# KİSMÎ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Babamın Anısına ...

ve Aileme ...

Erhan GÜLER

Kaynaklar:

Partial Differential Equations (Frederic H. Miller)

Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel Denklemler - (K.T.D.D.)

7.10.95
c. tesi

# Kısmi Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel Denklem: İçinde türev bulunan eşitliklerdir.

a- $y=f(x)$ şeklindeki fonksiyonun türevleri bulunuyorsa buna adi (türevli) diferansiyel denklem denir.

b- $z=f(x,y)$ çok değişkenli fonksiyonun kısmî türevleri varsa [$z=(x_1, x_2, \dots x_n)$ olabilir.] buna kısmî türevli diferansiyel denklem denir.

Mertebe: Diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevin mertebesi,

Derece: " " " " " üssüdür.

Derece ve mertebe ; negatif, rasyonel, irrasyonel olamaz. Pozitif tamsayı olmak zorundadır.

Örnek // $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + xy = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{3/2}$ , $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} + y^3 = 0$

$y=f(x)$ — 2. mertebeden, 3. dereceden

$z=z(x,y)$ — 2. mertebeden, 1. dereceden

## Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

1°) Genel Çözüm: Diferansiyel denklemin mertebesi sayısı kadar sabit içeren çözümüne denir.

$F(x,y,y',y'')=0 \Rightarrow G=(x,y,c_1,c_2)=0$ genel çözüm.

2°) Özel Çözüm: Genel çözümdeki sabitlere değerler verilerek elde edilen çözüme denir.

3°) Singüler (Tekil) Çözümler: Özel çözüm gibi genel çözümdeki sabitlere değerler verilerek elde edilmeyen fakat diferansiyel denklemi sağlayan fonksiyonlara denir.

## Adi Türevli Diferansiyel Denklemler

1. mertebeden ve 1. dereceden denklemler.

1- Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler:

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ verilsin. Eğer bu denklem

$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$ şeklinde yazılabiliyorsa, bu diferansiyel denkleme değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem denir.

$\Rightarrow \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c$ denklemin genel çözümüdür.

Örnek //
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy+3y}{x^2y - x^2} \Rightarrow (x^2y - x^2)\,dy = (2xy+3y)\,dx$$

$$\Rightarrow x^2(y-1)\,dy = y(2x+3)\,dx \Rightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)dy = \left(\frac{2x+3}{x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{y}\right)dy = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx \Rightarrow y - \ln y = 2\ln x - \frac{3}{x} + c \quad //$$

## 2- Tam Diferansiyel Denklemler :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ise

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$z = f(x,y) \rightarrow$ sabit

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int P\,dx \Rightarrow f(x,y) = \int P\,dx + \varphi(y)$$

y sabit alarak integral aldık.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{\text{bilinmeyen}} = Q$$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q - \dfrac{\partial}{\partial y}\int P\,dx$ buradan $\varphi$ bulunur.

Örnek // $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{4y-x}$ ?

$y\,dx + (x-4y)\,dy = 0 \qquad P = y \quad Q = x - 4y$

$P_y = 1 = Q_x$ tam dif.

$y\,dx + x\,dy - 4y\,dy = 0$

$$\Rightarrow d(xy) - d(2y^2) = 0 \Rightarrow xy - 2y^2 = c$$

$$\Rightarrow y(x-2y) = c \quad //$$

Bir diğer metod ise integral çarpanı metodudur.

**İntegral Çarpanı:** $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ olsun. Fakat bir $\mu = \mu(x,y)$ fonksiyonu için;

$$\underbrace{\mu(x,y)P(x,y)}dx + \underbrace{\mu(x,y)Q(x,y)}dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad P'dx + Q'dy = 0$$

Eğer $\frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial Q'}{\partial x}$ ise $\mu$'ye integral çarpanı denir.

Örnek// $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4y+x}$ genel çözüm ?

$y dx - (4y+x)dy = 0 \qquad P_y \neq Q_x$ tam dif değil.

$\Rightarrow y dx - x dy - 4y dy = 0$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2}(y dx - x dy - 4y dy) = 0$

$\Rightarrow \frac{y dx - x dy}{y^2} - \frac{4}{y}dy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) - 4d(\ln y) = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{y} - 4\ln y = c$ //

**3- Lineer Denklemler:**

$y' + P(x)y = Q(x)$ şeklindedir.

