



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKETİNİ İFADE EDEN DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN YÜKSEK DİNAMİK YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ**

HAZIRLAYAN

SERKAN ALTIN

DANIŞMAN

DOÇ. DR. ETİMAD EYVAZOV

BARTIN-2017



T.C.

**BARTIN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKETİNİ İFADE EDEN DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN YÜKSEK DİNAMİK YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN

Serkan ALTIN

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman : Doç. Dr. Etimad EYVAZOV - Bartın Üniversitesi
Üye : Doç. Dr. M. Sabri GÖK - Bartın Üniversitesi
Üye : Yrd. Doç. Dr. Okan ÜNAL - Karabük Üniversitesi

BARTIN-2017

KABUL VE ONAY

Serkan ALTIN tarafından hazırlanan “MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKETİNİ İFADE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YÜKSEK DİNAMİK YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ” başlıklı bu çalışma, 29.12.2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Etimad EYVAZOV (Danışman)

Üye : Doç. Dr. M. Sabri GÖK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Okan ÜNAL

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve 20...../.....-..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. H. Selma ÇELİKİYAY
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Etimad EYVAZOV danışmanlığında hazırlamış olduğum “MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKETİNİ İFADE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YÜKSEK DİNAMİK YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ” başlıklı Yüksek Lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

İmza

29.12.2017

Serkan ALTIN

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması yıllarca süren emeklerin bir ürünü olup, çeşitli insanların işbirliği ve yardımı olmaksızın tezin tamamlanması mümkün değildi. Öncelikle, tez danışmanlığımı üstlenerek araştırma konusunun seçimi ve yürütülmesi sırasında değerli bilimsel uyarı ve önerilerinden yararlandığım saygı değer hocam Doç. Dr. Etimad EYVAZOV'a içtenlikle ve minnetle teşekkür ederim.

Bu tezde jüri üyesi olma nezaketini gösteren, tezin incelenerek hataların düzeltilmesinde değerli vakitlerini harcayan sayın hocalarım Doç. Dr. M. Sabri GÖK'e ve Yrd. Doç. Dr. Okan ÜNAL'a şükranlarımı sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, 6,5 yıldır birlikte çalıştığım, Bartın Üniversitesi, Meslek Yüksekokulu, Gemi İnşaatı Programı öğretim elemanı Öğr. Gör. Sabri ALKAN'a da şükranlarımı sunarım.

Bununla birlikte, kendilerine ayırmam gereken zamanı çalışmalarına ayırmama rağmen, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de saygılarımı ve sevgilerimi sunmayı bir borç biliyorum.

Serkan ALTIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKETİNİ İFADE EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YÜKSEK DİNAMİK YÖNTEMLERİYLE İNCELENMESİ

Serkan ALTIN

Bartın Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Etimad EYVAZOV

Bartın- 2017, sayfa: XV + 89

Bir hareket bilimi olan mekanik; “Vektörel Mekanik” ve “Analitik Mekanik” olarak iki alt başlıkta incelenmektedir. Vektörel Mekanik kuvvet, ivme, momentum vs. gibi vektörel karakterli büyüklüklerle, Analitik Mekanik ise kinetik enerji, potansiyel enerji, iş gibi skaler büyüklükler ile çalışmaktadır.

Bu çalışmada, mekanik sistemlerin incelememesi amacıyla, Vektörel Mekanik ’in makine mühendisliği lisans öğreniminde yansıması olan “Statik” ve “Dinamik” derslerinin ötesine geçilerek, lisansüstü öğrenimindeki “Analitik Mekanik” dersi temel alınmıştır. Çalışmamızda mekanik sistemlerin durumu “Analitik Statik” ve “Analitik Dinamik” başlıkları altından teorik olarak incelenmiş ve uygulamalar bölümünde teorinin uygulamaya nasıl aktarıldığı ortaya konmuştur. Sonuçlar ve öneriler bölümünde ise durağan ve hareketli mekanik sistemlerin çözümlenmesinde, analitik mekanik yöntemlerinin avantajları ortaya konmuş ve endüstriyel uygulamalardaki üstünlükleri açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler

Analitik mekanik; analitik statik; analitik dinamik; virtüel işler prensibi; Lagrange denklemi; genelleşmiş koordinatlar; genelleşmiş kuvvetler.

Bilim Kodu

625.01.02

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

Analysis of Mechanical Systems Action of Differential Equations with High Dynamic Methods

Serkan ALTIN

**Bartın University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mechanical Engineering**

**Thesis Advisor: Assoc. Prof. Etimad EYVAZOV
Bartın-2017, pp: XV + 89**

Mechanics that is an action science is examined under two subheadings are called “Vectorial Mechanics” and “Analytical Mechanics”. Vectorial Mechanics is interested in vector quantities such as force, acceleration and momentum etc. Analytical Mechanics is interested in scalar quantities such as kinetic energy, potential energy and work etc.

In this study, on the purpose of to analyze mechanical systems, went beyond “Static” and “Dynamics” lectures which are lectures department of mechanical engineering. To this end, used Analytical Mechanics Lecture which is lecture on graduate study as base. In our study, the state of mechanical systems is analyzed theoretical under two subheadings are called “Analytical Static” and “Analytical Dynamics”. In the chapter of applications, how the theory is transferred to practice, is introduced. In the chapter of conclusion and recommendations, the advantages of analytical mechanics methods are introduced and are explained in the advantages of industrial applications.

Key Words

Analytic mechanics; analytic statics; analytic dynamics; virtual work method; Lagrange's Equation; generalized coordinates; generalized forces

Science Code

625.01.02

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
BEYANNAME.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLolar DİZİNİ.....	xiv
SİMGELER DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 KURAMSAL TEMELLER	2
2.1 Analitik Statik	2
2.1.1 Bağlantılar (İletişimler)	2
2.1.2 Holonom sistemlerin Virtüel Yer Değiştirmeleri	6
2.1.3 Virtüel İş	10
2.1.4 İdeal Bağlantılar	11
2.1.4.1 Sert Değişmez Sistemlerin Bağlantıları	12
2.1.4.2 Mafsallı Sürtünmesiz Bağlantılar	13
2.1.4.3 Sürtünmesiz Yuvarlanmada Bağlantılar	14
2.1.5 Virtüel Yer Değiştirme Prensibi	14
2.1.6 Genel Koordinatlar	18
2.1.7 Genelleşmiş Kuvvetler	20
2.1.8 Genelleşmiş Koordinatlar Sisteminin Denge Denklemleri	22
2.2 Analitik Dinamik	22
2.2.1 Dinamiğin Genel Denklemi	23
2.2.2 Lagrange'ın 2. Tür Denklemi.....	24
2.2.3 Lagrange'ın 2. Tür Denklemi Yazmak için Gerekli Basamaklar	28
2.2.4 Lagrange'ın 2. Tür Denklemi'nin İdeal Olmayan ve Tutamayan Bağlantılara Uygulanmasının Özellikleri	28

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 3 MATERYAL VE YÖNTEM	30
3.1 Materyal	30
3.2 Yöntem	30
BÖLÜM 4 BULGULAR	31
4.1 Analitik Statik ve Analitik Dinamik İle İlgili Uygulamalar	31
4.1.1 Uygulama 1	31
4.1.2 Uygulama 2	32
4.1.3 Uygulama 3	33
4.1.4 Uygulama 4	35
4.1.5 Uygulama 5	36
4.1.6 Uygulama 6	37
4.1.7 Uygulama 7	39
4.1.8 Uygulama 8	41
4.1.9 Uygulama 9	42
4.1.10 Uygulama 10	46
4.1.11 Uygulama 11	50
4.1.12 Uygulama 12	51
4.1.13 Uygulama 13	52
4.1.14 Uygulama 14	54
4.1.15 Uygulama 15	57
4.1.16 Uygulama 16	59
4.1.17 Uygulama 17	61
4.1.18 Uygulama 18	65
4.1.19 Uygulama 19	68
4.1.20 Uygulama 20	73
4.1.21 Uygulama 21	83
BÖLÜM 5 SONUÇ VE ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR	88

ÖZGEÇMİŞ.....	89
---------------	----

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No	Sayfa No
1. Rijit bir çubukla bağlanan iki maddesel nokta.....	4
2. Esnek bir çubukla bağlanan iki maddesel nokta	4
3. Bağ türleri.....	5
4. Maddesel bir noktayı virtüel yer değiştirmesi.....	7
5. Maddesel noktanın bir yüzey üzerindeki hareketi	9
6. Rijit çubukla bağlanan iki maddesel noktanın virtüel hareketi	12
7. Mafsallı manivela kolu.....	13
8. Kaymadan yuvarlanan dairesel cisme etkiyen kuvvetler	14
9. İdeal ve tutan bağlantılara örnek bir mekanizma	29
10. İdeal ve tutamayan bağlantılara örnek bir mekanizma	29
11. İdeal olmayan tutan bağlantılara örnek bir mekanizma	29
12. Bir ucu pistonlu rijit çubuk	31
13. Buz üzerinde kayan bir adamın temsili.....	32
14. Kaymadan yuvarlanan küre.....	33
15. Matematiksel sarkaç (a) ve virtüel yer değişimi (b).....	35
16. Dairesel yüzeylerin kesişme noktasındaki virtüel yer değiştirme	37
17. Mafsallı manivelanın virtüel yer değişimi	38
18. Krank-biyel-piston mekanizmasının temsili	39
19. Dört bağlantılı mekanizma	41
20. Konsol bir kirişe ait yükleme durumu (a) ve dış kuvvetler (b)	43
21. AE konsol kirişine ait birinci virtüel hareket (c), ikinci virtüel hareket (d) ve üçüncü virtüel hareket (e)	44
22. Farklı yüklemelere sahip mesnetlenmiş çerçeve.....	46
23. M_A - Reaktif momentini için virtüel hareket	47
24. R_{Ax} – tepki kuvveti için virtüel hareket	48
25. R_{Ay} – tepki kuvveti için virtüel hareket	49
26. R_B – tepki kuvveti için virtüel hareket.....	50
27. Bir serbestlik dereceli matematiksel sarkaç	51
28. İki serbestlik dereceli matematiksel sarkaç.....	51
29. Yatay düzlemde bir çark kolu dişli mekanizması	52
30. Yükleme matematiksel sarkaç	54

