kümesinin A nın bir afin çatısı olduğunu gösterelim. $A=\mathbb{R}^2$

$f(P_0,P_1)=\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{\alpha}_1$, $f(P_0,P_2)=\vec{\alpha}_2$

$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ nin $\mathbb{R}^2$ de bir baz olduğunu göstermeliyiz.

$\vec{\alpha}_1=f(P_0,P_1)=P_1-P_0=(0,-1)-(1,1)=(-1,-2)$

$\alpha_2=f(P_0,P_2)=P_2-P_0=(-1,2)-(1,1)=(-2,1)$

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ alalım.

$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\lambda_2\vec{\alpha}_2=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1(-1,-2)+\lambda_2(-2,1)=(0,0)$

$\Rightarrow (-\lambda_1-2\lambda_2, -2\lambda_1+\lambda_2)=(0,0)$

$-\lambda_1-2\lambda_2=0$
$-2\lambda_1+\lambda_2=0$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ tek çözüm vardır. O da sıfır çözüm olur.

$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$ lineer bağımsızdır. Bazdır. (tabandır.)

$\{P_0,P_1,P_2\}$, $\mathbb{R}^2=A$ nın bir bazıdır.

Tanım: (Öklid Uzayı): Bir reel afin uzayı ile birleşen n boyutlu vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım $\langle , \rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

İç çarpım: $f: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\alpha,\beta) \longrightarrow f(\alpha,\beta)$

i- $\forall\alpha,\beta\in V$, $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$ (simetri özelliği)

ii- $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$, ve $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$,

$f(c_1\alpha+c_2\beta,\gamma)=c_1f(\alpha,\gamma)+c_2f(\beta,\gamma)$

ve $f(\alpha,c_1\beta+c_2\gamma)=c_1f(\alpha,\beta)+c_2f(\alpha,\gamma)$

$\Rightarrow$ f bilineer. (2-lineerdir.) olur.

$\left\{ \begin{array}{l} f: V \longrightarrow W \\ \alpha \longrightarrow f(\alpha) \\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \quad \alpha,\beta\in V, \\ f(c_1\alpha+c_2\beta)=c_1f(\alpha)+c_2f(\beta) \\ \Rightarrow f \text{ lineerdir.} \end{array}\right.$

iii- Pozitif tanımlılık özelliği ; $\forall\alpha\in V$, $f(\alpha,\alpha)\geq 0$ ve

$f(\alpha,\alpha)=0 \iff \alpha=0$

özellikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonuna V vektör uzayında bir iç çarpım denir. V vektör uzayına da iç çarpım uzayı denir.

Bir vektör uzayında vektör uzayı tanımlanırsa, bu uzaya iç çarpım uzayı denir.

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \longrightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

(Ödev: $\langle , \rangle$ iç çarpımdır?)

i - $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle Y, X \rangle$ (simetri özelliği)

Bu iç çarpıma öklid iç çarpımı denir.

Afin uzaya da öklid uzayı denir.

$\{ \langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \Rightarrow$ öklid iç çarpımı $\}$

$A = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n$ alırız. $A = E^n$: n-boyutlu reel öklid uzayı.

Afin uzayın boyutu: $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{noktalar kümesi}}}{\text{Boy}A} = \text{Boy}V \rightarrow$ vektörler kümesi

$\Downarrow$

birleştiği vektör uzayının boyutuna denir.

Tanım: (Uzaklık): $d : E^n \times E^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan $d(x,y)$ reel sayısına $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

$x = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_i) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Teorem: E^n deki uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \geq 0$ dır. //

2- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (y_i - x_i) = 0$$
$$\Leftrightarrow y_i = x_i \quad \forall i \text{ için},$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = y \Leftrightarrow x = y$ dır. //

$d(x,y)=0 \iff x=y$ //

3- $d(x,y) \stackrel{?}{=} d(y,x)$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[-(x_i-y_i)]^2}$

Simetri özelliği. $=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = d(y,x)$

4- $\forall x,y,z \in E^n$, $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

$d(x,z) = \|\overrightarrow{xz}\| = \|\overrightarrow{xy}+\overrightarrow{yz}\|$ (1. afin aksiyomundan)

$\leq \|\overrightarrow{xy}\| + \|\overrightarrow{yz}\|$ (Schwartz eşitsizliği)

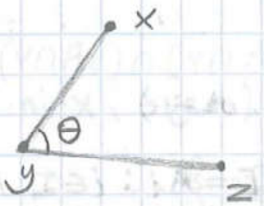
$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

E^n de tanımlanan d uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Bu metriğe öklid metriği denir.

Tanım: (açı) : α,β vektörler ise $\langle\alpha,\beta\rangle = \|\alpha\|.\|\beta\|.\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|.\|\beta\|}$$



$x,y,z \in E^n$ olsun.

$\widehat{xyz}$ ölçüsü ;

$$\cos\theta = \frac{\langle\overrightarrow{xy},\overrightarrow{yz}\rangle}{\|\overrightarrow{xy}\|.\|\overrightarrow{yz}\|}$$ bağıntısıyla tanımlanan θ sayısıdır.

Tanım: (öklid çatısı) : E^n deki $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ $n+1$ -lisine karşılık gelen $\mathbb{R}^n$ (vektör uzayındaki) deki $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\dots,\overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir ortonormal bazı ise bu $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ kümesine dik çatı veya öklid çatısı denir.

P_0: başlangıç noktası P_i : i.-inci birim nokta.