$y' + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx$

$\ln y = -\int P dx + \ln k \Rightarrow e^{\ln y} = e^{-\int P dx + \ln k}$

$\Rightarrow y = k e^{-\int P dx} \Rightarrow y' = k' e^{-\int P dx} + k(-P)e^{-\int P dx}$

$k' e^{-\int P dx} - kPe^{-\int P dx} + Pke^{-\int P dx} = Q(x)$

$k' = Q(x)e^{\int P dx}$

Örnek// $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 3y}{x}$ genel çözüm ?

$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^2$ lineerdir.

$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = 0 \quad \frac{dy}{y} = \frac{3}{x}dx \quad \ln y = 3\ln x + \ln k$

$y = kx^3$

$y' = k'x^3 + 3kx^2$ denklemde yerine yazalım.

$\Rightarrow k'x^3 + 3kx^2 - \frac{3}{x} k x^3 = x^2$

$\Rightarrow k' = \frac{1}{x} \Rightarrow k = \ln x + c$

$\Rightarrow y = (\ln x + c)x^3$ genel çözümdür.

## 4- Bernoulli Diferansiyel Denklemi :

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \ , \ n \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

$z = y^{1-n}$ dönüşümü uygulanır.

$z' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$

$(1-n)y^{-n}y' + P(x)(1-n)y^{1-n} = Q(x)(1-n)$

$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$

Örnek // $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2y^2}$ genel çözüm ?

$n = -2$ dir . Bernoulli dif. denk.

$z = y^{1+2} = y^{+3} \qquad z' = +3y^2y'$

$3y^2y' + \frac{1}{x}3y^3 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{3}{x}z = \frac{1}{x^2}$

$z' + \frac{3}{x}z = 0 \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{3}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{3}{x}dx$

$\ln z = -3\ln x + \ln k \qquad z = \frac{k}{x^3}$ buradan çözülür.

## 5- Riccati Diferansiyel Denklemi :

$y' = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x)$ şeklindedir.

Bir özel çözümü $y = y_1(x)$ olsun.

$y_1' = P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 + R(x)$ olur. 2 metod vardır.

i- $y = z + y_1$ dönüşümü yapılır.

$z' + y_1' = P(z + y_1) + Q(z + y_1)^2 + R$

$z' + \cancel{y_1'} = Pz + \cancel{Py_1} + Qz^2 + 2Qy_1z + \cancel{Qy_1^2} + \cancel{R}$

$z' - (P + 2Qy_1)z = Qz^2$ bernoulli dir. $n = 2$

ii - $y = y_1 + \frac{1}{z}$ dönüşümü yapılırsa, lineer dif. denklem olur.

Ödev// $y' \pm xy + y^2 + 1 - 2x^2$ Riccati dif. denk. $(y_1 = x)$

## Yüksek Derece, 1. Mertebe Diferansiyel Denklemler

$f(x, y, y') = 0$ şeklindedir.

a) $y'$ ye göre çözülebilen denklemler.

b) $y$ ye göre " " .

c) $x$ e " " " .

**a)** $y' = p$ ye göre çözülebilen denklemler.

$$p = f_1(x, y),\quad p = f_2(x, y), \ldots$$

Çözümler, 1. mertebe ve 1. derecedendir.

$F_1(x, y, c) = 0,\quad F_2(x, y, c) = 0, \ldots$ bunları çarparız.

$\Rightarrow F_1(x, y, c) \cdot F_2(x, y, c) \cdot \ldots = 0$ genel çözüm bulunur.

Örnek// $2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (6x^2y - 1)\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ genel çözüm?

$\frac{dy}{dx} = p \quad 2yp^2 + (6x^2y - 1)p - 3x^2 = 0$ dır.

$$p = \frac{1}{2y},\quad p = -3x^2$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \quad 2y\,dy = dx \quad y^2 = x + c$

$\frac{dy}{dx} = -3x^2 \quad dy = -3x^2 dx \quad y = -x^3 + c$

$\Rightarrow (y^2 - x + c)(y + x^3 + c) = 0$ genel çözümdür. (kapalı fonk.)

