ÖLÇÜM KURAMI

Babamın Anısına ...

Ve Aileme ...

Erhan GÜLER

Ölçülebilir Fonksiyonlar

1. TANIM: Bir X kümesi verilsin. Alt kümelerinin ailesi de S olsun. Ve bu S ailesi aşağıdaki koşulları sağlasın:

i- $X, \phi \in S$.

ii- Eğer, $A \in S$ ise $\complement_X A \in S$.

iii- Eğer, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ S de bir kümeler dizisi ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Bu S ailesine bir σ-cebiri (sigma-cebiri) denir. (veya σ-halkası da denir.) (X, S) ikilisine de, ölçülebilir uzay denir.

S bir σ-cebiri, (X,S) bir ölçülebilir uzay ise; S'nin herbir elemanına ölçülebilir küme denir.

$\complement(\bigcup_n A_n) = \bigcap_n \complement A_n \qquad \complement(\bigcap_n A_n) = \bigcup_n \complement A_n$

Bir X kümesi ve alt kümelerinin ailesi S verilsin. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, S'de bir kümeler dizisi olsun. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ midir? Bakalım.

$\forall A_n \in S \Rightarrow \complement_X A_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ için.

$S \ni \bigcup_{n=1}^{\infty} (\complement A_n) = \complement(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \Rightarrow \complement(\complement(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ dir.

1. Örnek // X bir küme, $S = \{X, \phi\}$ ise S bir σ-cebiri midir?

i- $X, \phi \in S$ açıktır.

ii- $\complement X = \phi \in S$, $\complement \phi = X \in S$.

iii- $X \cup \phi = X \in S$.

O halde S bir σ-cebiri, (X,S) de ölçülebilir uzaydır. //

2. Örnek // X bir küme, $P(X)$ kuvvet kümesi, $S = P(X)$ ise S bir σ-cebiri olur mu?

i- $\phi \in S$, $X \in S$ açıktır.

ii- $\forall A \in S$ alalım. $\Rightarrow A \subset X \Rightarrow \complement_X A \subset X \Rightarrow \complement_X A \in P(X) = S$

iii- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \quad \forall A_n \in S \Rightarrow A_n \subset X \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq X$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in P(X) = S$

Bu nedenle $P(X)=S$ bir σ-cebiri (X,S) ölçülebilir uzaydır. //

1. Teorem: S_1 ve S_2 bir X kümesinin alt kümelerinin birer σ-cebiri olsunlar. Bu zaman $S=S_1\cap S_2$ de bir σ-cebiridir.

İspat // i- S_1 bir σ-cebiri $\Rightarrow X\in S_1,\ \phi\in S_1$

S_2 bir σ-cebiri $\Rightarrow X\in S_2,\ \phi\in S_2$

$\Rightarrow \phi\in S_1\cap S_2=S$ ve $X\in S_1\cap S_2=S$

ii- $\forall A\in S=S_1\cap S_2$ alalım. $\Rightarrow A\in S_1$ ve $A\in S_2$.

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \text{ bir } \sigma\text{-cebiri} \Rightarrow C_X A\in S_1 \\ S_2 \text{ bir } \sigma\text{-cebiri} \Rightarrow C_X A\in S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_X A\in S_1\cap S_2=S.$$

iii- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset S$ verilsin. $\Rightarrow (A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset S_1$ ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset S_2$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \text{ bir } \sigma\text{-cebiri} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in S_1 \\ S_2 \text{ bir } \sigma\text{-cebiri} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in S_1\cap S_2=S.$$

Ödev: X bir küme $(S_i)_{i\in I}$, X üzerindeki σ-cebirlerinin bir ailesi olsun. $S=\bigcap_{i\in I} S_i$ ise gösteriniz ki, S bir σ-cebiridir.

2. Teorem: $\mathcal{F}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde, $\mathcal{F}\subset M^*$ olacak şekilde bir en küçük M^*, σ-cebiri vardır.

İspat // Ω ile $\mathcal{F}$ yi kapsayan, X'deki tüm σ-cebirlerinin ailesini alalım.

$\mathcal{F}\subset P(X) \Rightarrow P(X)\in\Omega \Rightarrow \Omega\neq\phi$

$M^*=\bigcap_{M\in\Omega} M$ (ödevden dolayı) M^* bir σ-cebiridir.

$\forall M\in\Omega$ için $\mathcal{F}\subset M$ dir. $\Rightarrow \mathcal{F}\subset\bigcap_{M\in\Omega} M=M^*$ dır. (M^* en küçük olur.)

$\mathcal{F}$'yi kapsayan M'lerin arakesitleri en küçük M^*'ı verir.

2. TANIM: 2. Teoremdeki M^*, σ-cebirine, $\mathcal{F}$ tarafından oluşturulan σ-cebiri denir.

3. TANIM: X bir topolojik uzay olsun. 2. Teoremden dolayı, X'deki tüm açık kümeleri kapsayan bir $\mathcal{B}$ en küçük σ-cebiri vardır.

Buna Borel cebiri ($\mathcal{B}$-cebiri) denir. Yine bir Borel cebirindeki her elemana bir Borel kümesi denir.

Açık ve tümleyeni olan kapalı kümeler, Borel kümesidir.