Şekil	Sayfa
No	No
31. Yükllemeli matematiksel sarkaç için birinci virtüel hareket.....	55
32. Yükllemeli matematiksel sarkaç için ikinci virtüel hareket	56
33. Yükllemeli matematiksel sarkaç için üçüncü virtüel hareket.....	57
34. Pürüzsüz eğik düzlem makara blok düzeneği	58
35. Makara blok düzeneği	60
36. Piston çubuk düzeneği.....	61
37. Gezegen çark kolu mekanizması.....	66
38. Eğik düzlem kasnak düzeneği	69
39. Farklı yükllemeli mesnet-çubuk-parça düzeneği	73
40. Şekil 39'daki düzeneğin serbest cisim diyagramı	73
41. Şekil 39'daki düzeneğin ikiye ayrılmış halinin serbest cisim diyagramı.....	74
42. Şekil 39'daki düzeneğin 1 numaralı virtüel hareketi	76
43. Şekil 39'daki düzeneğin 2 numaralı virtüel hareketi	79
44. Şekil 39'daki düzeneğin 3 numaralı virtüel hareketi	80
45. Şekil 39'daki düzeneğin 4 numaralı virtüel hareketi	82
46. İdeal ve saklayan bağlantılara sahip mekanizma	84
47. Şekil 46'daki düzeneğe ait virtüel hareket	85

TABLULAR DİZİNİ

Tablo	Sayfa
No	No
1.	Uygulama 20'deki sonuçların karşılaştırılması.....83

SİMGELER DİZİNİ

m	:	kütle
x,y,z	:	kartezyen koordinatlar
t	:	zaman
\bar{r}	:	konum vektörü
$\delta\bar{r}$:	hayali(virtüel) yer değiştirme vektörü
$\text{grad } f$:	gradyent fonksiyonu
v	:	hız
F	:	kuvvet
δA	:	virtüel iş
R	:	tepki kuvveti
N	:	normal kuvvet
Φ,ψ,θ	:	Euler açıları
q	:	genel koordinat
Q	:	genelleşmiş kuvvet
a	:	ivme
\bar{F}_i^{ey}	:	eylemsizlik kuvveti vektörü
λ	:	Lagrange çarpanı
T	:	kinetik enerji
g	:	yer çekimi ivmesi
$\bar{\omega}$:	açısal hız vektörü
$\bar{\rho}$:	göreceli konum vektörü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Mekanik, cisimlerin ya da sistemlerin hareketini inceleyen bir bilim dalıdır. Genel olarak kendi içerisinde “Vektörel Mekanik” ve “Analitik Mekanik” olarak iki alt başlıkta incelenmektedir.

Makine Mühendisliği bölümlerinin lisans eğitiminde Vektörel Mekanik, Statik ve Dinamik olarak isimlendirilen dersler ile, Analitik Mekanik ise yüksek lisans ve ya doktora eğitimi esnasında Yüksek Dinamik ya da Analitik Mekanik olarak isimlendirilen dersler ile verilmektedir.

Vektörel Mekanik, bilim insanı Isaac Newton (1642-1727) tarafından ortaya konan kanunları ele aldığı için “Newton Mekaniği” olarak adlandırılmaktadır. Analitik Mekanik ise bilim insanları Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ve William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından geliştirilen yöntemleri ele aldığı için “Lagrange Mekaniği” ve “Hamilton Mekaniği” olarak iki alt başlıkta incelenmektedir.

Bu çalışmada Lagrange Mekaniği ’ni vektörel mekanik uygulamalarında kullanarak, statik ve dinamik sistemlerdeki işlem karmaşasını en aza indirmeyi ve bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının aynı olmadığı belirsizliklerin önünü açmayı amaçlamaktayız.

BÖLÜM 2

KURAMSAL TEMELLER

2.1 Analitik Statik

Dinamiğin genel teoremleri ve ondan doğan sonuçların çoğu maddesel noktalar sisteminin hareketinin araştırılmasına olanak vermektedir. Maddesel noktalar sisteminin hareketini daha kısa bir yoldan elde etmek istediğimizde, hareketin diferansiyel denklemi oluşturulabilmektedir (Eyvazov ve Kuliyeu, 2015).

Fakat dinamiğin genel teoremleri belirli zorluklar içermektedir. Bu zorluklar maddesel sistemin hareketini tam olarak karakterize etmemizi zorunlu kılmaktadır. Karakterize edilen hareket için hangi teoremin uygulanması gerektiği doğru tespit edilmelidir (Eyvazov ve Kuliyeu, 2015).

Ayrıca dinamiğin genel teoremlerinin yardımıyla maddesel sistemin hareketinin diferansiyel denklemini yazdığımızda, sistemin bölümlere ayrılması ve bu sayede denklem sayısının artırılması gerekmektedir. Bazen denklemler içinde bulunması gereken değerler (örneğin reaksiyon kuvvetleri) problemin çözümünü zorlaştırabilmektedir (Eyvazov ve Kuliyeu, 2014).

Analitik mekaniğin genel yöntemleri, ideal bağlantıların (iletişimlerin) reaksiyon kuvvetlerini dâhil etmeden diferansiyel denklemlerin çözümüne fırsat vermektedir. Bu nedenle analitik mekanik yöntemlerinden, teorik ve pratik araştırmalarda ve mühendislik problemlerinin çözümünde etkili ve faydalı bir biçimde yararlanılmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeu, 2014).

2.1.1 Bağlantılar (İletişimler)

Analitik mekaniği doğru bir şekilde anlayabilmek için maddesel cisimler arasındaki bağlantıların yani temas noktalarının doğru anlaşılması gerekir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki tanım verilmiştir:

“Maddesel noktalar sistemine ait noktalar uzayda keyfi bir harekette bulunabiliyorsa ve aynı noktaların hızları keyfi değerler alabiliyorsa, böyle sistemler “serbest sistem” olarak isimlendirilir. Maddesel noktalar sisteminin hareketi ve hızı keyfiyet içermiyorsa böyle sistemler “serbest olmayan sistem” olarak isimlendirilmektedir (Eyvazov, 2016).”

Serbest olmayan sistemler için bazı sınırlamalar bulunmaktadır. Bu sınırlamalar, özellikle sistemin ayrı ayrı noktalarının koordinatları ve hızları ile alakalıdır. Sistemin analizinde önceden bilinmesi gereken bu sınırlamalar “bağlantılar (iletişimler)” olarak isimlendirilir (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003). Sistemleri analiz ederken bu bağlantılar eşitlik ve eşitsizlik denklemleriyle yazılmaktadırlar.

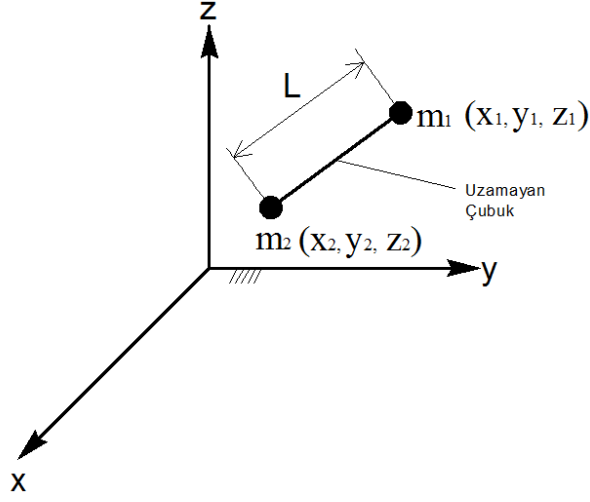
Eşitlikler (denklemler) ile ifade edilen iletişimler (bağlantılar) “tutan bağlantılar”, eşitsizlikle ifade edilen bağlantılar ise “tutamayan bağlantılar” olarak adlandırılır (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Tutan bağlantılarda herhangi bir noktayı ifade eden sınırlar, o noktanın yerleştiği yüzeyleri veya uzay yüzeylerini denklemler ile sağlayabilmedir.

Bağlantıları ifade eden eşitsizlikler t zaman değişkeni içermediğinde böyle bağlantılara “stasyonere bağlantı”, t zaman değişkeni içerdiğinde ise “stasyonere olmayan bağlantı” adı verilir (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Bağlantılar (İletişimler) kavramını daha iyi açıklayabilmek için aşağıdaki bazı örnekler incelenmiştir:

Örnek 1. Şekil 1’de birbiri ile sert, L uzunluklu, çekişsiz ve uzamayan bir çubukla bağlanan iki maddesel nokta verilmiştir.



Şekil 1. Rijit bir çubukla bağlanan iki maddesel nokta (Gürgöze, 2016).