$x^2y^2 - x^4 + y^3 - xy + c\,(x^3 + y^2 - x + y) + c^2 = 0$ genel çözüm.

**b)** $y$ ye göre çözülebilen denklemler.

$F(x, y, y') = 0 \Rightarrow y = f(x, y'),\quad y' = p \Rightarrow y = f(x, p)$ olur.

Her iki tarafın $x$'e göre türevini alalım.

Veya $p$, $x$'in fonksiyonu sayılır, ya da her iki tarafın diferansiyeli alınır.

$$\Rightarrow dy = df \Rightarrow dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = f_x + f_p \cdot p'} \quad (p \text{ ve } x\text{'e göre}) \quad 1.\text{mertebe}, 1 \text{ dereceden}$$

$p = g(x,c)$ şeklinde çözülebilir.

$y = f(x,p)$, $p = g(x,c)$ $\Rightarrow$ genel çözümdür.

Örnek // $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$ genel çözüm ?

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow y = p^2 + 2xp \Rightarrow p = 2pp' + 2p + 2xp'$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}(p+x) + p = 0 \qquad \frac{dp}{dx} + \frac{p}{2(p+x)} = 0$$

## 1. Derece ve 1. Mertebeden Homojen Denklemler

$y' = f(x,y)$ denkleminde $f$ fonksiyonu sıfırıncı dereceden homojen ise diferansiyel denklem homojendir denir.

$z = f(x,y)$ $\quad x \rightarrow tx$, $y \rightarrow ty$ $\quad f(tx,ty) = t^k f(x,y)$ ise

$f(x,y)$, $k$. dereceden homojendir.

Örneğin $z = x^3 + xy^2$ ; $f(tx,ty) = t^3x^3 + tx(t^2x^2) = t^3(x^3 + xy^2)$

3. dereceden homojendir.

Sıfırıncı derece : rasyonel ve pay ile paydanın dereceleri eşit.

$y' = f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde yazılabilir.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = F(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = F(u) - u \Rightarrow \frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$$ değişkenlere ayrılabilir

Örnek // $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2+xy}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$ homojen dif. denk.

$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$ yazarsak, $y' = u'x + u$

$$u'x + \cancel{u} = 1 + u^2 + \cancel{u} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \text{Arctan}u = \ln x + c$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + c$$

$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{2(p+x)}$ homojen.

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{x\left(\frac{p}{x}\right)}{2x\left(\frac{p}{x}+1\right)}$ $\quad \frac{p}{x} = u \Rightarrow p = ux \Rightarrow p' = u'x + u$

$\Rightarrow u'x + u = -\frac{u}{2(u+1)} \Rightarrow u'x = -\frac{u}{2(u+1)} - u$

$\Rightarrow u'x = \frac{-u-2u^2-2u}{2(u+1)} \Rightarrow \frac{2(u+1)}{2u^2+3u} = -\int \frac{dx}{x}$

$g(p,c) = 0$ , $y = p^2 + 2xp$ genel çözümdür.

★ $F(x,y,p) = 0 \Rightarrow x = f(y,p) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = f_y + f_p \cdot \frac{dp}{dy}$
$p = p(y)$

$\Rightarrow p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{p} = f_y + f_p \frac{dp}{dy}$ 1.mert. 1.der.

$\Rightarrow (g(y,p,c) = 0 \wedge F(x,y,p) = 0)$ genel çözümdür.

$\Rightarrow h(x,y,c) = 0$ çözüm bulunabilir.

Örnek// $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow p^2 + 2xp - y = 0$

$\Rightarrow x = \frac{y-p^2}{2p} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{\left(1-2p\frac{dp}{dy}\right)p - \frac{dp}{dy}(y-p^2)}{p^2}$

$\Rightarrow 2p = p - 2p^2\cancel{\frac{dp}{dy}} - y\frac{dp}{dy} + p^2\cancel{\frac{dp}{dy}}$

$\Rightarrow (p^2+y)\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow (p^2+y)\,dp + p\,dy = 0$

$\Rightarrow y\,dp + p\,dy = 0 \Rightarrow y\,dp + p\,dy + p^2\,dp = 0$

$\Rightarrow yp + \frac{p^3}{3} = c \wedge x = \frac{y-p^2}{2p}$ genel çözümdür. //

## Singüler (Tekil) Çözümler

3 yol ile bulunabilir :

1 - Eğri ailelerinin zarfı olarak :

$F(x,y,p) = 0 \Rightarrow f(x,y,c) = 0$ genel çözümdür.