Örnek // $\mathbb{R}$ üzerindeki (a,b) ailesini ve bunlar tarafından oluşturulan δ-cebirini gözönüne alırsak, bu bir Borel cebiridir. Tüm açık aralıklar bir Borel kümesi ve tüm kapalılar da yine bir Borel kümesidir. Yarı açık kümeler de birer Borel kümesidir. Çünkü; yarı açıklar, bir açık bir de kapalı kümenin kesişimi olarak yazılabilir. Örneğin; $(1,3) \cap [2,4] = [2,3)$.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ genişletilmiş reel sayılar kümesini alalım. Eğer $\mathbb{R}$, herhangi bir Borel kümesi olmak üzere

$E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$

E'ler $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{B}$ Borel cebirini ~~taranak~~ üzere, E, E_1, E_2, E_3 tipindeki kümelerin hepsinin ailesini $\overline{\mathcal{B}}$ ile gösterelim. $\overline{\mathcal{B}}$ de, $\overline{\mathbb{R}}$ üzerinde bir δ-cebiridir. (ödev)

Buna genişletilmiş Borel cebiri denir.

4. TANIM: (X,S) bir ölçülebilir uzay, (Y,τ) bir topolojik uzay ve $f: X \longrightarrow Y$ olsun. Eğer Y'deki her V açık kümesi için $f^{-1}(V)$, X'de ölçülebilir bir küme ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

$$(X,S) \xrightarrow{f} (Y,\tau)$$

f ölçülebilir fonksiyon $\iff \forall V \in \tau$ için $f^{-1}(V) \in S$. 9.10.96 Çarşamba

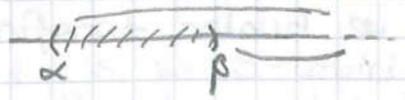
5. TANIM: (X,S) bir ölçülebilir uzay, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun.

Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için; $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in S$ oluyorsa, f'ye S-ölçülebilir (ölçülebilir) fonksiyon denir.

$f(x) \in (\alpha, +\infty)$ aralığında olmalıdır. $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ dur.

ters görüntü

$$\left\{\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \quad H \subset Y \quad f^{-1}(H) = \{x \in X \mid f(x) \in H\} \\ \qquad f^{-1}(\alpha, +\infty) = \{x \in X \mid f(x) \in (\alpha, +\infty)\} \\ \qquad\qquad = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \end{array}\right\}$$



$(\alpha, \beta) = (\alpha, +\infty) - (\beta, +\infty)$

$f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

6.TANIM: $(X, \mathcal{B})$ bir Borel cebiri olsun. Y'de bir topolojik uzay ve $f: X \to Y$ olsun. Eğer Y'deki her V açık kümesi için $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ oluyorsa, f fonksiyonuna Borel ölçülebilir ($\mathcal{B}$ ölçülebilir) fonksiyon denir.

3.Teorem: $f: X \to \mathbb{R}$ verilsin. Aşağıdaki haller denktir:

a- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad A_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in S$

b- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad B_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in S$

c- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad C_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} \in S$

d- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad D_\alpha = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\} \in S$

İspat// A_α ile B_α ve C_α ile D_α birbirlerinin tümleyenidir.

$A_\alpha \in S$ ve S bir σ-cebiri olduğundan, tümleyeni olan $B_\alpha \in S$ dir.

Yani, $\complement A_\alpha = B_\alpha \in S$ dir. $a \Rightarrow b$.

$B_\alpha \in S$ ve S bir σ-cebiri olduğundan, tümleyeni olan $C_\alpha \in S$ dir.

Yani, $\complement B_\alpha = A_\alpha \in S$ dir. $b \Rightarrow a$. Buradan $a \Leftrightarrow b$ olur.

$C_\alpha \in S$ ve S bir σ-cebiri olduğundan, tümleyeni olan $D_\alpha \in S$ dir.

Yani, $\complement C_\alpha = D_\alpha \in S$ dir. $c \Rightarrow d$.

$D_\alpha \in S$ ve S bir σ-cebiri olduğundan, tümleyeni olan $C_\alpha \in S$ dir.

Yani, $\complement D_\alpha = C_\alpha \in S$ dir. $d \Rightarrow c$. Buradan $c \Leftrightarrow d$ olur.

$a \Rightarrow c$ ve $c \Rightarrow a$?

Kabul edelim ki a sağlansın.

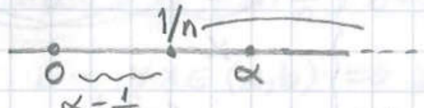
$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $A_\alpha \in S$ dir. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için, $A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in S$ dir.

$\in \mathbb{R} - \in \mathbb{R} \Rightarrow \in \mathbb{R}$

$A_{\alpha-\frac{1}{n}} = \{x\in X \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x\in X \mid f(x) > \alpha-\frac{1}{n}\} = \{x\in X \mid f(x)\geq\alpha\}$ ödev: (eşitliğini göster.)

$= C_\alpha \in S.$



$n\to\infty$, $f(x)\geq\alpha$ dır.

(De Morgan'dan) Kabul edelim ki c sağlansın.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $C_\alpha\in S$ dir.

$C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in S$ olur. $C_{\alpha+\frac{1}{n}} = \{x\in X \mid f(x)\geq \alpha+\frac{1}{n}\}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X \mid f(x)\geq\alpha+\frac{1}{n}\} = \{x\in X \mid f(x)>\alpha\}$

$= A_\alpha \in S.$

$n\to\infty$, $f(x)>\alpha$

Örnek // (X,S) bir ölçülebilir uzay olsun. $f: X\to\mathbb{R}$, $x\to f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ sabit fonksiyonu ölçülebilirdir.

Çözüm // $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\{x\in X \mid \underset{c}{\underset{\parallel}{f(x)}} > \alpha\}\in S \Rightarrow$ ölçülebilirdir.

<u>i. hâl:</u> $\alpha\geq c$ olsun.

$f(x)>\alpha\geq c$

$\{x\in X \mid f(x)>\alpha\} = \emptyset \in S$ dir.