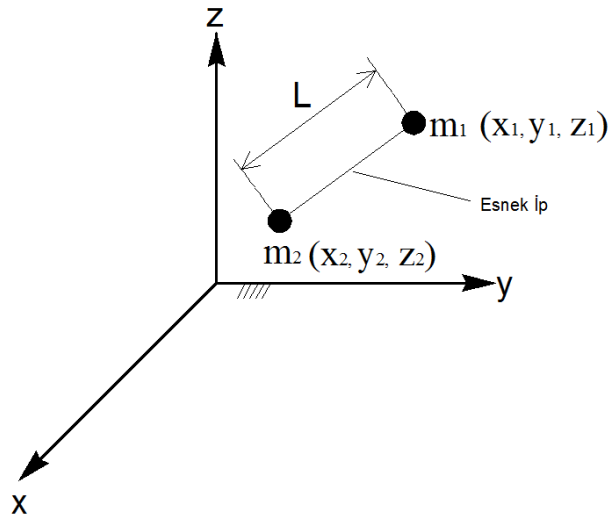
Bağlantılar denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L^2 \quad (1)$$

Burada $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ maddesel noktaların koordinatlarıdır.

Bu örnekteki bağlantı tutan türdendir.

Örnek 2. Şekil 2’de iki maddesel noktanın mutlak, esnek ve çekişiz L uzunluklu bir iple bağlanmıştır.



Şekil 2. Esnek bir çubukla bağlanan iki maddesel nokta (Gürgöze, 2016).

Bu durumda bağlantılar denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leq L^2 \quad (2)$$

Eğer ip çekilmeye çalışılırsa işareti pozitif, aksi halde ise negatif olmaktadır.

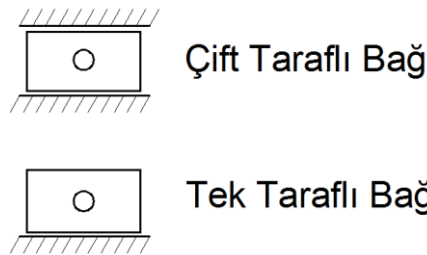
Bu örnekteki bağlantı ise tutamayan türdendir.

Mutlak cisim maddesel noktalar sisteminden oluştuğu için “serbest olmayan” sistemdir. Bunu kanıtlayabilmek için mutlak cismin ayrı ayrı noktaları arasındaki mesafelerin değişmez olduğunu gösteren bağlantı (iletişim) denklemlerini yazabilmemiz gerekmektedir. Böyle olunca bağlantı (iletişim) denklemlerinin sayısı da artmaktadır (Eyvazov, 2016).

En genel halde mutlak bir cismin konumunu, birbirine bağlı olmayan altı parametreyle belirlenebilmektedir. Bu altı parametrenin üçü cismin kutupsal koordinatlardaki konumunu, diğer üç tanesi ise jiroskop hareketindeki Euler açıları olarak seçilebilir. Serbest olmayan mutlak bir cismin bağlantılarını (iletişimlerini) göz önüne aldığımız zaman cismin sadece farklı noktaları arasındaki mesafeleri ortaya koymak amacımıza uygun düşmemektedir. Bu durumda yapmamız gereken tüm cismi sınırlayan bağlantıları (iletişimleri) belirlemektir. Bunun için de serbest olmayan cismin konum parametrelerini içeren denklemler (eşitlikler) ve ya eşitsizlikler yazmak gerekir (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Bağlantılar (iletişimler), Şekil 3’te gösterildiği gibi maddesel noktalar sisteminin hareketine engel olup olmamasına göre ikiye ayrılmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003):

- 1) Çift Taraflı Bağ (Bağlantı, İletişim)
- 2) Tek Taraflı Bağ (Bağlantı, İletişim)



Şekil 3. Bağ türleri (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Yukarıdaki şekilden de anlaşılacağı üzere çift taraflı bağlantıya sahip maddesel bir cismin hareketi hem aşağı hem de yukarı yöne doğru engellenmektedir. Fakat tek taraflı bağlantıya sahip bir cismin hareketi sadece aşağı yöne doğru engellenmektedir.

Genelleşmiş koordinatlar arasında n tane bağ şartı varsa, bu tür sistemlerin bağlarına “holonomdur” denir. Bu tür sistemlere ise “holonom sistemler” adı verilmektedir. Bağ şartlarının içerisinde genelleşmiş koordinatların türevleri varsa integral alma işlemiyle dahi bu türevler yok edilemiyor ise bu tür bağlara “holonom olmayan bağlar”, bu tür sistemlere de “holonom olmayan sistemler” adı verilmektedir (Eyvazov ve KuliyeV, 2003).

Maddesel bir sistemin hem Kartezyen koordinatların yer vektörleri hem de bağ şartları zaman parametresini açık bir şekilde içermiyor ise sistemin bağları zamana bağlı değildir. Bu tür sistemlere “skleronomdur” denir. Eğer Kartezyen koordinatların yer vektörleri ve bağ şartları zaman parametresini açık bir şekilde içeriyor ise sistemin bağları zamana bağlıdır. Bu tür sistemlere de “skleronom olmayan (Rheonom)” denir (Eyvazov, 2016).

2.1.2 Holonom Sistemlerin Virtüel Yer Değişirmeleri

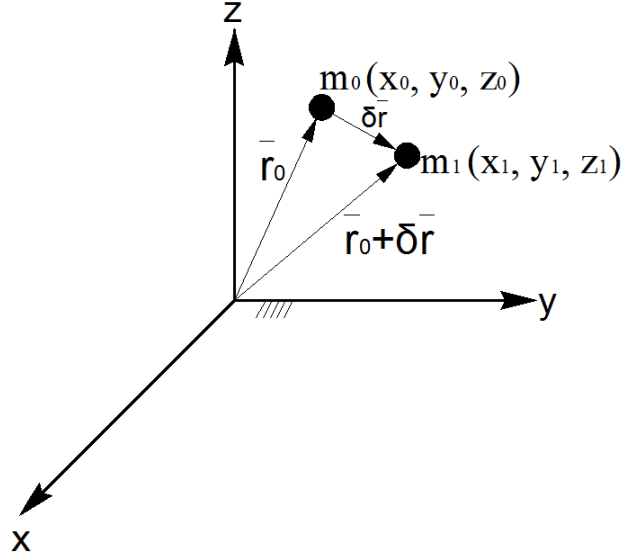
Holonom bir cismin bulunduğu konumdan çok kısa bir zaman önce bulunduğu konumdan bağımsız olmasına ve her an istediği yöne ilerleyebilmesine “virtüel yer değiştirme hareketi” adı verilmektedir (Eyvazov, 2016).

Hareketi sınırlandırılan maddesel bir noktanın yüzeyinin denklemi şu aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (3)$$

Farz edelim ki bir t anında bu maddesel nokta $M_0(x_0, y_0, z_0)$ durumundadır. Bu noktanın durum vektörü \vec{r}_0 vektörü ile belirlenebilir. Bilinen bir Δt zaman aralığında bu cisim, M_0 noktasında itibaren hayali bir $\delta \vec{r}$ yer değişimi almış olsun. Şunun unutulmaması gerekir ki; bu yer değişimi ne maddesel noktaya etki eden bir kuvvet etkisi ile gerçekleşir ne de cisim bu yer değişimini kendi kendine yapabilir. Bu sadece cismin, M_0 konumundan Δt zaman aralığında almış olduğu hayali bir yer değişimidir (Eyvazov, 2016).

Şu da bir gerçektir ki bağlantıları yaralamadan isteğe bağlı ve sonsuz küçük bir $\delta\vec{r}$ yer değişimini uygulamak pek de mümkün olmamaktadır.



Şekil 4. Maddesel bir noktayı virtüel yer değiştirmesi (Gürgöze, 2016).

Cismin $\delta\vec{r}$ yer değiştirmesi aldığı anda geçerli konumu $\vec{r}_0 + \delta\vec{r}$ yer vektörü ile belirlenecektir. Koordinatları x_1, y_1, z_1 olan noktanın yeni durumu aşağıdaki olacaktır:

$$x_1 = x_0 + \delta x, \quad y_1 = y_0 + \delta y, \quad z_1 = z_0 + \delta z \quad (4)$$

Burada $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\vec{r}$ vektörünün izdüşümleridir.

Bu cismin koordinatlarını, (1) denklemini de göz önüne alarak, $\delta x, \delta y, \delta z$ derecesine göre aşağıdaki gibi sıralanmaktadır:

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = f(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \cdot \delta x + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 \cdot \delta y + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 \cdot \delta z \\ + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) \cdot \delta x + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) \cdot \delta y + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right) \cdot \delta z + \dots \quad (5)$$

Burada $f(x_0, y_0, z_0, t) = 0$ olduğundan,

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \cdot \delta x + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 \cdot \delta y + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 \cdot \delta z + \dots \quad (6)$$

Maddesel bir noktanın virtüel yer değişimi öyle küçük bir $\delta\vec{r}$ yer değişmesidir ki, cisim hayali bir t anında, hayali ve sonsuz küçük bir yer değiştirme yapabilmektedir.