$\left\{ \begin{array}{l} H(x,y) = 0 \rightarrow y = f(x) \text{ düzlemde eğri} \\ \text{kapalı} \qquad\qquad \text{açık} \end{array} \right.$

$f(x,y,c)=0$ eğrileri verir. (düzlende sonsuz tane eğri ailesi.)

$c_1 \rightarrow f(x,y,c_1)=0$

$c_2 \rightarrow f(x,y,c_2)=0$

$\vdots$


Eğri ailesinin zarfı diferansiyel denklemi sağlıyorsa singüler çözümdür.

Zarfın bulunuşu: $f(x,y,c)=0$ bulunur. $\dfrac{\partial f(x,y,c)}{\partial c}=0$ yazılır.

$H(x,y)=0$ (sabiti yok ederiz) ve buradan zarf bulunur.

zarf = c yörüngesi.(eğrisi) denir.

2- $F(x,y,p)=0$ eğri ailesi ($p$ = sabit)

$\dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \Rightarrow G(x,y)=0$ denklemi sağlarsa singüler çözümdür.

p-yörüngesi denir.

3- Diferansiyel denklemi çözerken içinde türev bulunmayan çarpanlar olabilir. Bunları kullanarak bazı fonksiyonlar bulunur. Bunlar singüler çözümdür.

Örnek// $4(x-2y-1)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+4\dfrac{dy}{dx}-1=0$ genel çözüm-singüler çözüm ?

$\Rightarrow 4(x-2y-1)p^2+4p-1=0$

$\Rightarrow x=2y+1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{4p^2}$ (x'e göre çözerek.)

$\Rightarrow \dfrac{1}{p}=2+\dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dy}-\dfrac{1}{2p^3}\dfrac{dp}{dy}$ ($2p^3$ ile çarpalım)

$\Rightarrow 2p^2(1-2p)=(2p-1)\dfrac{dp}{dy}$

$\Rightarrow (2p-1)\left[\dfrac{dp}{dy}+2p^2\right]=0 \longrightarrow 2p-1=0$ (türev yok) tali çözüm.

$\dfrac{dp}{dy}+2p^2=0$ (türev var.)

$2p-1=0 \Rightarrow p=1/2$ yan çarpandır. Denklemde yerine yazarak,

$\Rightarrow 4(x-2y-1)\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}-1=0$

$\Rightarrow x-2y=0 \Rightarrow x=2y \Rightarrow y=\dfrac{x}{2}$ (yan şartlardan elde edilen singüler çözümdür.)

$y'=\frac{1}{2}$ diferansiyel denklemi sağlar.

2°) $\frac{dp}{dy}+2p^2=0 \Rightarrow \frac{dp}{dy}=-2p^2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2p}+c$

$x=2y+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{4p^2} \wedge y=-\frac{1}{2p}+c$ genel çözüm olur.

$x=2c+1+(y-c)^2$ (y değerini yazarak)

$0=2-2(y-c) \Rightarrow c=y-1$

$x=2(y-1)+1+(y-(y-1))^2 \Rightarrow x=2y-2+1+1 \Rightarrow x=2y$ zarf

diferansiyel denklemi sağladığından singüler çözümdür.

3°) $4(x-2y-1)p^2+4p-1=0 \Rightarrow 8(x-2y-1)p+4=0$

$\Rightarrow p=-\frac{1}{2(x-2y-1)}$ (denklemde yazalım)

$\Rightarrow 4(x-2y-1)\frac{1}{4(x-2y-1)^2}-\frac{4}{2(x-2y-1)}-1=0$

$\Rightarrow 1-2-x+2y+1=0 \Rightarrow -x+2y=0$

p-yörüngesi singüler çözümdür.

## Clairaut Diferansiyel Denklemi

$p=\frac{dy}{dx} \Rightarrow y=xp+\phi(p)$ şeklindeki denklemlere denir.