Örnek // E^n de, $E_0=(0,0,\dots,0)$, $E_1=(1,0,0,\dots,0)$, $E_2=(0,1,0,\dots,0)$ ... $E_n=(0,0,\dots,1)$ noktaları veriliyor. Buna göre

$\overrightarrow{E_0E_1}=(1,0,\dots,0)$, $\overrightarrow{E_0E_2}=(0,1,0,\dots,0)$, ..., $\overrightarrow{E_0E_n}=(0,0,\dots,1)$

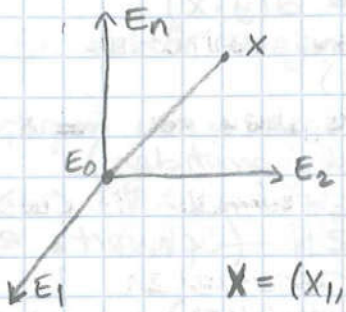
$\{\overrightarrow{E_0E_1},\overrightarrow{E_0E_2},\dots,\overrightarrow{E_0E_n}\}$ $\mathbb{R}^n$ in bir ortonormal bazıdır.

$\langle\overrightarrow{E_0E_i},\overrightarrow{E_0E_j}\rangle = \delta_{ij}$ ortonormaldir.

$\Rightarrow \{E_0,E_1,\dots,E_n\}$ bir öklid çatısıdır.

Tanım: Bu çatıya standart öklid çatısı denir.

Tanım : (Öklid koordinat sistemi): E^n de $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_n\}$ çatısı ve bir X noktası verilsin. $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \dots, \overrightarrow{E_0E_n}\}$ V.U 'nın bazıdır.



$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılır.

V.U nın gereken vektör sayısıdır.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \overrightarrow{E_0E_1} + x_2 \overrightarrow{E_0E_2} + \dots + x_n \overrightarrow{E_0E_n}$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longrightarrow x_i(X) = x_i$$
$$P \longrightarrow x_i(P) = p_i$$

fonksiyonuna i-inci öklid koordinat fonksiyonu denir.

$$x_1 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$Q \longrightarrow x_1(Q) = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_1$$ öklid koordinat fonksiyonu denir.

Topoloji : $X \neq \phi$ bir küme (uzay), X in alt kümelerinin bir ailesi (koleksiyonu) τ olsun. $\tau = \{A_i : i \in I \wedge A_i \subseteq X\}$

1- $\phi, X \in \tau$

2- $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

3- $A_i \in \tau$, $i \in I$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

önermeleri doğru ise τ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir.

Örnek // $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$

afin uzayında $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ metriği yardımıyla

$\{y : y \in E^n \wedge d(x,y) < \varepsilon_i \wedge \varepsilon_i \in \mathbb{R}\} = B(x, \varepsilon_i)$ tanımlanıyor.

$\tau = \{B(x, \varepsilon_i) : x \in \mathbb{R}^n\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de bir topolojidir.

1°) $\phi, \mathbb{R}^n \in \tau$?

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_i = 0 \Rightarrow d(x,y) < 0 \Rightarrow \phi \in \tau \\ \varepsilon_i \to \infty \Rightarrow \mathbb{R}^n \in \tau \end{array}\right\} \phi, \mathbb{R}^n \in \tau \; //$$

2°) ve 3°) de sağlanır.

Sonuç olarak; τ, $\mathbb{R}^n$ de bir topolojidir. ($\mathbb{R}^n$ deki metrik topolojidir.)

Topolojik uzay : X bir küme, τ da X üzerinde bir topoloji olsun. $(X \neq \phi)$

(X,τ) ikilisine bir topolojik uzay denir.

(X,τ) topolojik uzayı yerine; X topolojik uzayı denilebilir.

Relatif (bünyesel) topoloji : (X,τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\forall A_i \in \tau$ için, $A_i \cap Y$ kümeleri de açık kümelerdir. (kabul)

$\tau_1 = \{Y_i : Y_i = Y \cap A_i \wedge A_i \in \tau\}$ olarak tanımlanan τ_1 ailesi Y'de bir topoloji tanımlar. (Y,τ_1) de bir topolojik uzaydır. τ_1'e X'den indirgenmiş relatif topoloji denir.

$\tau_1 = \{Y_i : Y_i = Y \cap A_i \wedge A_i \in \tau\}$

1°) $A_i = \phi \in \tau_1 \Rightarrow Y \cap \phi = \phi = Y_i \in \tau_1$

$Y \in \tau \Rightarrow Y \cap Y = Y \in \tau_1$

2°) $\forall Y_1, Y_2 \in \tau_1, \quad Y_1 \cap Y_2 = (Y \cap A_1) \cap (Y \cap A_2) = Y \cap \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in \tau_1} \in \tau_1$

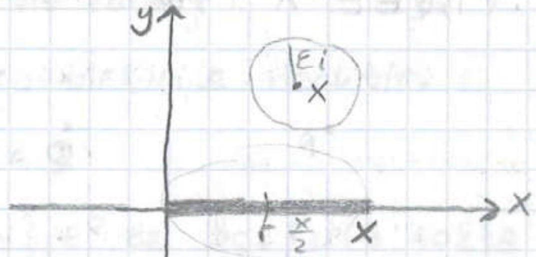
3°) $\bigcup_{i \in I} (Y \cap A_i) \in \tau_1$

τ_1'e, Y de indirgenmiş bünyesel topoloji denir.

Örnek // E^2 de (2-boyutlu öklid uzayı) d metriği ile verilen metrik topolojiyi düşünelim.

$\tau = \{B(x,\varepsilon_i) : x \in E^2 \wedge \varepsilon_i \in \mathbb{R}\}$

$L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset E^2$



$\tau_1 = \{Y_i : B(x,\varepsilon_i) \cap L = Y_i\}$

1°) $\phi \in \tau_1$, $Y \in \tau_1$

2°) $Y_1 = L \cap B(x,r_1) \quad Y_2 = L \cap B(x,r_2)$

$Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow$ açıktır.