<u>ii. hâl:</u> $\alpha<c \Rightarrow \{x\in X \mid f(x)>\alpha\} = X\in S$

O halde sabit fonksiyon daima ölçülebilirdir. //

7. TANIM: Bir E kümesi verildiğinde, bu <u>E kümesinin karakteristik fonksiyonu</u> χ_E ile gösterilir. Ve

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x\in E \\ 0, & x\notin E \end{cases} \text{ dir.}$$

(X,S) ölçülebilir uzay ve $E\in S$ olsun. $\{$ E, ölçülebilir kümedir S'nin elemanlarına denir. $\}$

χ_E, yine bir ölçülebilir fonksiyondur. Bunu gösterelim.

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\{x\in X \mid \chi_E(x)>\alpha\}\in S$?

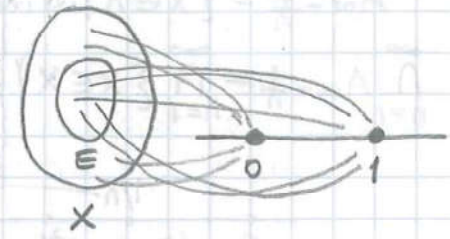
i. hal: Kabul edelim ki $\alpha<0$ olsun.

$\chi_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$

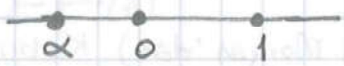
$\{x\in X \mid \chi_E(x) > \alpha\} = X \in S$

ii. hal: $0\leq \alpha < 1$ olsun.

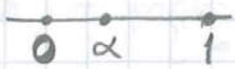
$\{x \in X \mid \chi_E(x) > \alpha\} = E \in S$



i. hal

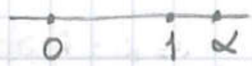


ölçülebilir olmayan kümelerin, karakteristik fonksiyonu da ölçülebilir değildir. Çünkü o zaman S'nin elemanı olamaz.



ii. hal

iii. hal: $\alpha \geq 1$ olsun. $\{x\in X \mid \chi_E(x) > \alpha\} = \phi \in S$



iii. hal

Dolayısıyla χ_E fonksiyonu, $E\in S$ olduğundan ölçülebilir fonksiyondur.

4. Teorem: (X,S) ölçülebilir bir uzay Y ve Z'de iki topolojik uzay, $f: X\longrightarrow Y$ ölçülebilir bir fonksiyon, $g: Y\longrightarrow Z$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, $h = g\circ f$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

10.10.96 / Perşembe

I. Uygulama

1- $\mathbb{N} = X = \{1,2,3,\dots\}$, $S = \{X, \phi, \{1,3,5,\dots\}, \{2,4,6,\dots\}\}$ ise (X,S) nin bir ölçülebilir uzay olduğunu gösteriniz.

Çözüm // i- $X,\phi \in S$ açıktır.

ii- $X - X = \phi \in S$

$X - \phi = X \in S$

$X - \{1,3,5,\dots\} = \{2,4,6,\dots\} \in S.$

$X - \{2,4,6,\dots\} = \{1,3,5,\dots\} \in S.$

iii- $\forall A \in S$, $A\cup\phi = A \in S$ ve $A\cup X = X \in S$ ve

$\{1,3,5,\dots\}\cup\{2,4,6,\dots\} = \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N} = X \in S$

$\Rightarrow$ S bir δ-cebiridir. (X,S) bir ölçülebilir uzaydır.

2- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

a- $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right)$ (ödev)

b- $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$

her n için olamaz.

Çözüm // b- $\forall x \in (a,b) \Rightarrow a < x < b$ dir. $\exists n \in \mathbb{N}$ için,

$a+\frac{1}{n} \leq x \leq b-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow x \in \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$

$\Rightarrow (a,b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$

$\left\{ \begin{array}{l} x<y \\ k+x \leq y \\ \\ 3<5 \\ 3+2 \leq 5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x<y \\ x \leq y+k \\ \\ 3<5 \\ 3 \leq 5-2 \end{array} \right\}$

Tersine ; $\forall y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için,

$y \in \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$ olur.

$\Rightarrow a+\frac{1}{n} \leq y \leq b-\frac{1}{n}$ $\quad \left\{ a < a+\frac{1}{n} \leq y \leq b-\frac{1}{n} < b \right\}$

$\Rightarrow a < y < b \Rightarrow y \in (a,b)$ olur.

Sonuç : S, $\mathbb{R}$ de bir σ-cebiri olsun. (($\mathbb{R}$,S) bir ölçülebilir uzay)

Eğer S, σ-cebiri, $\mathbb{R}$ nin tüm kapalı alt kümelerini kapsıyorsa tüm açık alt kümelerini de kapsar.

Çünkü 2-b den dolayı, açıkları kapalıların birleşimi şeklinde yazabiliriz. (S, tüm kapalıları kapsadığı için)

{ Bu sonuç $\mathbb{R}$ için geçerlidir. $\mathbb{R}$'nin topolojisi, mutlak değer topolojisidir. Başka topolojiler için açık ve kapalı kavramları değişmektedir. }

3- (Y,S) ölçülebilir bir uzay olmak üzere, $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

$T = \{f^{-1}(E) \mid E \in S\}$ ise (X,T) nin ölçülebilir uzay olduğunu gösterin.