(6) denkleminin sağ tarafını sıfıra eşitlersek aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \cdot \delta x + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 \cdot \delta y + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 \cdot \delta z = 0 \quad (7)$$

$\delta\vec{r}$ virtüel yer değiştirmesinin δx , δy , δz iz düşümlerinin birinci türevinin sıfıra eşit olması, bağlantılar denkleminde esas kabul edilmektedir. Bu esas birinci türevin olmadığını göstermektedir.

$$\delta f(x, y, z, t)_{M_0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \cdot \delta x + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 \cdot \delta y + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 \cdot \delta z = 0 \quad (8)$$

(1) numaralı denklemin gradyent (meyil) fonksiyonu M_0 durumunda bilinen t zamanı için aşağıdaki gibi olacaktır:

$$(\text{grad } f)_0 = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \cdot \vec{i} + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 \cdot \vec{j} + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 \cdot \vec{k} \quad (9)$$

(9) denkleminin sol tarafını $(\text{grad } f)_0$ ve $\delta\vec{r}$ vektörlerinin skaler çarpımı olarak yazarsak aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

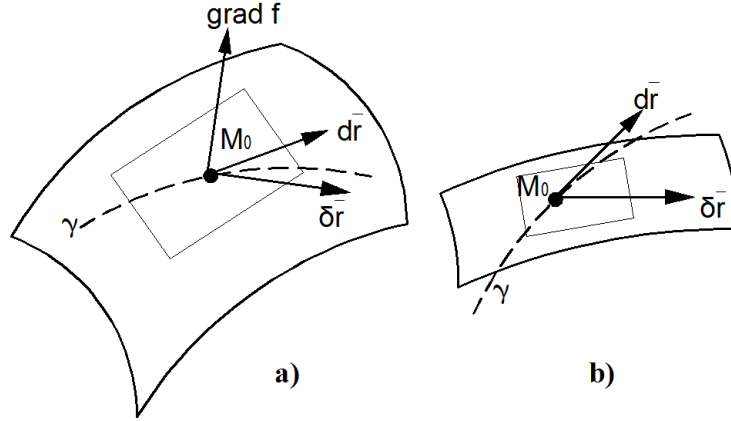
$$(\text{grad } f)_0 \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (10)$$

şimdi de virtüel $\delta\vec{r}$ yer değiştirme vektörünün geometrik anlamını açıklayalım: Bağlantıları denklemi (3) bilinen herhangi bir t zamanında uzayda herhangi bir yüzeyi açıklamaktadır. Gradyent fonksiyonu da (9) M_0 noktasında normal (n) doğrultuda yönelen bir vektördür. (5) denklemi de keyfi $\delta\vec{r}$ yer değiştirme vektörünün yüzeyin normaline dik olduğunu ve bilinen bir t anında M_0 noktasından geçen yüzeyin teğet düzlemine yerleştiğini göstermektedir.

M_0 noktasının gerçek $d\vec{r}$ yer değiştirmesi ise virtüel $f(x, y, z, t) = 0$ yer değişiminden farklıdır. $d\vec{r}$ gerçek yer değiştirme vektörü dt zaman aralığında M_0 noktasına etkiyen

bileşke kuvvetten oluşmaktadır. Bu gerçek yer değiştirme vektörü M_0 noktasının hareket yörüngesinin teğeti üzerine yerleşir ve aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$d\bar{r} = \frac{\bar{v}}{dt} \quad (11)$$



Şekil 5. Maddesel noktanın bir yüzey üzerindeki hareketi (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Maddesel bir noktanın bağlantı denkleminin zamanla değişmemesi durumunda bu tür bağlantılara “stasyonere bağlantı” adı verilir. Stasyonere bağlantı denkleminin aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$f(x, y, z) = 0 \quad (12)$$

Burada bilinmesi gereken M_0 noktası her an hareket yörüngesinin üzerinde yer almaktadır. Teğetsel bir yüzeyde M_0 noktası \bar{v} hızına sahip olur ve her zaman gerçek yer değiştirme vektörü $d\bar{r}$ ile uyumlu bir virtüel yer değiştirme vektörü $\delta\bar{r}$ bulabiliriz. Bunun neticesi olarak aşağıdaki analitik denklem bulunmaktadır.

$$df(x, y, z)_{M_0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 \cdot dx + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 \cdot dy + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 \cdot dz = 0 \quad (13)$$

Bu tür denklemlerde $d\bar{r}$ yer değişim vektörünün izdüşümleri olan dx , dy , dz , yüzeyin denklemini sağlamalıdır.

Sonuç olarak stasyonere bağlantılarda gerçek $d\bar{r}$ yer değiştirme vektörü ile virtüel yer değiştirme vektörü olan $\delta\bar{r}$ birbirleriyle bağdaşmaktadır.

Stasyonel olmayan bağlantılarda ise yüzeyin denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (14)$$

Bu tür bağlantılarda M_0 noktası bilinen t anında hareket yörüngesinde tutunmamaktadır. Yani Herhangi bir dt zaman aralığında M_0 noktasının gerçek yer değiştirmesi yeni bir yüzeye geçecek ve denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$f(x, y, z, t + dt) = 0 \quad (15)$$

Bu durumda gerçek yer değiştirme vektörü olan $d\bar{r}$ ile virtüel yer değiştirme vektörü olan $\delta\bar{r}$ birbiriyle bağdaşmamaktadır.

Bunu ispatlamak için $d\bar{r}$ yer değiştirme vektörünün iz düşümleri olan dx, dy, dz , stasyonel olmayan bağlantılarda aşağıdaki denklemi sağlamalıdır.

$$df(x, y, z, t)_{M_0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 . dx + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 . dy + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 . dz + \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_0 . dt = 0 \quad (16)$$

(16) denkleminde $\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_0 \neq 0$ olacağı için $\delta x=dx, \delta y=dy, \delta z=dz$ şartı (7) denklemi ile bağdaşmamaktadır.

2.1.3 Virtüel İş

Maddesel noktalar sisteminin tamamı herhangi bir t anında herhangi bir keyfi konumdadır. Bu sistemin noktalarına (n tane noktası olduğunu farz edelim) uygulanan kuvvetleri $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ 'dir. Bu sistemin noktalarına bilinen bir t zamanında $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \dots, \delta\bar{r}_n$ yer değiştirmeleri verilmiştir. Sistemin noktalarına uygulanan $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ kuvvetlerinin $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \dots, \delta\bar{r}_n$ yer değiştirmeler boyunca değişmez olduğu da göz ardı edilmemelidir. Bu durumda bu kuvvetlerin $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \dots, \delta\bar{r}_n$ virtüel yer değiştirmelerinde yaptıkları işlerin toplamı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

$$\delta A = \sum_{k=1}^n (\overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k) \quad (17)$$

(17) denklemi maddesel noktalar sistemine etki eden kuvvetlerin virtüel işlerin denklemi olarak isimlendirilmektedir. Virtüel kelimesi Latince *virtualis* kelimesinden gelmekte olup “mümkün” anlamına gelmektedir (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

2.1.4 İdeal Bağlantılar

Maddesel noktalar sisteminin istenilen virtüel bir yer değiştirilmesinde, bütün tepki (reaksiyon) kuvvetlerinin yaptıkları işlerin toplamının sıfır olduğu bağlantılara “ideal bağlantılar” denir (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Maddesel nokta sayısı k olan bir sisteme tatbik edilen bağlantıların tepki kuvvetlerini \overline{R}_k ile gösterelim. Bu durumda bağlantıların yapmış olduğu toplam virtüel iş aşağıdaki gibi olmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

$$\sum_{k=1}^n \overline{R}_k \cdot \delta \overline{r}_k = 0 \quad (18)$$

Sadece bir adet bağlantı denklemi olan $f(x, y, z) = 0$ ve sadece bir adet maddesel nokta için (18) denklemi aşağıdaki gibi basitleşebilir.

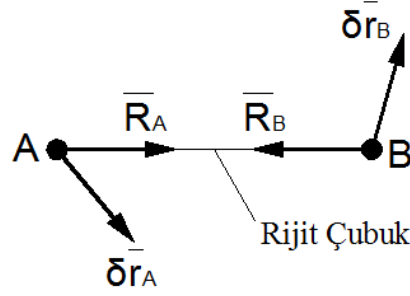
$$\overline{R} \cdot \delta \overline{r} = 0 \quad (19)$$

İdeal bir bağlantının tepki kuvveti olan \overline{R} vektörü, keyfi yer değiştirme vektörü olan $\delta \overline{r}$ 'ye diktir ve denklemi $f(x, y, z) = 0$ olan yüzeyin normali yönünde yönelmektedir. Bu vektörel yerleşim ideal bağlantılarda maddesel noktanın sürtünmesiz yüzey üzerinde hareket ettiğini göstermektedir. Bu sonuç maddesel noktanın bir doğru boyunca hareketi esnasında da ortaya çıkmaktadır.

Bu açıklamalar neticesinde, uygulamada en fazla kullanılan ve problemlerde en çok karşılaşılan üç ideal bağlantıyı aşağıda açıklanmaktadır.

2.1.4.1 Sert Değişmez Sistemlerin Bağlantıları

Bu tür bağlantılar sert (rijit), şekil değiştirmeyen cisimlere uygulanmaktadır. Örneğin şekil 6'da iki maddesel noktanın birbiri ile sert, ağırlıksız ve uzamayan bir çubuk ile bağlanmıştır.