3°) birleşimleri de açıktır.

O halde τ, E^2 den indirgenmiş bünyesel topolojidir.

Tanım : Homeomorfizm (Topolojik dönüşüm) :

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzay olsun.

Bir $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu:

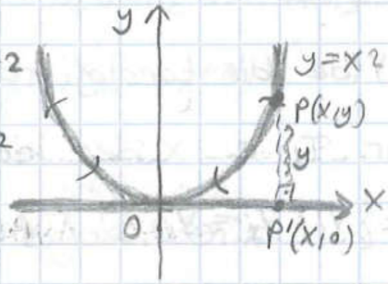
1°) f, 1:1 2°) f, örten 3°) f, sürekli 4°) f^{-1}, sürekli

ise f'ye X den Y'ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) veya eşyapı dönüşümü denir.

X ve Y uzaylarına homeomorfiktirler (topolojik olarak denktirler) denir.

Örnek// $X=\{(x,y):(x,y)\in E^2 \wedge y=x^2\}\subset E^2$

$Y=\{(x,0):(x,0)\in E^2 \wedge x\in \mathbb{R}\}\subset E^2$



$f: X \longrightarrow Y$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y)=(x,0)$

Tanım: (Hausdorff Uzayı):

X bir topolojik uzay olsun. $\forall P,Q\in X$ ve $P\neq Q$ olmak üzere $A_P\cap A_Q=\emptyset$ olacak şekilde P'nin bir A_P, ve Q nun bir A_Q civarı (komşuluğu) varsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir.

Örnek// E^n bir Hausdorff uzayıdır. (E^n,d) bir topolojik uzaydır.

$\forall P,Q\in E^n \wedge P\neq Q$

$A_P=\{y: d(P,y)<d(P,Q)\}$

$\cdot P$ $\quad\cdot Q$

$A_Q=\{z: d(Q,z)<d(P,Q)\}$

$A_P\cap A_Q=\emptyset$ //

Tanım: (Topolojik Manifold):

M bir topolojik uzay olsun.

M_1) M bir Hausdorff uzayıdır.

M_2) M nin sayılabilir çoklukta açık kümelerden oluşan bir açık örtüsü vardır. (A küme, $\mathcal{A}$ kümeler ailesi ve $A\subseteq \cup\mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ ailesi A nın bir örtüsüdür.) ($\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$)

M_3) M'nin herbir açık alt kümesi E^n'e veya E^n in bir açık alt kümesine homeomorftur, $\left(\Psi: U_i\in M \xrightarrow[\text{homeomorfizm}]{} V_i\in E^n\right)$

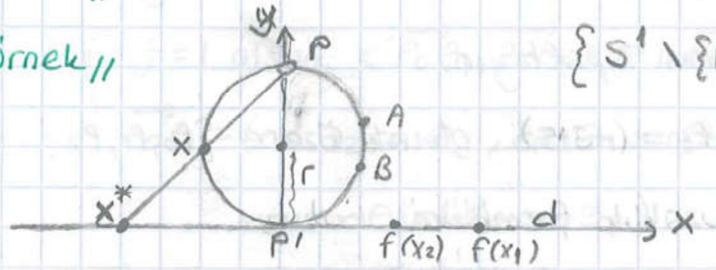
önermeleri doğru ise, M ye n-boyutlu topolojik manifold denir.

1-Örnek // E^n in kendisi bir topolojik manifolddur.

E^n, tanımdan topolojidir, Hausdorff uzayıdır ve örtüsü açık kümelerden oluşur, ve homemorftur.

2.örnek // E^n in herbir açık alt kümesi bir topolojik manifolddur.

3.Örnek // $\{S^1 \setminus \{P\}, \tau\}$ bir topolojik uzaydır.



1°) Çember üzerindeki açık yayları (örneğin $\widehat{AB}$ yayı) alırsak, Hausdorff uzayıdır.

2°) $\mathcal{B} = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ sayılabilirdir.

3°) $f = S^1 \setminus \{P\} \longrightarrow E^1$
$X \longrightarrow f(X) = X^*$

$f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$ f, 1:1 dir. , f örtendir.

$\forall X^* \in E \Rightarrow f(X) = X^*$, $X \in S^1 \setminus \{P\}$ (Ödev): f^{-1} vardır.

$Boy(S^1 \setminus \{P\}) = 1$ $\{S^1$: 1 boyutlu küre.$\}$

Topolojik açıdan, çember ile doğru birbirine denktir.

Problemler:

1 - 2-boyutlu öklid uzayı (öklid düzlemi), E^2 de üç farklı nokta X, Y, Z olsun. $\overrightarrow{XY}$ ve $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri arasındaki açı θ olduğuna göre ; $d^2(Y,Z) = d^2(Y,X) + d^2(X,Z) - 2\, d(XY)\, d(X,Z) \cos\theta$ olduğunu ispat edin.

2 - $a, b, c, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, E^3 de ; $P_0 = (a,b,c)$,

$P_1 = (a + \cos\theta_2 \cos\theta_3 ,\ b + \cos\theta_1 \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 ,$
$c + \sin\theta_1 \sin\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3)$

$P_2 = (a - \cos\theta_2 \sin\theta_3 ,\ b + \cos\theta_1 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 ,$
$c + \sin\theta_1 \cos\theta_3 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3)$

$P_3 = (a+\sin\theta_2, b-\sin\theta_1\cos\theta_2, c+\cos\theta_1\cos\theta_2)$

noktaları veriliyor. $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ kümesinin E^3 de bir öklid çatısı olduğunu ispat edin.