{ $f^{-1}(E)$, f'nin tersi değil.
1:1 ve örtenlik yok. örten $\Rightarrow f(X) = Y$ olur.
$f(X) = Y \Rightarrow X \subset f^{-1}(Y)$ dir. }

Çözüm // i- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$, $f^{-1}(Y) = X \in T$

ii- $\forall f^{-1}(E) \in T$ $(E \in S)$

$X - f^{-1}(E) \in T.$ $\left\{ f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \right\}$

$\underbrace{f^{-1}(\underbrace{Y-E}_{\in S})}_{\in T} = f^{-1}(\underbrace{Y}_{X}) - f^{-1}(E) = X - f^{-1}(E) \in T$

iii- $i \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(\overset{\in S}{E_i}) \in T$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) \overset{?}{\in} T$

$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ Sonsuz tane eleman için de doğrudur. Kesişimde ise kapsama vardır.

$\forall x \in f^{-1}(A \cup B)$ için ; $f(x) \in (A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ dir.

$x \in f^{-1}(A) \vee f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B.$

$\Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cup B)$ dir.

O halde $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ olur.

$f^{-1}(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}_{\in S}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i)$ $E_i \in S$ ve S bir δ-cebiri ise

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) \in T$ olur.

Buradan (X,T) nin bir ölçülebilir uzay olduğu görülür.

4- (E,S) ölçülebilir uzay, f'de E üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f ölçülebilir bir fonksiyon ise $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için,

$\{x \in E \mid f(x) = \alpha\} \in S$ dir.

Çözüm // $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\} = \underbrace{\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}}_{\in S} \cap \underbrace{\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}}_{\in S} \in S.$

5- (E,S) bir ölçülebilir uzay, f de E üzerinde tanımlı, reel değerli, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde;

a- $\{x \in E \mid f(x) = +\infty\} \in S$

b- $\{x \in E \mid f(x) = -\infty\} \in S$ (Ödev)

olduğunu gösterin.

Çözüm // a- $A=\{x\in E \mid f(x)=+\infty\}$

$\forall x\in A$ alalım. $f(x)=\infty \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$ için $f(x)>n$

$$x\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \underline{\{x\in E \mid f(x)>n\}}=B \quad , \quad A\subset B$$

Ters kapsamayı gösterelim.

$$\forall x\in B \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \text{ için } f(x)>n \Rightarrow f(x)=\infty \Rightarrow x\in A$$

O halde $B\subset A$ olur.

Her iki kapsamadan $A=B$ bulunur.

6- (X,S) ölçülebilir uzay, $E\notin S$ olsun. Bu taktirde χ_E karakteristik fonksiyonu ölçülebilir değildir, gösteriniz.

Çözüm //
$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

$\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\{x\in X \mid \chi_E(x)>\alpha\}$

i- $\alpha\geq 1 \Rightarrow \{x\in X \mid \chi_E(x)>\alpha\}=\emptyset\in S$. (en fazla 1 olur.)

ii- $0<\alpha<1 \Rightarrow \{x\in X \mid \chi_E(x)>\alpha\}=\underset{\text{(sorudan)}}{E\notin S}$

$\Rightarrow \chi_E$ karakteristik fonksiyonu ölçülebilir değildir.

(iii. özelliğe yani $\alpha<0$ haline bakmaya gerek yoktur.)

7- TANIM: $a,b,c\in\mathbb{R}$ için; bunların orta değerini $mid(a,b,c)$ ile göstereceğiz. Bu taktirde;

$$\boxed{mid(a,b,c)=\operatorname{Inf}\{\operatorname{Sup}\{a,b\},\operatorname{Sup}\{a,c\},\operatorname{Sup}\{b,c\}\}}$$

olduğunu gösterin.

Çözüm // $a<\underline{\underline{b}}<c \Rightarrow mid(a,b,c)=b$ dir.

$3!=6$ şekilde sıralama olur.

Reel sayılarda; $\operatorname{Sup}=\operatorname{Max}$, $\operatorname{Inf}=\operatorname{Min}$.

i- $a<b<c$

ii- $b<c<a$

iii- $c<a<b$

iv- $a<c<b$

v- $b<a<c$

vi- $c<b<a$

$i-$ $mid(a,b,c)=b$ $\quad Inf\begin{Bmatrix} sup(a,b)=b \\ sup(a,c)=c \\ sup(b,c)=c \end{Bmatrix}=b$

$ii-$ $mid(a,b,c)=c$ $\quad Inf\begin{Bmatrix} sup(a,b)=a \\ sup(a,c)=a \\ sup(b,c)=c \end{Bmatrix}=c$

Benzer şekilde diğer şıklar gösterilebilir.

8- (X,S) ölçülebilir uzay, $i=1,2,3$ olmak üzere, $f_i: X \longrightarrow \mathbb{R}$ S-ölçülebilir uzay olsun. Bir g fonksiyonu da, $g(x)=mid(f_1(x),f_2(x),f_3(x))$ olarak verilsin. g'nin S-ölçülebilir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm // Ölçülebilir fonksiyonların sup'u ölçülebilirdir.
Ölçülebilir fonksiyonların Inf'i ölçülebilirdir.

$g(x)=Inf\{sup\{f_1(x),f_2(x)\}, sup\{f_1(x),f_3(x)\}, Sup\{f_2(x),f_3(x)\}$

O halde g, S-ölçülebilir fonksiyondur.

9- (X,S) ölçülebilir uzay, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ S-ölçülebilir fonksiyon olsun. Bir f_A kesik (parçalı) fonksiyonu da,

$$f_A(x)\begin{cases} f(x), & |f(x)|\leq A \\ A, & f(x)>A \\ -A, & f(x)<-A \end{cases}$$

ise, gösteriniz ki f_A, S ölçülebilir fonksiyondur.

Çözüm // $f_1(x)=f(x) \Rightarrow f(x)$ ölçülebilir olduğundan $f_1(x)$ de ölçülebilirdir.

$\left.\begin{matrix} f_2(x)=A \\ f_3(x)=-A \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ sabit fonksiyonları ölçülebilirdir.