Şekil 6. Rijit çubukla bağlanan iki maddesel noktanın virtüel hareketi (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Maddesel noktalara etki eden tepki kuvvetleri çubuğun doğrultusu boyunca yönlenir ve $\overline{R}_B = -\overline{R}_A$ olur. Çubuğun uzamaması şartına göre de aşağıdaki bağlantı denklemi elde edilmektedir.

$$(\overline{r}_A - \overline{r}_B) = \overline{AB}, AB = \text{sabit} \quad (20)$$

Bu bağlantı denkleminin diğer bir varyasyonu aşağıdaki gibi elde edilebilmektedir.

$$(\overline{r}_A - \overline{r}_B) \cdot (\delta \overline{r}_A - \delta \overline{r}_B) = 0 \quad (21)$$

Burada $(\overline{r}_A - \overline{r}_B)$ ve $(\delta \overline{r}_A - \delta \overline{r}_B)$ vektörleri birbirlerine olmaktadır.

Bu sistemdeki noktaların yapmış oldukları virtüel yer değiştirmelerde tepki kuvvetlerinin yapmış oldukları işlerin toplamı aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\overline{R}_A \cdot \delta \overline{r}_A + \overline{R}_B \cdot \delta \overline{r}_B = \overline{R}_A \cdot \delta \overline{r}_A - \overline{R}_A \cdot \delta \overline{r}_B = \overline{R}_A \cdot (\delta \overline{r}_A - \delta \overline{r}_B) = 0 \quad (22)$$

\bar{R}_A vektörü $(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ vektörü ile bağdaşmakta fakat $\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B$ vektörü ile birbirlerine dik olmaktadır. Bu da (22) denklemindeki sonucu çarpımın sıfıra eşit olduğunu göstermektedir.

Yukarıdaki açıklamalar bize rijit bir cismin iç bağlantılarının ideal bağlantılar olduğunu ve virtüel işlerin toplamının sıfıra eşit olduğunu göstermektedir. Tabi ki bu sonuç herhangi bir problemde tepki kuvvetlerinin virtüel işlerinin sıfıra eşit olmadığını, başka bir deyişle, tepki kuvvetlerinin de virtüel yer değiştirmelere maruz kalabileceğini göstermektedir.

Şunu da belirtmek gerekir ki, rijit bir cismin noktalarının virtüel yer değiştirmelerinin, bu noktaları birleştiren doğru üzerindeki izdüşümleri birbirine eşit olmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003). Bu durum aşağıdaki denklemlerle gösterebilmektedir.

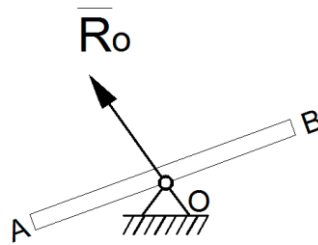
$$\delta\bar{r}_A|_{AB}^{\text{izdüş}} = \delta\bar{r}_B|_{AB}^{\text{izdüş}} \quad (23)$$

$\bar{B}\bar{A} = \bar{r}_A - \bar{r}_B$ ve $\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B$ vektörlerinin ortogonalından faydalanarak aşağıdaki eşitliği de yazabilmektedir.

$$\delta\bar{r}_A - \delta\bar{r}_B|_{AB}^{\text{izdüş}} = 0 \quad (24)$$

2.1.4.2 Mafsallı Sürtünmesiz Bağlantılar

Şekil 7’de manivela kolu hareketsiz duran mafsallı bir noktaya bağlanmıştır.



Şekil 7. Mafsallı manivela kolu (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Sürtünmenin ihmal edildiği düşünülürse \bar{R}_O tepki kuvvetinin virtüel işi aşağıdaki gibi olmaktadır.

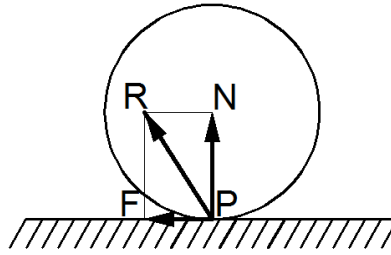
$$\delta A = \overline{R}_O \cdot \delta \overline{r}_O \quad (25)$$

Dikkat edilmesi gereken önemli husus şudur: O noktası hareketsiz olduğundan virtüel yer değiştirme olmamaktadır ve $\delta \overline{r}_O = 0$ olur. Neticede virtüel yer değiştirmenin sifıra eşit olduğu bir durumda virtüel iş de beklenemez ve $\delta A = 0$ olmaktadır (Eyvazov ve Kuliye, 2003).

Yukarıdaki açıklamalar bize sürtünmesiz mafsalların ideal bağlantılar olduğunu göstermektedir.

2.1.4.3 Sürtünmesiz Yuvarlanmada Bağlantılar

Şekil 8’de rijit sert bir yüzey üzerinde rijit bir cismin kaymadan yuvarlanmaktadır.



Şekil 8. Kaymadan yuvarlanan dairesel cisme etkiyen kuvvetler (Eyvazov ve Kuliye, 2003).

Hem yüzey hem de cisim rijit olduğundan yuvarlanma sürtünmesi sifıra eşit olmaktadır. P noktasının pürüzlü bir yüzeyde $\delta \overline{r}_P$ virtüel yer değiştirmesi sifıra eşit olmaktadır. Buradan da aşağıdaki sonucu elde edilmektedir.

$$\delta A = \overline{R}_P \cdot \delta \overline{r}_P = 0 \quad (26)$$

2.1.5 Virtüel Yer Değiştirme Prensibi

Maddesel noktalar sisteminin denge şartlarını göz önünde bulundurduğumuzda, bir sisteme bileşke bir kuvvet etki ettiğinde ve bu etki neticesinde sistemin durağan halinin bozulması söz konusu oluyorsa, burada sistemin dengesinden söz edilmemektedir. Eğer bir sisteme uygulanan bütün kuvvetlerin yaptıkları işlerin toplamı sifır oluyorsa ancak o zaman bu

sistem dengede kalabilmektedir. Bu, sistemin durağan halde olduğu anlamına gelmemektedir, aksine sistem kuvvet etkisi altında dengede kalarak düzgün doğrusal bir hareket de yapabilmektedir.

Maddesel noktalar sistemi hareket halinde de denge şartlarını sağlayabildiğine göre bu hareketin başlangıcında “sistemin hızının sifira eşit olması” da diğer bir denge şartı olarak karşımıza çıkmaktadır. Tabi burada anlatılanlara ilaveten, atalet kanununu da denge şartı olarak göz ardı etmememiz gerekmektedir.

Yukarıda bahsedilen maddesel noktalar sisteminin denge şartları ile ilgili açıklamalar şöyle özetlenebilir: “Maddesel noktalar sisteminin dengede olması için sistemin her bir noktasına uygulanan kuvvetlerin yaptıkları işlerin toplamının ve bu noktaların başlangıç hızlarının sifira eşi olması, gerekli ve yeterli şart olmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeu, 2003).”

Bir maddesel noktalar sisteminin k adet noktadan oluştuğunda, bu noktalara uygulanan aktif kuvvetleri \overline{F}_k , bağlantılardaki tepki kuvvetlerini de \overline{R}_k ve noktaların başlangıç hızlarını da \overline{v}_k ile gösterilmektedir. Bu durumda denge şartı matematiksel olarak ifade edilecek olursa aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k = 0, \quad \overline{v}_k = 0 \quad k = 1,2,3, \dots \dots n \quad (27)$$

(27) denkleminde yer alan bağlantıların tepki kuvvetleri çoğunlukla uygulamalarda aranan çözümün bulunmasını zorlaştırmaktadır.

Yukarıda yaptığımız denge şartları ile ilgili çıkarım aslında 1788’de Lagrange tarafından “virtüel yer değiştirme prensibi olarak” olarak genelleştirilmiştir.

Lagrange’ın teoremine göre “Maddesel noktalar sisteminin ve o sisteme uygun olan ideal, stasyonere ve holonom bağlantıların dengede olabilmesi için, sistemin keyfi virtüel yer değişmelerinde, sisteme ait tüm aktif kuvvetlerin ve tüm maddesel noktaların başlangıç hızlarının sifira eşit olması gerekli ve yeterli şart olmaktadır (Ginsberg, 1988).”

$$\sum_{k=1}^n (\overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k) = 0 \quad \overline{v}_k = 0 \quad k = 1,2,3, \dots \dots n \quad (28)$$

Lagrange'ın teoreminden yola çıkarak gerekli ve yeterli şartları biraz açılması yerinde olacaktır.

(28) denkleminde bir sistemin denge şartları özetlenmektedir. Demek ki bir sistem dengede kalabilmesi için bu şartları sağlamalıdır. Buradaki sisteme, sistemdeki nokta sayısı kadar yani n adet virtüel yer değiştirme, $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \dots, \delta\bar{r}_n$, verdiğinde. (28) denklemindeki denklemlerin her birini $\delta\bar{r}_k$ ile çarpıp toplayacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde edilmektedir.

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta\bar{r}_k = 0 \quad (29)$$

Ve ya

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k) + \sum_{k=1}^n (\bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k) = 0 \quad (30)$$

Bağlantıların ideal olduğunu düşündüğümüzden bağlantılardaki tepki kuvvetleri iş yapmayacaktır. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k) = 0 \quad (31)$$

Buradan, Lagrange'ın virtüel yer değiştirme teoreminin sağlanması için bağlantılardaki tepki kuvvetlerinin toplam virtüel işlerinin sıfıra eşit olmasının “gerekli şart” olduğunun sonucu açıkça görülebilmektedir.