3- E^n de bir öklid koordinat sistemine göre, $A, B \in E^n$ noktaları $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ koordinatları ile veriliyor. $d(A,B) = \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2\right]^{1/2}$ olduğunu ispatlayın.

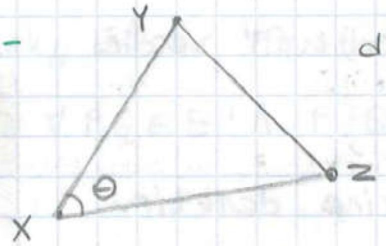
4- E^2 de $P_0=(1,1)$, $P_1=(2,2)$, $P_2=(-3,5)$ olmak üzere $\{P_0, P_1, P_2\}$ çatısı veriliyor. Bu çatıya göre uzaklık formülünü bulunuz.

5- E^n standart (reel) öklid uzayında $A_k=(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ $1 \le k \le n$ noktaları veriliyor. Öyle bir $X \in E^n$ noktası bulunuz ki,

$f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longrightarrow f(X) = \sum_{k=1}^{n} [d(X, A_k)]^2$ fonksiyonu mümkün olan en büyük değeri alsın.

Çözümler

1-



$d^2(Y,Z) = \|\overrightarrow{YZ}\|^2 = \langle \overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YZ} \rangle$

$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ}$ (1. afin öz.) $f(P,R) = \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$ 'den

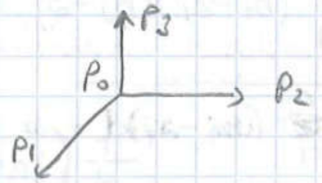
$\Rightarrow \overrightarrow{YZ} = -\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}$

$$d^2(Y,Z) = \langle \overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YZ} \rangle = \langle \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY} \rangle$$
$$= \langle \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XZ} \rangle + \langle \overrightarrow{XZ}, -\overrightarrow{XY} \rangle + \langle -\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle + \langle -\overrightarrow{XY}, -\overrightarrow{XY} \rangle$$
$$= \langle \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XZ} \rangle + \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle - 2\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle$$
$$= d^2(X,Y) + d^2(X,Z) - 2\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| . \|\overrightarrow{XZ}\|} \Rightarrow \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle = \|\overrightarrow{XY}\| . \|\overrightarrow{XZ}\| . \cos\theta$$
$$= d(X,Y) . d(X,Z) . \cos\theta$$

$$d^2(Y,Z) = d^2(X,Y) + d^2(X,Z) - 2d(X,Y).d(X,Z)\cos\theta \quad //$$

2- $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ E^3 de öklid çatısıdır. Eğer $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ kümesi E^3 ün öklid çatısıdır.



$\langle P_0P_i, P_0P_j \rangle \overset{?}{=} \delta_{ij}$

$i, j = 1, 2, 3$

$i = j = 1$ olsun. $\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1} \rangle = \|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 \overset{?}{=} 1$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (\cos\theta_2\cos\theta_3, \cos\theta_1\sin\theta_3 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \sin\theta_1\sin\theta_3 - \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3)$$

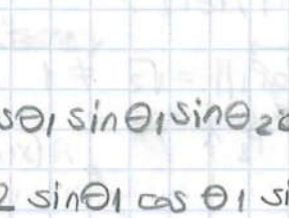
$$\|\overrightarrow{P_0P_1}\|^2 = (\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\sin\theta_1\sin\theta_2\cos^2\theta_3$$
$$+ \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_3 - 2\sin\theta_1\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\sin\theta_3\cos\theta_3 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3)$$
$$= \cos^2\theta_2\cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_2\cos^2\theta_3$$
$$= \cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_3 = 1 \quad //$$

$\|\overrightarrow{P_0P_2}\|^2 = \|\overrightarrow{P_0P_3}\|^2 = 1$

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_3} \rangle = 0$

$\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ $\mathbb{R}^3$ ün bir ortonormal bazı, $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ öklid çatısıdır.

3- $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ öklid çatısı veriliyor.



$\overrightarrow{P_0A} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_0P_i \qquad A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

sayılarına A noktasının koordinatları denir.

$\overrightarrow{P_0A} = a_0\overrightarrow{P_0P_1} + a_1\overrightarrow{P_0P_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$ şeklinde yazılır.

$\overrightarrow{P_0B} = \sum_{i=1}^{n} b_i P_0P_i \qquad B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\overrightarrow{P_0B} = \overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_0B} - \overrightarrow{P_0A}$

$= \overrightarrow{P_0B} - \overrightarrow{P_0A}$

$= \sum_{i=1}^{n} b_i P_0P_i - \sum_{i=1}^{n} a_i P_0P_i$

$\|\overrightarrow{AB}\| = (\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle)^{1/2}$

$\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) P_0P_i$

$$d(A, B) = \left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) P_0P_i, \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) P_0P_j \right\rangle\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j) \langle P_0P_i, P_0P_j \rangle}$$

$i=j$ olmalı
$i \neq j$ ise 0 olur.
sıfırları katmayız

$$= \sqrt{\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} (b_i - a_i)(b_j - a_j)\, \delta_{ij}}$$

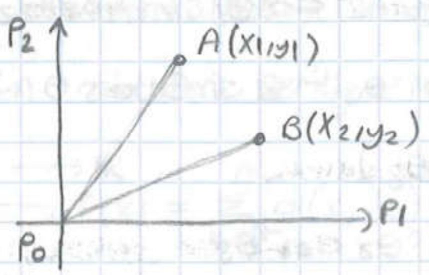
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$ (Euclid uzaklık formülü)

4- $P_0 = (1,1)$ $P_1 = (2,2)$ $P_2 = (-3,5)$

$\overrightarrow{P_0P_1} = (1,1)$ $\overrightarrow{P_0P_2} = (-4,4)$

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = -4 + 4 = 0$ ortogonal fakat birim değildir.