$mid(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=g(x)$ ölçülebilirdir. (önceki problemden)

$=f_A(x)$ olduğunu gösterirsek,

$f_A(x)$ ölçülebilir olur.

i- $|f(x)| \leq A$ olsun. $\Rightarrow \underset{\sim}{-A} \leq \underset{\sim}{f(x)} \leq \underset{\sim}{A}$

$$f_3(x) \leq \underbrace{f_1(x)}_{mid} \leq f_2(x)$$

$\Rightarrow g(x) = f(x)$ 'dir.

ii- $f(x) > A \Rightarrow A < f(x) \Rightarrow -A < \underbrace{A}_{mid} < f(x)$ } A pozitif, çünkü; i'de $|f(x)| \leq A$ idi.

$\Rightarrow g(x) = A$ 'dır.

iii- $f(x) < -A$ olsun. $\Rightarrow f(x) < \underbrace{-A}_{mid} < A$

$\Rightarrow g(x) = -A$ 'dır.

Bunların sonucu olarak ;

$$g(x) = mid(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq A \\ A, & f(x) > A \\ -A, & f(x) < -A \end{cases} = f_A(x)$$

$\Rightarrow g$ ölçülebilir olduğundan f_A da ölçülebilirdir.

16.10.96 / Çarşamba

4. Teorem 'in ispatı :

ispat// $(X,S) \xrightarrow{f} (Y,\tau_1) \xrightarrow{g} (Z,\tau_2)$, $g\circ f$

$$g\circ f : X \longrightarrow Z$$
$$x \longrightarrow g\circ f(x) = g(f(x))$$

$\forall V \in \tau_2$ için $(g\circ f)^{-1}(V) \in S$?

$(g\circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ (ters görüntü tanımı)

g sürekli $\Rightarrow \underbrace{g^{-1}(V)}_{açık} \in \tau_1$ (süreklilik tanımı) ($g^{-1}(V) \subset Y$ de açıktır.)

f ölçülebilir $\Rightarrow f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(V)}_{açık}) = (g\circ f)^{-1}(V) \in S$

O halde bileşke fonksiyonu ölçülebilir fonksiyondur.

5. Teorem : U ve V, (X,S) ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı ve reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. ϕ'de $\mathbb{R}^2$ den bir Y topolojik uzayına sürekli bir fonksiyon olsun. Bir h fonksiyonunu

$$h : X \longrightarrow Y,$$
$$x \longrightarrow h(x) = \phi(U(x), V(x))$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde, h fonksiyonu da ölçülebilirdir. (İspatı yapılmayacak)

$U: X \to \mathbb{R}$, $\vartheta: X \to \mathbb{R}$ $\phi: \mathbb{R}^2 \to Y$
$x \to U(x)$ $x \to \vartheta(x)$

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} Y$$
$$x \to f(x) = (U(x), \vartheta(x)) \to \phi(U(x), \vartheta(x))$$
$$h = \phi o f$$

6.Teorem: (X,S) bir ölçülebilir uzay olsun.

a- U ve ϑ, X üzerinde tanımlı, ölçülebilir iki reel değerli fonksiyon olmak üzere, $f = U + i\vartheta$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

b- Eğer $f = U + i\vartheta$ karmaşık değerli, ölçülebilir bir fonksiyon ise, U, ϑ ve $\underbrace{|f|}_{\text{modül}}$ 'de X üzerinde birer ölçülebilir fonksiyondurlar.

c- Eğer f ve g, X üzerinde tanımlı, karmaşık değerli fonksiyonlar ise, $f \mp g$ ve $f.g$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

d- Eğer f, X üzerinde tanımlı karmaşık değerli ölçülebilir bir fonksiyonsa, $|\alpha| = 1$ ve $f = \alpha|f|$ olacak şekilde karmaşık değerli ölçülebilir bir α fonksiyonu vardır.

İspat// a- $X \xrightarrow{k} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$
$$x \to k(x) = (U(x), \vartheta(x)) \to \phi(U(x), \vartheta(x)) = U(x) + i\vartheta(x)$$

$\mathbb{R}^2$ üzerindeki metrik $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere
$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
idi. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = y_1 + iy_2$ olmak üzere $\mathbb{C}$ üzerindeki metriği şöyle tanımlayalım;
$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 + ix_2) - (y_1 + iy_2)|$$
$$= |(x_1 - y_1) + i(x_2 - y_2)|$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
Olur ki, buradan $d(x,y) = d(z_1, z_2)$ olduğu görülür.

O halde $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{C}$ üzerindeki topolojiler aynıdır.
{Her karmaşık sayıya $\mathbb{R}^2$ de bir ikili karşılık geldiğinden.}
$\Rightarrow \phi(U(x), \vartheta(x)) = U(x) + i\vartheta(x)$ süreklidir.

$X \xrightarrow{k} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$ 5. teoremden

$f(x) = (\phi \circ k)(x) = \phi(k(x)) = \phi(u(x), \vartheta(x)) = u(x) + i\vartheta(x)$

$\Rightarrow f = u + i\vartheta$ de ölçülebilirdir.

İspat // b- a şıkkının tersidir. 4. teorem kullanılacak.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = u(x) + i\vartheta(x) & \longrightarrow & g(f(x)) = g(u(x) + i\vartheta(x)) = u(x) \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{g \circ f}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = u(x)$

f ölçülebilir idi.