$p=p(x)$ old. farzederek $x$'e göre türev.

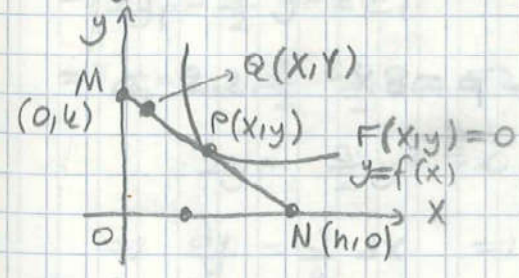
$\Rightarrow p=p+x\frac{dp}{dx}+\phi_p\frac{dp}{dx}$

$0=(x+\phi_p)\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c \wedge y=xp+\phi(p)$

$\searrow x+\phi_p=0 \Rightarrow \underline{y=xc+\phi(c)}$ genel çözüm.

dif. denklemde $p$ yerine $c$ alarak bulunuyor.

Örnek // Teğetlerinin koordinat eksenlerini kestiği noktaların başlangıca olan uzaklıklarının cebirsel toplamı sabit bir $a$ değerine eşit olan eğrilerin denklemini




$\overline{MO}+\overline{NO}=a \qquad P=(x,y)$

$m=y'=\frac{dy}{dx}=p$

$Y-y=p(X-x)$ teğet denklemi.

$\Rightarrow Y=k \wedge X=0$ alırsak, $k-y=p(0-x) \Rightarrow k=y-px$

$M(0, y-px)$ olur. //

$\Rightarrow N(h,0) \Rightarrow Y=0$ ve $X=h$ alınırsa

$0-y = p(h-x) \Rightarrow h = x - \frac{y}{p}$ olur.

$N(x-\frac{y}{p}, 0)$ olur. //

$\Rightarrow y - px + x - \frac{y}{p} = \overline{OM} + \overline{ON} = a$

$\Rightarrow y - px + x - \frac{y}{p} = a$

$\Rightarrow y = xp + \frac{ap}{p-1}$ Clairaut denklemi.

$p = c$ alırsak,

$y = xc + \frac{ac}{c-1}$ genel çözümdür.

Ödev: Singüler çözümü bulun.

## Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde, $(n>1)$ n-inci mertebeden diferansiyel denklem denir. İki gruba ayrılır:

A- Lineer olmayan denklemler.

a- Bağımlı değişkeni açık olarak bulundurmayan denklemler.

$F(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$ $\{ y = f(x)$ y: bağımlı değ. x: bağımsız değ.

$\frac{dy}{dx} = p$ diyoruz. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(p) = \frac{dp}{dx}$,

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{d^2p}{dx^2}, \ldots$

$\ldots, \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}$ şeklinde yazılır.

$F(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}) = 0$

Örnek // $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$ $x=1, y=5, \frac{dy}{dx} = -2$ olan özel çözümü?

$\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ yazarsak, $x.\frac{dp}{dx} - p = 8x^3$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 8x^2$ lineer denk.

$\Rightarrow x\,dp - p\,dx = 8x^3dx \Rightarrow \frac{x\,dp - p\,dx}{x^2} = 8x\,dx \Rightarrow \int d\left(\frac{p}{x}\right) = \int 8x\,dx + c$

$\frac{p}{x} = 4x^2 + c \Rightarrow p = 4x^3 + cx = \frac{dy}{dx}$

$x=1 \Rightarrow p=-2$

$-2 = 4 + c \Rightarrow c = -6 \quad , \; p = 4x^3 - 6x = \frac{dy}{dx}$

$y = x^4 - 3x^2 + c_1$

$x=1 \Rightarrow y=5 \Rightarrow 5 = 1 - 3 + c_1 \Rightarrow c_1 = 7$

$\Rightarrow y = x^4 - 3x^2 + 7$ özel çözüm olur.

b- Bağımsız değişkeni açık olarak bulundurmayan denklemler.

$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$

$\frac{dy}{dx} = p$ // $p = p(y)$, $y = y(x)$ olduğunu kabul edelim.