Maddesel noktalar sisteminin dengede kalması, sistemin durağan olarak kalmasını zorunlu kılmıyordu. Bu bağlamda kinetik enerji teoreminden yararlanılabilmektedir. Virtüel yer değiştirme teoremine göre tüm bağlantılar stasyonerdır. Bu nedenle herhangi bir dt zamanında gerçek yer değiştirmeler, virtüel yer değiştirmeler ile bağdaşacaktır (Eyvazov ve Kuliyeve, 2003).

Kinetik enerjinin değişmesi hakkındaki teoreme göre bu yer değiştirmelerde tüm aktif ve tepki kuvvetlerinin yaptıkları işler pozitifdir. Bu da sistem durağan halden hareketli hale

geçtiğinde pozitif enerjinin arttığını bize göstermektedir. Neticede aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmektedir.

$$\sum_{k=1}^n (\overline{F}_k + \overline{R}_k) \cdot \delta \overline{r}_k > 0 \quad (31)$$

Ve ya

$$\sum_{k=1}^n (\overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k) + \sum_{k=1}^n (\overline{R}_k \cdot \delta \overline{r}_k) > 0 \quad (32)$$

Virtüel yer değiştirme teoremine göre bağlantıların ideal olduğunu ve yukarıdaki eşitsizlikte ikinci toplananın sıfıra eşit olduğu bilinmektedir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliğin elde edilmesi kaçınılmazdır.

$$\sum_{k=1}^n (\overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k) > 0 \quad (34)$$

(34) eşitsizliğinin (27) denklemindeki şartlarla uyumsuz olması, virtüel yer değiştirme teoreminin sağlanması için sistemin durağan ya da hareketli olması, gerekli şart değil sadece “yeterli bir şart” olduğunu göstermektedir.

Virtüel yer değiştirme prensibi birçok alandaki problemlere uygulandığı için, bu prensibin farklı alanlara uyarlanmasıyla ilgili bazı genel tavsiyelerde bulunmak yerinde olacaktır:

- 1) Eğer maddesel noktalar sisteminde ideal olmayan bağlantılar varsa, böyle bağlantıların tepki kuvvetlerini aktif kuvvetler gibi değerlendirmek yerinde olacaktır.
- 2) Eğer maddesel noktalar sistemindeki ideal bir bağlantının tepki kuvvetini bulunması gerekirse, bu bağlantıyı sistemden çıkarıldığı hayal edilir ve tepki kuvveti de aktif bir kuvvet gibi değerlendirilip çözüme ulaşılabilmektedir.
- 3) Bazı hallerde virtüel $\delta \overline{r}_k$ yer değiştirmesi yerine $\delta \overline{r}_k$ ile uyumlu olan bir virtüel hız ifadesi \overline{v}_k^* kullanılması gerekebilir. Neticede aşağıdaki gibi denklem elde edilmektedir.

$$\delta \bar{r}_k = k_0 \cdot \bar{v}_k^* \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\delta f_i}{\delta x_k} \right)_0 \cdot \delta x_k + \left(\frac{\delta f_i}{\delta y_k} \right)_0 \cdot \delta y_k + \left(\frac{\delta f_i}{\delta z_k} \right)_0 \cdot \delta z_k \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, h \quad (36)$$

(36) denkleminde $\delta \bar{r}_k$ vektörünün izdüşümleri olan $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ ifadeleri yerine \bar{v}_k^* vektörünün iz düşüm ifadeleri olan $\dot{x}_k^*, \dot{y}_k^*, \dot{z}_k^*$ ifadelerini koyduğumuzda aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\delta f_i}{\delta \dot{x}_k^*} \right)_0 \cdot \delta \dot{x}_k^* + \left(\frac{\delta f_i}{\delta \dot{y}_k^*} \right)_0 \cdot \delta \dot{y}_k^* + \left(\frac{\delta f_i}{\delta \dot{z}_k^*} \right)_0 \cdot \delta \dot{z}_k^* \right] = 0 \quad (37)$$

Sonuçta stasyoner bağlantılı bir sistemin hareketi esnasında ortaya çıkan gerçek \bar{v}_k hız vektörü bu sistemin \bar{v}_k^* virtüel hız vektörü ile bağdaşacaktır.

2.1.6 Genel Koordinatlar

Maddesel noktalar sisteminin n tane maddesel noktalardan oluştuğu düşünülün. Oxyz koordinat sisteminde her bir M_k noktasının konumunun x_k, y_k, z_k koordinatlarıyla belirlenecektir. Aynı şekilde tüm noktaların konumu da 3n tane Kartezyen koordinat ile belirlenebilmektedir (Timoshenko, 1979).

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, h) \quad (38)$$

Bu durumda 3n tane x_k, y_k, z_k koordinatları h tane bağlantılar denklemini sağlarsa, bu koordinatlara “bağlı olmayan koordinatlar” adı verilmektedir. Bu bağlamda maddesel noktalar sisteminin konumu belirleyen bağlı olmayan koordinatların sayısı aşındaki gibi bulunabilmektedir.

$$s = 3n - h \quad (39)$$

Sistemin konumunu belirlemek için bağlı olmayan 3n tane Kartezyen koordinatın s tanesini seçtiğimizde ve kalan koordinat sayısını bağlantılar denklemleri sayısı olarak belirlediğimizde bir takım zorluklarla karşılaşmaktadır. Bu nedenle s tane sistemin

konumunu daha belirgin bir biçimde belirleyebilmek için $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ parametrelerinin tercih edilmesi amaca daha uygun olmaktadır. Bu parametrelere “genel koordinatlar” adı verilmektedir. Genel koordinatlar aslında mekanik bir sistemin uzaydaki konumunu belirleyen en genel parametreler toplamıdır (Eyvazov ve Kuliyeu, 2003).

Aslında genel koordinatlar problemlerde kullanılmaktadır. Örneğin matematiksel bir sarkacın düşey konumunu belirleyen $q = \varphi$ açısı, bir noktası sabit mutlak bir cismin konumu belirlemek için kullanılan ve Euler açıları olarak bilinen $q_1 = \varphi, q_2 = \psi, q_3 = \theta$ açıları ve yassı hareket yapan mutlak bir cismin hareketini tayin eden $q_1 = x_c, q_2 = y_c, q_3 = \phi$ parametreleri gibi... Bunlar haricinde genel koordinatlara örnek olarak bir doğrultunun parçalarını, bir yayın uzunluğunu, genel olarak açıları, alanları, hızları vs. verilebilmektedir (Timoshenko, 1979).

Maddesel noktalar sisteminin konumu bağılı olmayan $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ genel koordinatlarıyla belirlenebilmektedir. Bu sistemin konumu sisteme ait her bir noktanın konum vektörü ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Eyvazov ve Kuliyeu, 2003).

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (40)$$

(40) denkleminde maddesel noktalar sistemindeki nokta adedini belirten n tane vektör, aşağıda belirtildiği şekilde $3n$ tane sayısal değere eşdeğer olmaktadır (Eyvazov ve Kuliyeu, 2003).

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (41)$$

(41) denklemindeki değerler (38) denkleminde yerine koyulursa n tane vektörün $3n$ tane sayısal değere dönüştüğü görülecektir.

Eğer maddesel bir sistem holonomikse ve bu sistemin konumunu belirleyen bağılı olmayan koordinatların sayısı s 'ye eşitse, bu sistemdeki virtüel yer değişimini belirleyen bağılı olmayan koordinatların varyasyon sayısı aynı olacaktır. Maddesel noktalar sisteminin konumunu belirleyen bağılı olmayan koordinatların varyasyon sayısına “sistemin serbestlik

derecesi” adı verilmektedir (Ginberg, 1988).

Mekanik bir sistemin hareketi, genel koordinatların zamana bağlı değişimi kullanarak aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir.

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), \dots, q_n = f_n(t) \quad (42)$$

(42) denkleminde verilen sürekli fonksiyonlar genelleşmiş koordinatlarla belirlenen bir hareketin kinematik denklemleridir.

Genel koordinatların zamana göre birinci dereceden türevine de “sistemin genelleşmiş hızları” adı verilir ve aşağıdaki gibi gösterilir (Timoshenko, 1979).

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \dots, \dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt} \quad (43)$$

Şu da bir gerçektir ki; genelleşmiş hızın birimi genelleşmiş koordinatların birimine bağlıdır. Eğer q -doğrusal bir değerse, \dot{q} -doğrusal hız, q - açısı ise \dot{q} -açısal hız, q -alan ise \dot{q} -sektörel hız adını almaktadır.