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$
$z \longrightarrow g(z) = Re\, z$

$\left\{ \begin{array}{l} f = u + i\vartheta \\ \text{4. teoremde ;} \\ g(z) = Re\, z = u \ \text{ alalım.} \end{array} \right\}$

topoloji: (hatırlatma)
$\left\{ \begin{array}{l} (X, d_1) \xrightarrow{f} (Y, d_2) \text{ için ;} \\ f \text{; } x_0 \in X \text{ de sürekli} \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \text{ için } x_n \to x_0 \text{ ise } f(x_n) \to f(x_0). \\ z_n \longrightarrow z \\ (x_n + iy_n) \to (x + iy) \Rightarrow x_n \to x,\ y_n \to y \quad \text{Reel kısım reel'e, sanal kısım sanala yakınsar.} \end{array} \right\}$

f ölçülebilir, g sürekli $\overset{4.\text{teo.}}{\Longrightarrow} (g \circ f) = u$ fonksiyonu ölçülebilirdir. //

Benzer şekilde, $g(z) = Im\, z$ alırsak,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \vartheta(x)$ ölçülebilir fonksiyondur. //

Son olarak, $g(z) = |z|$ alınırsa,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|$ ölçülebilir fonksiyondur. //

$|f(z)| = \sqrt{u(x)^2 + \vartheta(x)^2}$ dir.

İspat // c- 5. teorem kullanılacak.

Kabul edelim ki, f ve g reel değerli fonksiyonlar olsun.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{k} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & k(x) = (f(x), g(x)) & \longrightarrow & \phi(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \end{array}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,t) \longrightarrow \phi(s,t) = s + t \end{array} \quad \begin{array}{l} s_n \to s \\ t_n \to t \end{array} \Big\} \Rightarrow (s_n + t_n) \xrightarrow[\text{sürekli}]{?} (s + t) \right\}$

$(\phi \circ k)(x) = \phi(k(x)) = \phi(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

$\Rightarrow \phi o k = f+g$ 5. teoremden $\phi o k$ ölçülebilir, dolayısıyla $f+g$'de ölçülebilirdir. (Reel değerli fonksiyonlar için ispatladık)

f ve g, karmaşık değerli, ölçülebilir iki fonksiyon olsun.

$f = u + i v$, $g = s + it$ $\{u, v, s, t$ reel değerli fonksiyonlar$\}$

$f+g = (u+s) + i(v+t)$ olur.

Daha önce; f ölçülebilir ise u, v nin ölçülebilir olduğunu (6/b) ve reel değerli iki fonksiyonun toplamının da ölçülebilir olduğunu ispatladık. O halde u, v, s, t ölçülebilir reel değerli fonksiyonlardır.

$$\left.f+g = \underbrace{\overbrace{(u+s)}^{\text{ölç.}}}_{\text{reel değ.}} + i\underbrace{\overbrace{(v+t)}^{\text{ölç.}}}_{\text{reel değ.}}\right\} \Rightarrow \text{karmaşık değerli ölçülebilir fonksiyondur. (6/a'dan)}$$

Şimdi, $f.g$ nin karmaşık değerli ölçülebilir fonksiyon olduğunu görelim.

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \phi(x,y) = xy \quad \text{süreklidir. ?}$$

f ve g reel değerli iki fonksiyon olsun.

$$X \xrightarrow{k} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow k(x) = (f(x), g(x)) \rightarrow \phi(f(x), g(x)) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

$\Rightarrow k o f = f.g$ dur.

5. teoremden dolayı $f.g$ reel değerli fonksiyonu ölçülebilirdir.

f ölçülebilir $\Rightarrow$ 6/b den u, v, s, t ölçülebilirdir.

$$\left.f.g = (u+iv)(s+it) = \underbrace{\overbrace{(us - vt)}^{\text{ölç.}}}_{\text{reel değ.}} + i\underbrace{\overbrace{(ut + vs)}^{\text{ölç.}}}_{\text{reel değ.}}\right\} \text{karmaşık değerli ölçülebilir fonksiyondur. (6/a'dan)}$$

İspat //

17.10.96 Perşembe

d - $E = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ ve $Y = \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$, $z \in Y$

$\forall z \in Y$ olmak üzere bir α fonksiyonunu;

$$\alpha(x) = \varphi(f(x) + \chi_E(x)), \quad x \in X$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \varphi((f + \chi_E)(x) = [\varphi o (f + \chi_E)](x)$$

$\alpha = \varphi o (f + \chi_E)$ olur. Aradığımız α nın bu olduğunu gösterelim.

$E \subset X$, Kabul edelim ki $x \in E$ olsun.

$\Rightarrow \chi_E(x) = 1$ dir. (tanımdan)

$x \in E \Rightarrow f(x) = 0$ dır.

$x \in E$ için, $\alpha(x) = \varphi(\underbrace{f(x)}_{0} + \underbrace{\chi_E(x)}_{1}) = \varphi(1) = \frac{1}{|1|} = 1$

Eğer $x \in E$ ise $\alpha(x) = 1$ $\quad |\alpha(x)| = 1$ dir.

$f = \alpha |f|$? bakalım.

$\{ |f|(x) = |f(x)| \}$ $\qquad f(x) = 0$, $|f|(x) = 0 \Rightarrow 0 = 0$ dır.

Kabul edelim ki $x \notin E$ olsun.

$\Rightarrow \chi_E(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) = \varphi(f(x) + \underbrace{\chi_E(x)}_{0}) = \varphi(f(x))$

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

$\Rightarrow f(x) = \alpha(x)|f(x)|$

$\Rightarrow f = \alpha |f|$

f ölçülebilir olduğundan (4. Alıştırma'dan) $E \in S$ dir.

(7. Tanım sonuna bak) $\Rightarrow \chi_E$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

f ve χ_E ölçülebilir $\Rightarrow f + \chi_E$ de ölçülebilirdir.