$\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \sqrt{2} \neq 1$ olduğundan ortonormal çatı değildir.



$\overrightarrow{P_0A} = x_1 \overrightarrow{P_0P_1} + y_1 \overrightarrow{P_0P_2} = (x_1, x_2)$

$\overrightarrow{P_0B} = x_2 \overrightarrow{P_0P_1} + y_2 \overrightarrow{P_0P_2}$

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_0B} - \overrightarrow{P_0A} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{P_0P_2}$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle (x_2 - x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{P_0P_2}, (x_2 - x_1)\overrightarrow{P_0P_1} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{P_0P_2} \rangle$$

$$= (x_2 - x_1)^2 \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1} \rangle + 0 + 0 + (y_2 - y_1)^2 \langle P_0P_2, P_0P_2 \rangle$$

$$= 2(x_2 - x_1)^2 + 32(y_2 - y_1)^2$$

$d(A,B) = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2 + 32(y_2 - y_1)^2}$ (öklid uzaklığı değildir.)

5- $A_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$, $1 \leq k \leq n$ $X \in E^n$ için,

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinatlardır.

$f: E^n \to \mathbb{R}$, $f(X) = \sum_{j=1}^{k} d^2(X, A_j) = d^2(X, A_1) + d^2(X, A_2) + \dots + d^2(X, A_k)$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$.

$d^2(X, A_k) = \|X, A_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} - x_i)^2$

$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (a_{i2} - x_i)^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} - x_i)^2$

$f_{x_1} = 0 \Rightarrow -2(a_{11} - x_1) + 2(a_{12} - x_2) + \dots + 2(a_{1k} - x_1) = 0$

$f_{x_2} = 0$
$\vdots$
$f_{x_n} = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k}}{k}$$

$$f(x_2)=0 \Rightarrow -2(a_{21}-x_2)+2(a_{22}-x_2)+\dots+2(a_{2k}-x_2)=0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{a_{21}+a_{22}+\dots+a_{2k}}{k}$$

$$f(x_n)=0 \Rightarrow x_n = \frac{a_{n1}+a_{n2}+\dots+a_{nk}}{k}$$

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{k} a_{1i}, \sum_{i=1}^{k} a_{2i}, \dots, \sum_{i=1}^{k} a_{ni}\right)\frac{1}{k}$$

$$A=(f_{x_ix_j})_{n\times n} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2k \end{pmatrix} \end{array}$$

$P(\lambda)$, A nın karakteristik polinomu olmak üzere,

1° Tüm karakteristik değerler; (A matrisinin) >0 ise minimum,

2° <0 ise maksimum,

3° $=0$ ise birşey söylenemez, (şüpheli durum.)

4° (−) ve (+) olanı varsa bu noktada ekstremum yoktur.

1. Tanım: (Diferansiyellenebilir Fonksiyon):

E^n de bir açık küme U olmak üzere bir;

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X \longrightarrow f(X)$$ reel değerli fonksiyonu verilsin. $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ olduğundan $f(X)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ olur.

f nin k-ıncı mertebeye kadar (k dahil) tüm kısmî türevleri sürekli ise f fonksiyonu k-ıncı mertebeden diferansiyellenebilir denir. (Veya kısaca, "f fonksiyonu C^k sınıfındandır" denir.)

Örnek // $f: E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow f(x,y)=xy$ $\quad C^k, \forall k\in\mathbb{N}$.

(tüm mertebelerden türevlenebilir, diferansiyellenebilir.)

$C^k(U,\mathbb{R}) = \{f : f: U \xrightarrow{\text{dif. bilir}} \mathbb{R}, k\in\mathbb{N}\}$ kümesini tanımlayalım.

$\Rightarrow f\in C^k(U,\mathbb{R})$

2. Tanım: Özel olarak U üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu sadece sürekli ise "C^0 sınıfındandır" denir. $\Rightarrow f\in C^0(U,\mathbb{R})$

3. Tanım: $f\in C^1(U,\mathbb{R})$ (f fonksiyonu ve 1. mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise) f'ye bir 0-form denir.

4. Tanım: Tüm mertebeden türevlenebilen bir fonksiyona "C^∞ sınıfındandır" denir. $C^\infty(U,\mathbb{R}) = \{ f : f \in C^k(U,\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N} \}$

Koordinat Fonksiyonları

E^n de bir nokta p ise $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in E^n$ olsun.

Bir $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinat sistemi seçersek ;

$$x_1 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow x_1(P) = x_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1$$

$$\{ Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \Rightarrow x_1(Q) = q_1 \}$$

x_1'e E^n de 1-inci koordinat fonksiyonu denir.

$$x_2 : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow x_2(P) = x_2(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_2$$

x_2'ye E^n de 2-nci koordinat fonksiyonu denir.

Benzer şekilde ;

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow x_i(P) = x_i$$

x_i'ye E^n de i-inci koordinat fonksiyonu denir.

Eğer x_i koordinat fonksiyonlarının kısmi türevleri varsa (k-inci mertebeye kadar) $x_i \in C^k(E^n, \mathbb{R})$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{(ya 1 veya sıfırdır.)}$$

Fonksiyonların Diferansiyellenebilmesi

$U \subset E^n$ bir açık küme olsun. U da bir fonksiyon,

$$F : U \longrightarrow E^m \qquad P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$
$$P \longrightarrow F(P) = Q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$$
$$F(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P))$$

$$f_1 : P \longrightarrow f_1(P) = q_1 \qquad f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_2 : P \longrightarrow f_2(P) = q_2 \quad \ldots\ldots$$

$$f_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longrightarrow f_m(P) = q_m$$

$(q \in \mathbb{R})$

Tanım: Tüm $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longrightarrow f_i(P)$ koordinat fonksiyonları, C^k sınıfından ise $[f_i \in C^k(U, \mathbb{R})]$ F'ye C^k sınıfındandır denir.