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}[p] = \frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p} = p\frac{dp}{dy}$ //

$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d}{dx}\left[p\frac{dp}{dy}\right] = \left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)$

$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$

$= p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$

$G\left(y, p, p\frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$

Örnek // $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad x=0, \; y=2, \; \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$ özel çözüm?

$p = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$

$\Rightarrow 2yp\frac{dp}{dy} + 2p^2 - 3yp = 0$

$\Rightarrow 2(y\,dp + p\,dy) - 3y\,dy = 0$

$\Rightarrow 2yp - \frac{3}{2}y^2 = c_1$

$\Rightarrow c_1 = 2.2.\frac{3}{2} - \frac{3}{2}.4 \Rightarrow c_1 = 0$

$2yp - \frac{3}{2}y^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{4}y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3/4\,y$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{3}{4}dx \Rightarrow \ln y = \frac{3}{4}x + \ln c \qquad y = ce^{\frac{3}{4}x}$

$x=0$; $y=2$ olur. $2 = c.e^0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y = 2e^{\frac{3}{4}x}$ özel çöz. //

## B- Lineer Denklemler.

$P \neq 0$ ve $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n, Q$ : $x$'in fonksiyonları olmak üzere;

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q \quad (1)$$

şeklindeki denklemlere, n-inci mertebeden lineer diferansiyel denklem denir.

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

diferansiyel denklemine (homojen-lineer denklemine) (1) denkleminin homojen kısmı denir. (1) denkleminin genel çözümü;

$y_h$ : homojen kısmının genel çözümü,

$Y_1$ : (1) denkleminin bir özel çözümü, olmak üzere

$\boxed{y = Y_1 + y_h}$ (1) denkleminin genel çözümüdür.

### Sabit katsayılı - Lineer Denklemler

$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ = sabit olmak üzere bu diferansiyel denkleme sabit katsayılı - lineer diferansiyel denklemler denir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y \;,\; \frac{d}{dx} = D \Rightarrow \frac{dy}{dx} = D.y \text{ olur.}$$

$D$ : türev operatörü.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D(Dy) = D^2 y$$

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = P_0 D^n y + P_1 D^{n-1} y + \ldots + P_{n-1} D y + P_n y$$

$$= \underbrace{(P_0 D^n + P_1 D^{n-1} + \ldots + P_{n-1} D + P_n)}_{} y = Q$$

$\phi(D)$ D'ye göre n-inci dereceden polinomdur.

$\Rightarrow \phi(D) y = Q$ $\quad y = y_h + Y_1$ genel çözümdür.

$y_h$ : $\phi(D) y = 0$ ın genel çözümü

$Y_1$ : $\phi(D) y = Q$ nun özel çözümüdür.

$y_h$ nin bulunması :

$\phi(D)y = 0$ , $y = e^{rx} \Rightarrow De^{rx} = \frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$

$D^2e^{rx} = D(De^{rx}) = r^2e^{rx}; \ldots, D^ke^{rx} = r^ke^{rx}$

$\Rightarrow \phi(D)e^{rx} = \phi(r)e^{rx} = 0$ { n. derece polinomun n tane kökü vardır. }

$\Rightarrow e^{rx} \neq 0$ ve $\phi(r) = 0$ olmalıdır.

I) $\phi(r) = 0$ ın kökleri $r_1, r_2, \ldots, r_n$ reel ve farklı olsun.

$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$ homojen kısmın genel çözümüdür.

Örnek // $(D^3 - D^2 - 6D)y = 0$ denkleminin genel çözümü ?

$\phi(r) = r^3 - r^2 - 6r = 0 \qquad r = 0, \; r = 3, \; r = -2$

$y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x}$

II) $\phi(r) = 0$ ın $r_1 = r_2 = \ldots = r_p = k, \; r_{p+1}, \ldots, r_n$ olsun.

$y = (c_1 + c_2x + \ldots + c_px^{p-1})e^{kx} + c_{p+1}e^{r_{p+1}x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$

III) $\phi(r) = 0$ ın komplex kökleri varsa,

$r_1 = a + ib, \; r_2 = a - ib, \; r_3, \ldots, r_n$ olsun.