$|z| \neq 0$ olduğundan $(z \in Y = \mathbb{C} - \{0\})$ φ sürekli fonksiyondur.

4. teoremden dolayı $\varphi \circ (f + \chi_E) = \alpha$ fonksiyonu ölçülebilirdir. //

7. TANIM: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (genişletilmiş reel sayılar kümesi)

$\overline{\mathbb{R}}$ kümesindeki açık kümeleri; $(a,b), [-\infty, a), (a, +\infty]$ biçimindeki kümeler ve bunların herhangi sayıdasının birleşimi olarak tanımlayalım.

7. Teorem: $\mathcal{M}$, X üzerinde bir σ-cebiri ve Y bir topolojik uzay, $f: X \to Y$ fonksiyon olsun. Bu taktirde; $(Y = [-\infty, +\infty])$

a- $\Omega = \{ E \subset Y \mid \underset{E \in \Omega}{f^{-1}(E)} \in \mathcal{M} \}$ ailesi de bir σ-cebiridir.

b- f ölçülebilir ve E'de Y'de bir Borel kümesi ise, $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ dir c- Eğer $Y=[-\infty,+\infty]$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M}$ ise f ölçülebilirdir.

d- Eğer f ölçülebilir, Z bir topolojik uzay $g: Y \rightarrow Z$ bir Borel fonksiyonu ise ve $h=g\circ f$ ise bu taktirde $h: X \rightarrow Z$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

İspat// a- $f: X \rightarrow Y$ $\quad f^{-1}(Y)=X$ $\quad X \in \mathcal{M}$, $\phi \in \mathcal{M}$ (δ-cebiri tanımı)

$\Rightarrow Y \in \Omega$

$f^{-1}(\phi)=\phi \Rightarrow \phi \in \Omega$

δ-cebiri olması için i. özellik sağlandı.

ii- $\forall A \in \Omega$ alalım $\Rightarrow \complement_Y A \in \Omega$? $\quad (Y-A \in \Omega\ ?)$

$$f^{-1}(Y-A) = \underbrace{f^{-1}(Y)}_{X} - f^{-1}(A) = \underbrace{X - \underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{M}}}_{\in \mathcal{M}}$$

$A \in \Omega \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow Y-A \in \Omega$ $\quad$ ii. özellik sağlanır.

iii- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Ω da bir dizi olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$?

$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$

$\forall n$ için $A_n \in \Omega \Rightarrow \forall n,\ f^{-1}(A_n) \in \mathcal{M}$ dir.

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{M}$ olur. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$ olur. $\Rightarrow (\Omega, Y)$ ölçülebilir uzaydır.

İspat// b- Kabul edelim ki E, Y de bir Borel kümesi olsun.

$f: X \rightarrow Y$ ölçülebilir. $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$?

Kabul edelim ki, $A \subset Y$, Y'deki topolojiye göre herhangi bir açık alt küme olsun.

f ölçülebilir $\Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ $\quad$ $\forall A \in Y$ (Her A açığı için)

$\Rightarrow A \in \Omega$ olur.

$\Rightarrow Y$ deki tüm açık alt kümeler Ω, δ-cebirinin bir elemanıdır.

O halde Y üzerindeki Borel cebiri Ω, δ-cebiri tarafından kapsanır. Yani $\mathcal{B} \subset \Omega$

Borel cebiri $\Rightarrow$ açıkları içinde bulunduran σ-cebiri

Ω da σ-cebiri. (açıkları içinde bulundurur.)

$E \in \mathcal{B} \subset \Omega \Rightarrow E \in \Omega \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ olur.

İspat// c- $Y=[-\infty,+\infty]$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M}$ ise f ölçülebilirdir.

$$f^{-1}((\alpha,+\infty]) = \{x \in X \mid f(x) \in (\alpha,+\infty]\}$$
$$= \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M} \text{ ise } f \text{ ölçülebilir. ?}$$

$Y=[-\infty,+\infty]$ dir.

$$\Omega = \{E \subset [-\infty,+\infty] \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ alalım. $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n < \alpha$, $n \to \infty$ için $\alpha_n \to \alpha$

(α_n sayısı aşağıdan artarak, limit konumunda α'ya yakınsar.)

Her n için, $f^{-1}((\alpha_n,+\infty]) \in \mathcal{M}$ (hipotezden)

$\Rightarrow (\alpha_n,+\infty] \in \Omega$ dır. ($\forall n$ için)

$f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M}$ idi.

$$[-\infty,\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty,\alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[Y \setminus \underbrace{(\alpha_n,+\infty]}_{\in \Omega}}_{\in \Omega} \in \Omega$$

$\forall \alpha,\beta$ alalım. $(\alpha,\beta) = \underbrace{[-\infty,\beta)}_{\in \Omega} \cap \underbrace{(\alpha,+\infty]}_{\in \Omega} \in \Omega$ O halde:

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega = \{E \subset [-\infty,+\infty] \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \\ f: X \to Y = [-\infty,+\infty] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} - f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M} \text{ dir.} \\ - f^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{M} \text{ dir.} \\ - f^{-1}((\alpha,\beta)) \in \mathcal{M} \text{ dir.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ölçülebilirdir. //}$$

30.10.96
Çarşamba

II. Uygulama

1- f ve g, reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki fonksiyonların ölçülebilir olduğunu gösterin.

a) $c.f$ b) f^2 c) $f \mp g$ d) $f.g$ e) $|f|$

Çözüm // a- cf ölçülebilirdir ? $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \{x\in X \mid cf(x)>\alpha\}\in S$?

i- $c=0$ olsun. $\Rightarrow (cf)(x)=c.f(x)=0$

$\Rightarrow cf$ sabit fonksiyondur. (sabit fonk. ölçülebilir idi)

$\Rightarrow cf$ ölçülebilirdir.

ii- $c>0$ olsun. $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \{x\in X \mid cf(x)>\alpha\}\overset{?}{\in} S$?