$F \in C^k(U, E^m)$ şeklinde gösterilir.

Örnek // $F : E^3 \longrightarrow E^3$

$P = (x, y, z) \longrightarrow F(P) = F(x, y, z) = (x^2, yz, xy) = (f_1(P), f_2(P), f_3(P))$

$Q = (q_1, q_2, q_3)$

$F(Q) = (q_1^2, q_2 \cdot q_3, q_1 \cdot q_2)$

$f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(E^3, E^3)$

$f_1(P) = f_1(x, y, z) = x^2$

$f_2(P) = f_2(x, y, z) = yz$

$f_3(P) = f_3(x, y, z) = xy$

$P = (1, -2, 0) \Rightarrow F(P) = (1^2, (-2).0, 1.(-2)) = (1, 0, -2)$

$Q = (-3, 1, 3) \Rightarrow F(Q) = ((-3)^2, 1.3, (-3).1) = (9, 3, -3)$

Örnek // $\psi : E^2 \longrightarrow E^3$

$(u, v) \longrightarrow \psi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv, v^3)$

$\psi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$

$f_1(u, v) = u^2 - v^2, \quad f_2(u, v) = 2uv, \quad f_3(u, v) = v^3$

$f_i : E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Rightarrow f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(E^2, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \psi \in C^\infty(E^2, E^3)$

Tanım: (Diffeomorfizm):

E^n de iki açık küme U ve V olsun. $\psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu verilsin.

1- $\psi \in C^k(U, V)$,

2- $\psi^{-1} \in C^k(V, U)$ ise ψ fonksiyonu, U ile V arasında bir diffeomorfizm 'dir denir. U ile V açık kümeleri diffeomorfiktirler denir.

Örnek // $\psi : E^2 \longrightarrow E^2$, $\quad \psi(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2)$

$X = (x_1, x_2) \longrightarrow \psi(X)$

ψ nin bir diffeomorfizm olduğunu gösterelim.

1°) $f_1(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} - x_2)$

$\Rightarrow f_1, f_2 \in C^\infty(E^2, \mathbb{R}) \Rightarrow \psi \in C^\infty(E^2, E^2)$ dir.

$2^o)$. ψ, 1:1 dir. $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in E^2$,

$$\psi(\underbrace{x_1,x_2}_{x}) = \psi(\underbrace{y_1,y_2}_{y}) \Rightarrow (x_1e^{x_2}+x_2, x_1e^{x_2}-x_2) = (y_1e^{y_2}+y_2, y_1e^{y_2}-y_2)$$

$\Rightarrow x_1e^{x_2}+x_2 = y_1e^{y_2}+y_2 \wedge x_1e^{x_2}-x_2 = y_1e^{y_2}-y_2$ (toplarsak)

$\Rightarrow 2x_2 = 2y_2 \wedge x_1e^{x_2}-x_2 = y_1e^{y_2}-y_2$

$\Rightarrow x_2 = y_2 \wedge x_1e^{x_2}-x_2 = y_1e^{y_2}-y^2$

$\Rightarrow x_2 = y_2 \wedge x_1 = y_1 \Rightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ //

ψ örtendir. $\forall (y_1,y_2)\in E^2$, $\psi(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ olan $(x_1,x_2)\in E^2$ var mıdır. Bakalım.

$\Rightarrow (x_1e^{x_2}+x_2, x_1e^{x_2}-x_2) = (y_1,y_2) = \psi(x_1,x_2)$

$\Rightarrow (x_1,x_2) = \psi^{-1}(y_1,y_2) = \left(\frac{y_2+y_1}{2}e^{\frac{y_2-y_1}{2}}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$ //

$\psi^{-1}\in C^\infty(E^2,E^2)$ (ve C^∞ sınıfından türevlenebilir.)

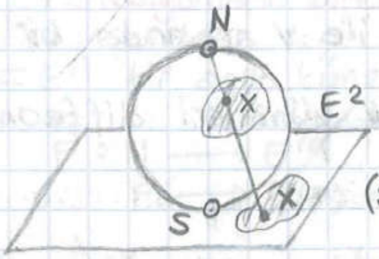
Sonuç: $\psi: E^2 \longrightarrow E^2$ fonksiyonu C^∞ sınıfından bir diffeomorfizmdir.

Tanım: (Harita = Koordinat Komşuluğu):

M bir n-boyutlu topolojik manifold olsun. M nin açık kümelerinden birisi W ve W'yı E^n deki bir açığa eşleyen homeomorfizm ψ olsun.

$$\psi: U\subset E^n \xrightarrow[\text{homeomorfizm}]{} W\subset M$$

(ψ, W) ikilisine, M de bir koordinat komşuluğu veya <u>harita</u> denir.



(Stereografik izdüşüm)

Tanım: (Atlas = Koordinat Komşuluğu Sistemi):

M, n-boyutlu topolojik manifold olsun. M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\} = \{U_\alpha : \alpha\in I\}$, (I indis kümesi.) veriliyor.