2.1.7 Genelleşmiş Kuvvetler

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ Şeklindeki kuvvetlere maruz kalan ve n adet maddesel noktadan oluşan bir mekanik sistem göz önüne alındığında, bu sistemin s serbestlik derecesine sahip olduğu ve sistemin konumu $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ genelleşmiş koordinatlarıyla belirlenebilmektedir. Bu mekanik sisteme bir virtüel yer değiştirme verildiğinde, q_1 koordinatı δq_1 artırımını almış olmakta ve diğer koordinatlarda herhangi bir değişiklik meydana gelmemektedir. Bu bağlamda sistemin noktalarının her birinin konum koordinatı olan \bar{r}_k vektöründe, sonsuz küçük bir $\delta \bar{r}_k$ artırımını meydana gelecektir. Burada bahsedilen virtüel yer değiştirmeler zamanın herhangi bir anında meydana gelmektedir. Bu nedenle $(\delta \bar{r}_k)_1$ ifadesini aşağıdaki gibi özel bir diferansiyel ifadeye dönüştürülebilmektedir (Eyvazov ve Kuliyev, 2003).

$$(\delta \bar{r}_k)_1 = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 \quad (44)$$

Bu mekanik sistemin virtüel yer değiştirmelerini hesaplar ve δA ile gösterecek olursak aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\delta A = \bar{F}_1 \cdot (\delta \bar{r}_1) + \bar{F}_2 \cdot (\delta \bar{r}_2) + \dots + \bar{F}_n \cdot (\delta \bar{r}_n) \quad (45)$$

(44) denklemindeki diferansiyel ifade (45) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\delta A = \bar{F}_1 \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 \right) + \bar{F}_2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_2} \cdot \delta q_1 \right) + \dots + \bar{F}_n \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_n} \cdot \delta q_1 \right) \quad (46)$$

(46) denkleminde δq_1 ifadeleri ortak paranteze alınırsa aşağıdaki ‘‘virtüel iş’’ denklemi elde edilmektedir.

$$\delta A_1 = \left(\bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_2} + \dots + \bar{F}_n \cdot \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_n} \right) \cdot \delta q_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 \quad (47)$$

(47) denklemi tüm sistemin noktalarının toplamı için yazılacak olursa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$Q_1 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \quad (48)$$

(48) denklemindeki Q_1 , q_1 koordinatlı ‘‘genelleşmiş kuvvettir.’’

Bu sistemdeki diğer genel koordinatlar için de virtüel yer değiştirmeler verildiğinde (47) ve (48) denklemlerindekine benzer virtüel işler ve genelleşmiş kuvvetler elde edilebilmektedir. Örneğin q_2 genel koordinat içinde virtüel iş ve genelleşmiş kuvvet aşağıdaki eşitliklerdeki gibi elde edilmektedir.

$$\delta A_2 = Q_2 \cdot \delta q_2 \quad (49)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \quad (50)$$

Yukarıdaki çıkarımlardan şu sonuca varılmaktadır: Eğer mekanik bir sistemin tüm genel koordinatlarına virtüel yer değiştirmeler verebilirsek, sisteme uygulanan kuvvetlerin bu virtüel yer değiştirmeler neticesinde yapmış oldukları toplam virtüel iş aşağıdaki gibi genel bir şekilde verilebilmektedir.

$$\sum \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_n \cdot \delta q_n \quad (51)$$

2.1.8 Genelleşmiş Koordinatlar Sisteminin Denge Denklemleri

Virtüel yer değiştirme teoremine göre, mekanik bir sistemin dengede olabilmesi için sisteme uygulanan tüm aktif kuvvetlerin virtüel yer değiştirmelerinin toplamının sıfıra eşit olması gerekmektedir (Hibbeler, 2001).

$$\sum \delta A_k = 0 \quad (52)$$

Genelleşmiş koordinatlar kullanılarak (52) denklemi aşağıdaki şekle dönüşmektedir.

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s = 0 \quad (53)$$

(53) denklemindeki $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_s$ değerleri birbirinden bağımsız olduğu için denklemin sağlanması için genel kuvvet ifadelerinin sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = 0, \dots, Q_s = 0 \quad (54)$$

Buradan şu anlaşılıyor ki; ideal, stasyoner, holonom ve tutan bağlardan oluşan mekanik sistemlerin dengede olabilmesi için, o sisteme ait genelleşmiş kuvvetlerinin sıfıra eşit olması gerekli ve yeterli şarttır.

2.2 Analitik Dinamik

Bir önceki bölümde hareket etmeyen sistemlerin özellikle çözülemeyen statik problemlerinin nasıl çözümlenebileceğine açıklık getirmeye çalıştık. Burada da tutan, ideal ve holonom bağlantılarla sınırlanan ve n tane maddesel noktadan oluşan mekanik bir sistemin hareketi incelenecektir.

2.2.1 Dinamiğin Genel Denklemi

Serbestleştirme prensibine göre bütün bağlantılardaki kuvvetler \bar{F}_i ve \bar{R}_i ile gösterilsin. \bar{F}_i ve \bar{R}_i ile gösterilen bu kuvvetler, bilinen bir M_i noktasının sırasıyla aktif ve reaktif kuvvetlerini simgelemektedir. Neticede Newton'un 2. Kanununu bu M_i için aşağıdaki gibi yazılmaktadır (Tarq, 1975).

$$m_i \cdot \bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i \quad i = 1,2,3, \dots, n \quad (55)$$

(55) denklemi aşağıdaki şekilde de yazılabilmektedir.

$$\bar{F}_i - m_i \cdot \bar{a}_i + \bar{R}_i = 0 \quad i = 1,2,3, \dots, n \quad (56)$$

Sistemin hareket zamanı bir an için durdurulduğunda ve sisteme $\delta\bar{r}_i$ virtüel yer değişikliği verildiğinde (56) denkleminin tüm terimlerini $\delta\bar{r}_i$ vektörü ile skaler olarak çarpılıp, sistemin tüm noktaları için bu çarpımlar toplanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilecektir (Tarq, 1975).

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \cdot \bar{a}_i) \cdot \delta\bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad i = 1,2,3, \dots, n \quad (57)$$

İdeal bağlantılarda tepki kuvvetleri sıfıra eşit olduğu için (57) denklemi aşağıdaki şekle dönüşmektedir.

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \cdot \bar{a}_i) \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad i = 1,2,3, \dots, n \quad (58)$$

(58) denklemi “Dinamiğin Genel Denklemi” olarak isimlendirilmektedir.

Eğer bir sistemin bağlantıları stasyonere ise dinamiğin genel denklemi, virtüel yer değişikliği prensibini ve “D’Alembert Prensibini” temsil edebilmektedir (Pala, 2007).

Dinamiğin genel denklemi analitik olarak aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{ey} \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad i = 1,2,3, \dots, n \quad (59)$$

(59) denkleminde yer alan \bar{F}_i^{ey} ifadesi, $-m_i \cdot \bar{a}_i = \bar{F}_i^{ey}$ olarak eylemsizlik (atalet) kuvvetini temsil etmektedir. Ayrıca (59) denklemini Kartezyen koordinat eksenlerindeki izdüşümleri ile yazacak olursak aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \cdot F_{ix}^{ey}) \delta x_i + \sum_{i=1}^n (F_{iy} \cdot F_{iy}^{ey}) \delta y_i + \sum_{i=1}^n (F_{iz} \cdot F_{iz}^{ey}) \delta z_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (60)$$

2.2.2 Lagrange'ın 2. Tür Denklemi

Serbest olmayan maddesel noktanın diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir (Tarq, 1975).

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (61)$$

(61) denkleminde “Lagrange’ın 1. Tür Denklemi” adı verilmektedir. Burada λ “Lagrange Çarpanıdır” ve aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Pala, 2007).

$$\lambda = \frac{N}{\nabla f} \quad (62)$$

(62) denklemindeki N maddesel nokta sayısı, ∇f (Gradf; Gradyan Fonksiyonu) ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\nabla f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad (63)$$

Genelleşmiş koordinatları $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ olarak belirtilen ve s serbestlik derecesine sahip olan mekanik bir sistemi düşündüğümüzde, bu sisteme etki eden aktif ve reaktif kuvvetlerin yaptıkların virtüel işlerin toplamı aşağıdaki gibi olacaktır (Tarq, 1975).

$$\sum \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3 + \dots + Q_{s-1} \cdot \delta q_{s-1} + Q_s \cdot \delta q_s \quad (64)$$

Yukarıda bahsedilen sistemde atalet(eylemsizlik) kuvvetlerinin genelleşmiş koordinatlara göre yapmış oldukları virtüel işleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\sum \delta A_i^{at} = Q_1^{at} \cdot \delta q_1 + Q_2^{at} \cdot \delta q_2 + Q_3^{at} \cdot \delta q_3 + \dots + Q_{s-1}^{at} \cdot \delta q_{s-1} + Q_s^{at} \cdot \delta q_s \quad (65)$$

(65) denkleminde $Q_1^{at}, Q_2^{at}, Q_3^{at}, \dots, Q_s^{at}$ genelleşmiş atalet kuvvetleridir ve her bir genelleşmiş kuvvet aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Tarq, 1975).

$$Q_1^{at} = \sum \bar{F}_i^{at} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}, Q_2^{at} = \sum \bar{F}_i^{at} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}, \dots, Q_s^{at} = \sum \bar{F}_i^{at} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \quad (66)$$

(66) denklemindeki değerleri dinamiğin genel denkleminde yerlerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilecektir.

$$\sum \delta A_i + \sum \delta A_i^{at} = 0 \quad (67)$$

(67) denklemini daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$(Q_1 + Q_1^{at}) \cdot \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{at}) \cdot \delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^{at}) \cdot \delta q_s = 0 \quad (68)$$

(68) denkleminde yer alan $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_s$ katsayıları birbirine bağlı olmaması nedeniyle, (68) denkleminin sağlanması için aşağıdaki şartın yerine getirilmesi gerekmektedir.

$$Q_1 + Q_1^{at} = 0, Q_2 + Q_2^{at} = 0, \dots, Q_s + Q_s^{at} = 0 \quad (69)$$

(65) ve (67) denklemleri sayesinde dinamik problemlerinin çözümü daha basit hale gelebilmektedir. Dinamik problemlerinin çözümünü daha basit hale getirebilmek için genelleşmiş atalet kuvvetlerini sistemin kinetik enerjisi ile ifade edebiliriz (Tarq, 1975).