$=\{x\in X \mid f(x)>\underset{\in\mathbb{R}}{\frac{\alpha}{c}}\}$ ($\frac{\alpha}{c}=\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha'}$ dersek)

$=\{x\in X \mid f(x)>\alpha'\}\in S$ dir.

iii- $c<0$ olsun. $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \{x\in X \mid cf(x)>\alpha\}\in S$?

$=\{x\in X \mid f(x)<\frac{\alpha}{c}\}$ ($\frac{\alpha}{c}=\alpha'\in\mathbb{R}$)

$=\{x\in X \mid f(x)<\alpha'\}\in S$ dir.

O halde cf ölçülebilirdir. //

b- f^2 ölçülebilirdir. ? $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \{x\in X \mid f^2(x)>\alpha\}\in S$?

i- $\alpha<0$ olsun. $\Rightarrow \{x\in X \mid \underset{\geq 0}{f^2(x)}>\underset{<0}{\alpha}\}=X\in S$

$\Rightarrow f^2$ ölçülebilirdir.

$A=\{1,2,3\}$
$f: A\to\mathbb{R}$
$x\to 2x$
$f(x)>1$ tüm A kümesidir.

ii- $\alpha\geq 0$ olsun $\Rightarrow \{x\in X \mid f^2(x)>\alpha\}\overset{?}{\in} S$

$=\underbrace{\{x\in X \mid f(x)>\sqrt{\alpha}\}}_{\in S}\cup\overbrace{\{x\in X \mid f(x)<-\sqrt{\alpha}\}}^{\in S}$

$=\{x\in X \mid f^2(x)>\alpha\}\in S$

$f^2(x)>\alpha \Rightarrow |f(x)|>\sqrt{\alpha}$

$\Rightarrow -\sqrt{\alpha}<f(x)<\sqrt{\alpha}$

$\Rightarrow f^2$ ölçülebilirdir. //

c- $f+g$ ölçülebilirdir. ? $\{x\in X \mid f(x)+g(x)<\alpha\}\in S$? $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

$f(x)+g(x)<\alpha \Rightarrow f(x)<\alpha-g(x)$

$\Rightarrow f(x)<r<\alpha-g(x)$ o.ş $\exists r\in\mathbb{Q}$.

Soyut Matematik Arşimedyan Kuralı: Herhangi iki reel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır.

$\{x\in X \mid f(x)+g(x)<\alpha\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\underbrace{[\{x\in X \mid f(x)<r\}\cap\{x\in X \mid g(x)<\alpha-r\}]}_{S_r}$

$\Rightarrow \{x\in X \mid f(x)+g(x)<\alpha\}\overset{?}{\underset{?}{\supseteq}}\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} S_r$ eşitliğini göstermeliyiz.

$\forall x\in\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} S_r$ alalım.

$\exists r\in\mathbb{Q}$, $x\in S_r$ olduğundan;

$x \in \{x \in X \mid f(x) < r\} \Rightarrow f(x) < r$

$x \in \{x \in X \mid g(x) < \alpha - r\} \Rightarrow g(x) < \alpha - r$
+

$$\Rightarrow f(x)+g(x) < \cancel{r} + \alpha - \cancel{r} = \alpha \Rightarrow f(x)+g(x) < \alpha \quad //$$

Ters kapsama gösterilmiş oldu. Tersine ; kapsamayı gösterelim.

$\forall x \in \{x \in X \mid f(x)+g(x) < \alpha\} \Rightarrow f(x)+g(x) < \alpha$

$\Rightarrow f(x) < \alpha - g(x)$

$\Rightarrow f(x) < r < \alpha - g(x)$ o.ş $\exists r \in \mathbb{Q}$.

$f(x) < r \Rightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) < r\}$

$r < \alpha - g(x) \Rightarrow g(x) < \alpha - r \Rightarrow x \in \{x \in X \mid g(x) < \alpha - r\}$

$\Rightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) < r\} \cap \{x \in X \mid g(x) < \alpha - r\}$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x \in X \mid f(x) < r\} \cap \{x \in X \mid g(x) < \alpha - r\}]$

(X verilen kümelerin arakesitlerinin de elemanıdır. Bu en az bir rasyonel sayı için doğru olduğundan, X ; bunların birleşiminin de elemanı olur.)

Kapsama da gösterilmiş oldu.

$\Rightarrow \{x \in X \mid f(x)+g(x) < \alpha\} \in S$ ve $f+g$ ölçülebilirdir. //

d- $f.g$ ölçülebilirdir. ?

Çözüm // $(f.g)(x) = \frac{1}{4}[(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)]$

$f+g$ ve $f-g$ ölçülebilir, idi. $(f+g)^2$ ve $(f-g)^2$ de ölçülebilir, dolayısıyla bunların farkları; $(f+g)^2 - (f-g)^2$ 'de ölçülebilirdir.

Bir skalerle çarpım da ölçülebilir olduğundan (a, b, c 'yi kullanarak)

$\Rightarrow fg$ ölçülebilirdir. //

e- $|f|$ ölçülebilirdir. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\} \in S$?

Çözüm // i- $\alpha < 0 \Rightarrow \{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\} = X \in S$

ii- $\alpha \geq 0 \Rightarrow \{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\} = \underbrace{\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}}_{\in S} \cup \underbrace{\{x \in X \mid f(x) < -\alpha\}}_{\in S}$

$\Rightarrow \{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\} \in S$ dir. $|f|$ ölçülebilirdir. //