U_α'yı E^n deki bir açığa karşılık getiren homeomorfizm

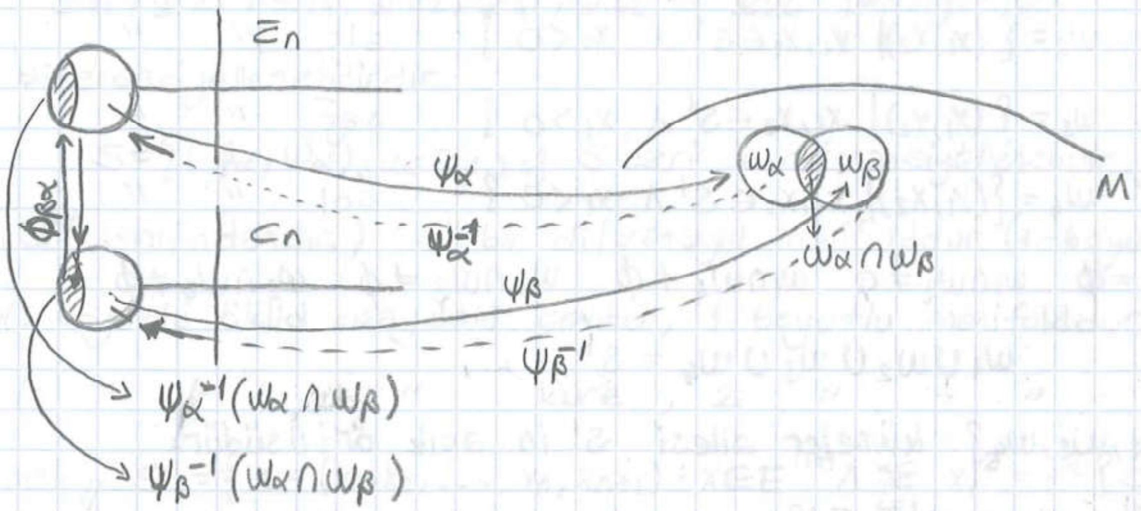
ψ_α olsun. (ψ_α, U_α) haritalarının, $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\} = \{(\psi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in I\}$ kümeler ailesine M nin bir atlası denir.

20.10.95/Cuma

Diferansiyellenebilir Manifold

M, n-boyutlu bir topolojik manifold olsun.

(ψ_α, W_α) ve (ψ_β, W_β) ikililerini alalım. $W_\alpha \cap W_\beta \neq \phi$



$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha, \quad \phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta$

$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$

$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$

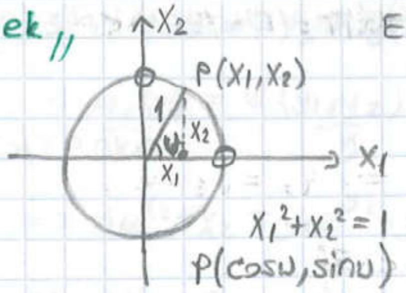
Tanım: (Diferansiyellenebilir Yapı):

M, n-boyutlu bir topolojik manifold olsun. M'nin bir atlası, $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ olsun. Eğer bu S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \phi$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in I$ için elde edilen $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferansiyellenebilir iseler S'ye C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir.
Bu taktirde S atlasına da, M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı denir.

Tanım: (Diferansiyellenebilir Manifold):

Üzerinde bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanan n-boyutlu topolojik manifolda, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold denir.

Örnek // E^2 de S^1 merkezi başlangıç noktasında olan birim çember olsun.



$W_1 = \{ (x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in S^1 \wedge x_2 > 0 \}$ üst yarım çember.

$W_2 = \{ (x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in S^1 \wedge x_2 < 0 \}$ alt " "

$W_3 = \{ (x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in S^1 \wedge x_1 > 0 \}$ sağ " "

$W_4 = \{ (x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in S^1 \wedge x_1 < 0 \}$ sol " "

$W_1 \cap W_2 = \phi \quad W_1 \cap W_3 \neq \phi \quad W_1 \cap W_4 \neq \phi \quad W_2 \cap W_3 \neq \phi \quad W_2 \cap W_4 \neq \phi$

$$W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 = S^1$$

$\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ kümeler ailesi S^1 in açık örtüsüdür.

$\psi_1^{-1} : W_1 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \longrightarrow \psi_1^{-1}(x_1,x_2) = x_1 = \cos u \qquad I = \{ x_1 \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge -1 < x_1 < 1 \}$

$\psi_2^{-1} : W_2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \longrightarrow \psi_2^{-1}(x_1,x_2) = x_1 = \cos u$

ψ_1^{-1} ve ψ_2^{-1} homeomorfizm ve türevlenebilir.

$\psi_3^{-1} : W_3 \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \longrightarrow \psi_3^{-1}(x_1,x_2) = x_2 = \sin u \qquad J = \{ x_2 \mid x_2 \in \mathbb{R} \wedge -1 < x_2 < 1 \}$

$\psi_4^{-1} : W_3 \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \longrightarrow \psi_4^{-1}(x_1,x_2) = x_2 = \sin u$

ψ_2^{-1} ve ψ_3^{-1} homeomorfizm ve türevlenebilir.

$\psi_1^{-1}, \psi_2^{-1}, \psi_3^{-1}, \psi_4^{-1}$ homeomorfizmdirler. (S^1 in bir atlası S ise)

$S = \{ \underset{\text{harita}}{(\psi_1, W_1)}, (\psi_2, W_2), (\psi_3, W_3), (\psi_4, W_4) \}$ S^1 in atlasıdır.

$W_1 \cap W_3 = \{ (x_1,x_2) : (x_1,x_2) \in S^1 \wedge x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \}$

Φ_{31}, Φ_{13} fonksiyonlarını tanımlayalım.