$y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} + c_3e^{r_3x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$

$y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx) + c_3e^{r_3x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$

Örnek // $(D^3 - 10D^2 + 25D)y = 0$

$\phi(r) = r^3 - 10r^2 + 25r = 0 \qquad r_1 = 0, \; r_2 = r_3 = 5$

$y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{5x}$ genel çözüm olur.

Örnek // $(D^3 + D^2 + 3D - 5)y = 0$

$\phi(r) = r^3 + r^2 + 3r - 5 = 0 \qquad r_1 = 1, \; r_2 = -1 + 2i, \; r_3 = -1 - 2i$

$y = c_1e^x + e^{-x}(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x)$

## Özel Çözüm Bulunması : $\phi(D)y = Q \Rightarrow y = y_h + y_1$

### I- Operatör Metodu :

a-) $Q = e^{\alpha x}$ olsun. $\alpha$ = sabit.

$y_h$ nin bulunması :

$\phi(D)y = 0$ , $y = e^{rx} \Rightarrow De^{rx} = \frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$

$D^2e^{rx} = D(De^{rx}) = r^2e^{rx}, \ldots\ldots, D^ke^{rx} = r^ke^{rx}$

$\Rightarrow \phi(D)e^{rx} = \phi(r)e^{rx} = 0$ { n. derece polinomun n tane kökü vardır. }

$\Rightarrow e^{rx} \neq 0$ ve $\phi(r) = 0$ olmalıdır.

I) $\phi(r) = 0$ ın kökleri $r_1, r_2, \ldots, r_n$ reel ve farklı olsun.

$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$ homojen kısmın genel çözümüdür.

Örnek// $(D^3 - D^2 - 6D)y = 0$ denkleminin genel çözümü ?

$\phi(r) = r^3 - r^2 - 6r = 0$ $r = 0, r = 3, r = -2$

$y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x}$

II) $\phi(r) = 0$ ın $r_1 = r_2 = \ldots = r_p = k, r_{p+1}, \ldots, r_n$ olsun.

$y = (c_1 + c_2x + \ldots + c_px^{p-1})e^{kx} + c_{p+1}e^{r_{p+1}x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$

III) $\phi(r) = 0$ ın komplex kökleri varsa,

$r_1 = a + ib, r_2 = a - ib, r_3, \ldots, r_n$ olsun.

$y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} + c_3e^{r_3x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$

$y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx) + c_3e^{r_3x} + \ldots + c_ne^{r_nx}$

Örnek// $(D^3 - 10D^2 + 25D)y = 0$

$\phi(r) = r^3 - 10r^2 + 25r = 0$ $r_1 = 0, r_2 = r_3 = 5$

$y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{5x}$ genel çözüm olur.

Örnek// $(D^3 + D^2 + 3D - 5)y = 0$

$\phi(r) = r^3 + r^2 + 3r - 5 = 0$ $r_1 = 1, r_2 = -1 + 2i, r_3 = -1 - 2i$

$y = c_1e^x + e^{-x}(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x)$

## Özel Çözüm Bulunması : $\phi(D)y = Q \Rightarrow y = y_h + y_1$

### I- Operatör Metodu :

a-) $Q = e^{\alpha x}$ olsun. $\alpha$ = sabit.

$De^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$

$D^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\vdots$

$D^k e^{\alpha x} = \alpha^k e^{\alpha x}$

---

$\phi(D) e^{\alpha x} = \phi(\alpha) e^{\alpha x}$

$\phi(D) y = e^{\alpha x}$ (her iki tarafı $\phi(D)$'ye bölersek)

$$y_1 = \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{Q(\alpha)} e^{\alpha x}} \qquad Q(\alpha) \neq 0$$

Örnek // $(D^2 - 4D + 3) y = 8e^{-x}$

$$y_1 = \frac{1}{D^2 - 4D + 3} 8e^{-x} \qquad \alpha = -1$$

$$y_1 = \frac{1}{(-1)^2 - 4(-1) + 3} 8e^{-x} = \frac{1}{8} 8e^{-x} \Rightarrow y_1 = e^{-x}$$

**b-)** $\phi(\alpha) = 0$ ise,

$U = U(x)$ olmak üzere $D(Ue^{\alpha x}) = (DU)e^{\alpha x} + U\alpha e^{\alpha x}$

$\phi(\alpha) \neq 0$, $\phi(D) y = Q$, $Q = e^{\alpha x}$

$\Rightarrow D(Ue^{\alpha x}) = e^{\alpha x}(D + \alpha) U$

$\Rightarrow D^2(Ue^{\alpha x}) = D[D(Ue^{\alpha x})] = D[e^{\alpha x}(D+\alpha)U]$

$= \alpha e^{\alpha x}(D+\alpha)U + e^{\alpha x} D(D+\alpha) U \qquad \phi(D) = y = e^{\alpha x}$

$= e^{\alpha x}(D+\alpha)^2 U$

$\vdots$

$D^k (Ue^{\alpha x}) = e^{\alpha x}(D + \alpha)^k U$

$\Rightarrow \phi(D)(Ue^{\alpha x}) = e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) U$

$$\Rightarrow \phi(D) y = Q \Rightarrow y_1 = \frac{Ue^{\alpha x}}{\phi(D)} \qquad \boxed{y_1 = e^{\alpha x} \frac{1}{Q(1) + \alpha} U}$$

**c-)** $\phi(D) y = Q$ $\quad$ $Q$, k. dereceden x'e göre bir polinom ise;

$$y_1 = \frac{1}{\underbrace{\phi(D)}_{f(D)}} Q \qquad \left(\frac{1}{\phi(D)} \text{ yi Mc laurin'e açalım.}\right)$$

$$y_1 = \left[ f(0) + f'(0) D + \frac{f''(0) D^2}{2!} + \dots \right] Q$$

Şunlardan sık sık yararlanacağız:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad , \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x - x^2 - x^3 - \dots$$

O halde, $\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \dots$

$$\frac{1}{1-\phi(D)} = 1 + \phi(D) + [\phi(D)]^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1+\phi(D)} = 1 - \phi(D) + [\phi(D)]^2 - \dots$$

$Dy = Q \Rightarrow y = \frac{1}{D} Q$ integral alınacak.

Örnek // $(D^2 - 4D + 3) y = 6x - 11 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{D^2 - 4D + 3} (6x - 11)$

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 3} = \frac{1}{3 \left[ 1 + \underbrace{\frac{D^2 - 4D}{3}}_{\phi(D)} \right]} = \frac{1}{3} \left[ 1 - \left( \frac{D^2 - 4D}{3} \right) + \left( \frac{D^2 - 4D}{3} \right)^2 - \dots \right] \text{ veya}$$

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 3} = \frac{1}{(D-1)(D-3)} = \frac{1}{(-1)(-3)(1-D)(1-\frac{D}{3})} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-D} \frac{1}{1-\frac{D}{3}}$$

$$y_1 = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{D^2 - 4D}{3} + \dots \right] (6x - 11) \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3} \left[ 6x - 11 - \frac{1}{3}(-4 \cdot 6) \right]$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3} [6x - 11 + 8] \Rightarrow y_1 = 2x - 1 \quad //$$

Örnek // $(D^3 + D^2) y = e^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Önce homojen kısmın genel çözümünü bulalım.

$(D^3 + D^2) y = 0 \Rightarrow y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$

$r^3 + r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$ ve $r_3 = -1$

$y_1 = \frac{1}{D^3 + D^2} e^{-x}$ , $\phi(D) = D^3 + D^2$, $\alpha = -1$ , $\phi(-1) = 0$

$$y_1 = e^{-x} \frac{1}{(D-1)^3 + (D-1)^2} \cdot 1 = e^{-x} \frac{1}{D(D-1)^2} \cdot 1$$

$$y_1 = e^{-x} \frac{1}{D} \frac{1}{1-D} \frac{1}{1-D} \cdot 1 \Rightarrow y_1 = e^{-x} \frac{1}{D} (1 + D + \dots)(1 + D + \dots) \cdot 1$$

$$y_1 = e^{-x} \frac{1}{D} (1 + 0 + \dots)(1 + 0 + \dots) \Rightarrow y_1 = e^{-x} \frac{1}{D} \cdot 1 = e^{-x} \cdot x$$

$$y_1 = x e^{-x} \Rightarrow y = y_h + y_1 \Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + x e^{-x} \quad //$$