$\Phi_{13} = \psi_1^{-1} \circ \psi_3 \qquad \Phi_{31} = \psi_3^{-1} \circ \psi_1$

$\Phi_{31} = \psi_3^{-1} \circ \psi_1 : \psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3) \longrightarrow \psi_3^{-1}(W_1 \cap W_3)$
$x_1 \longrightarrow \Phi_{31}(x_1) = (\psi_3^{-1} \circ \psi_1)(x_1)$

$= \psi_3^{-1}(\psi_1(x_1)) = x_2$ bu fonksiyon türevlenebilirdir. $(0<x_1<1)$

$x_2 = f(x_1) = x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_2^2 = 1 - x_1^2$

$\Rightarrow x_2 = \mp\sqrt{1-x_1^2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{1-x_1^2}$

$F = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \Rightarrow x_1 = 1$ de tanımlı değil.

$\Phi_{31}, \Phi_{23}, \Phi_{14}, \Phi_{32}, \Phi_{41}, \Phi_{42}$ ve Φ_{24} fonksiyonları diferansiyellenebilirdir.

$S = \{(\psi_\alpha, w_\alpha)\}_{\alpha \in \{1,2,3,4\}}$ S üzerinde diferansiyellenebilir yapıdır. (C^∞ sınıfındandır.) S^1 bir diferansiyel manifolddur. (1-boyutludur.)

(2 boyutlu öklid uzaydaki çember, 1 boyutlu manifolddur.)

(3 " " " küre, 2 " " .)

Örnek // $S^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) : X \in E^{n+1} \wedge \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\} \subset E^{n+1}$ kümesine n-boyutlu küre denir.

$S^2 = \{X = (x_1, x_2, x_3) : X \in E^3 \wedge \sum_{i=1} x_i^2 = r^2\} \subset E^3$ kümesine, 2-boyutlu küre denir.

$S^1 = \{x = (x_1, x_2) : X \in E^2 \wedge \sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 = r^2\} \subset E^2$ kümesine, iki boyutlu öklid uzayında 1-boyutlu küre denir.

$w_i^+ = \{P = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) : P \in S^n \wedge x_i > 0 ;\ 1 \leq i \leq n+1\}$

kümesini tanımlayalım. (Bu küme n+1 tane yarım açık küre tanımlar. Pozitif yarım küredir. $x_i > 0$ olduğundan koordinat ekseni üzerindeki noktalar dahil olmayacak şekilde pozitif yarım açık küre.)

$w_i^- = \{Q = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) : Q \in S^n \wedge x_i < 0 ;\ 1 \leq i \leq n+1\}$

Negatif yarım açık küredir.

$\psi^{-1} : w_i \longrightarrow \underbrace{B(\underset{\text{orjin}}{0}, r)}_{}\ = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < r^2\}$ açık yuvar.

n+1 boyutlu uzaydan (pozitif yarım açık küreden, n boyutlu uzaya.)

$\overline{\psi}_i^{-1} : \overline{W}_i \longrightarrow B(0,r) = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : \sum_{j=1}^{n} y_i^2 < r^2\}$

fonksiyonlarını $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow n+1$

boyutlu uzaydaki noktalardan $\longrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$

(n boyutlu uzaydaki noktalara.)

x_i nokta çıkarılarak $= (y_1, y_2, \dots, y_n)$

3. bileşeni sıfır olan fonksiyonları $(x,y,0) \cong (x,y)$ olarak

gösterebiliyoruz. {$(x,y,0)$'dan (x,y)'ye 1:1 ve örten fonksiyon

oluşturabildiğimiz için.} $n+1$ boyutlu uzayda $(y_1, y_2, \dots, y_n)$

olarak gösterim yapılabilir.

$\Phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha \qquad -1 \leq \alpha \leq n, \ -1 \leq \beta \leq n$

fonksiyonu tanımlanabilir, bunlar diferansiyellenebilir. Dolayısıyla

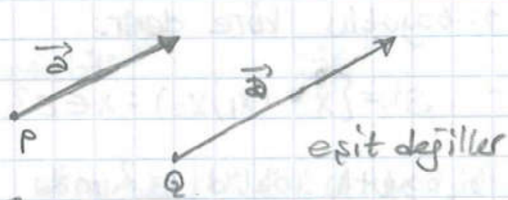
S^n, n-boyutlu küre diferansiyellenebilir bir manifolddur.

Tanjant Vektörleri

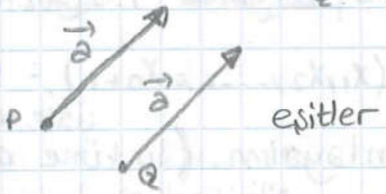
a- Yere Bağlı Olan Vektörler :

Yönü, doğrultusu, büyüklüğü ve

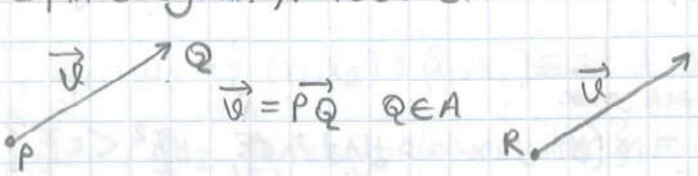
başlangıç noktası belli olan vektörler.



b- Yere Bağlı Olmayan Vektörler.



Tanım: (Tanjant Vektörü): Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{u} \in V$ için; $(\underset{\text{nokta}}{P}, \underset{\text{vektör}}{\vec{u}})$ ikilisine, A afin uzayının, P noktasındaki bir tanjant vektörü diyoruz.



$R \in A$ noktası ve $\vec{u} \in V$ vektörü alınırsa $(R, \vec{u})$ tanjant

vektörü tanımlanır. İlk tanıma göre; vektörü, yere bağlı olarak