Atalet kuvveti, farklı bir ifade şeklinin ilavesiyle, aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\bar{F}_i^{at} = -m_i \cdot \bar{a}_i = -m_i \cdot \frac{d\bar{v}_i}{dt} \quad (70)$$

(66) eşitliğindeki genelleşmiş kuvvet ifadesine (70) ifadesi dâhil edildiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$-Q_1^{at} = \sum m_i \cdot \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \quad (71)$$

Q_1^{at} - genelleşmiş kuvvetini sistemin kinetik enerjisiyle ifade etmek için (71) denkleminin sağ tarafına \bar{v}_i hızını dâhil edersek aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) - \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \quad (72)$$

(72) eşitliğini kontrol etmek için en sağdaki ifadenin diferansiyeli alınmalıdır. Yani bu ifadenin zaman göre tam diferansiyelini ve q_1 genelleşmiş koordinata göre kısmi diferansiyeli alınmalıdır. Bu durumda yer değiştirme kanunu göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilecektir (Pala, 2007).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_1} \quad (73)$$

\bar{r}_i konum vektörünün q_1 genel koordinatına göre kısmi türevi ise aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \lim_{\Delta q_1} \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1} \frac{\frac{d(\Delta \bar{r}_i)}{dt}}{\frac{d(\Delta q_1)}{dt}} = \lim_{\Delta q_1} \frac{\Delta \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right)}{\Delta \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} = \lim_{\Delta q_1} \left(\frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta q_1} \right) = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_1} \quad (74)$$

(74) eşitliğinde elde edilen sonuç (72) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_1} \right) - \bar{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial q_1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial q_1} \quad (75)$$

Bu durumda genelleşmiş atalet kuvveti aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$-Q_1^{at} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \cdot \left(\sum \frac{m_i \cdot \bar{v}_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum \frac{m_i \cdot \bar{v}_i^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \quad (76)$$

(76) denkleminde $T = \sum \frac{m_i \cdot \bar{v}_i^2}{2}$ İfadesi i-nolu maddesel noktasının kinetik enerjisini göstermektedir. (76) eşitliğinde elde edilen sonucu, sistemin tüm noktalarının genelleşmiş kuvvetleri cinsinden yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= Q_3, \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{s-1}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{s-1}} &= Q_{s-1}, \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s
\end{aligned} \tag{77}$$

(77) eşitliği maddesel noktalar sistemini oluşturan tüm noktaların hareketinin genelleşmiş koordinatlarla ifade edilen diferansiyel denklemdir ve “Lagrange’ın 2. Tür Denklemi” adını almaktadır (Tarq, 1975).

Eğer sisteme etki eden kuvvetler potansiyelli kuvvetler ise bu kuvvetler aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, s) \tag{78}$$

(78) eşitliğine uygun olarak Lagrange’ın 2. Tür denklemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, s) \tag{79}$$

Lagrange fonksiyonuna $L = T - \Pi$ eşitliği dâhil edilecek olursa ve $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ olduğu kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilecektir (Tarq, 1975).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, s) \tag{80}$$

(80) eşitliğine “Lagrange’ın 2. Tür Potansiyelli Kuvvetler için Denklemi” adı verilmektedir (Tarq, 1975).

2.2.3 Lagrange'ın 2. Tür Denklemi Yazmak İçin Gerekli Basamaklar

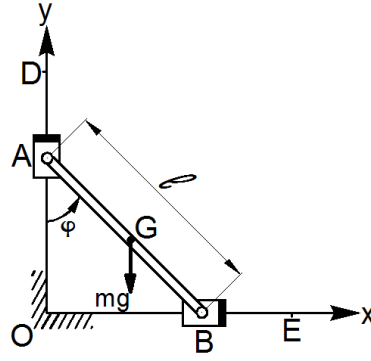
Lagrange'ın 2. Tür denklemlerini uygulamaya geçirebilmek için aşağıdaki adımların öncelikle dikkate alınması gerekmektedir (Tarq, 1975):

- 1) Serbest cisim diyagramında tüm aktif kuvvetlerin (verilen kuvvetler, reaktif kuvvetler, sürtünme kuvvetleri vs.) gösterilmesi gerekmektedir. İdeal bağlantılardaki tepki kuvvetlerinin gösterilmesine gerek yoktur.
- 2) Sistemin serbestlik derecesi, genelleşmiş koordinatlarla, belirlenmelidir.
- 3) Sistemin kinetik enerjisi, genelleşmiş koordinatlarla, genelleşmiş hızlar da dâhil edilerek belirlenmelidir.
- 4) Eğer bütün kuvvetler potansiyelli ise sistemin potansiyel enerjisi de belirlenmelidir.
- 5) Sistemin genelleşmiş kuvvetleri belirlenmelidir.
- 6) Tüm bu yapılması gerekenler dikkate alınarak Lagrange denklemi çözülmelidir.

2.2.4 Lagrange'ın 2. Tür Denklemlerinin İdeal Olmayan ve Tutamayan Bağlantılara Uygulanmasının Özellikleri

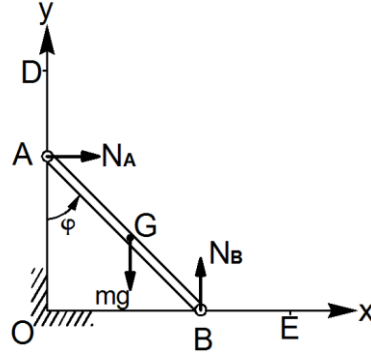
Lagrange yöntemi mekanik sistemlerin çözümlenmesinde çok elverişli bir yöntem olması ile birlikte bazı önemli özellikler de içermektedir. Lagrange denklemleri ideal, tutan ve holonomik sistemler için elde edilmiştir. Bu da şu anlama gelmektedir: Lagrange denklemleri ideal olmayan ve tutamayan sistemler için kullanılamamaktadır. Lagrange denklemleri tutan, ideal bağlantılı sistemleri çözümlenmeye yeterli olsa da, tutamayan ve ideal olmayan bağlantılar için bağlı olmayan genelleşmiş koordinatlar için yazılan denklemler yeterli olmamaktadır. Bu bağlamda Lagrange denklemlerinin uygulanabildiği bağlantı türleri aşağıdaki şekilde üçe ayrılmaktadır (Tarq, 1975).

- 1) İdeal ve tutan bağlantılar: Örneğin şekil 9'da görülen sistemdeki çubuğun uçlarında sürtünmesiz hareket eden pistonlar bağlanmıştır. Bu pistonlar çubuğun uçlarını x ve y eksenleri doğrultusunda tutarlar. Bu tür bağlantılar idealdir ve tepki kuvvetleri ihmal edilirler. Bu nedenle şekil üzerinde tepki kuvvetleri gösterilmemiştir.



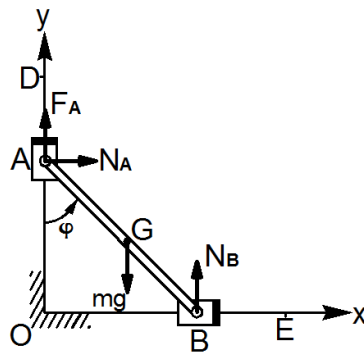
Şekil 9. İdeal ve tutan bağlantılara örnek bir mekanizma (Tarq, 1975).

- 2) İdeal ve tutamayan bağlantılar: Şekil 10'daki çubuğun uçları ise eksenler boyunca sürtünmesiz kaymaktadır. Dolayısıyla çubuk eksenlere bir kuvvet uygulayacak ve neticede tepki kuvvetleri ortaya çıkacaktır (Tarq, 1975).



Şekil 10. İdeal ve tutamayan bağlantılara örnek bir mekanizma (Tarq, 1975).

- 3) İdeal olmayan ve tutan bağlantılar: Şekil 11'deki sistem ideal olmayan bağlantı içerdiği için A pistonunda sürtünme bulunmaktadır ve sürtünme kuvveti F_A ile gösterilmiştir. Sistemin sadeliği adına B pistonundaki sürtünme ihmal edilebilir. Sistem tutan bağlantı içermesi çubuğun uçlarının, görüldüğü gibi, pistonlarla eksenlere bağlanmasını ifade etmektedir (Tarq, 1975).



Şekil 11. İdeal olmayan tutan bağlantılara örnek bir mekanizma (Tarq, 1975).

BÖLÜM 3

MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Materyal

Bu çalışmada, Mekanik bilimine ait bir alt başlık olan Analitik Mekanik kapsamındaki Lagrange Mekaniği yöntemlerinin Vektörel Mekanik ile çözülebilen ya da çözülemeyen sistemlere uygulanabileceği, farklı maddesel sistemler üzerinde gösterilmiştir.

Bu bağlamda Analitik Mekanik ile ilgili yazılmış farklı kitaplardan maddesel sistemler seçilmiş ve o seçilen sistemler üzerinden tezin amacı uygulamaya koyulmuştur.

3.2 Yöntem

Bu çalışmanın amacı doğrultusunda Analitik Mekanik ile ilgili kitaplardan seçilen maddesel sistemlerin bilinmeyenleri hem Vektörel Mekanik yöntemleriyle hem de Lagrange Mekaniği yöntemleriyle, herhangi bir bilgisayar programı kullanılmadan, belirlenmiştir.

Vektörel Mekanik ve Lagrange Mekaniği yöntemleri ile elde edilen çözümler karşılaştırılmış ve çözümler arasındaki benzerlikler ortaya konarak çalışmanın amacına ulaşıldığı gösterilmiştir.

BÖLÜM 4

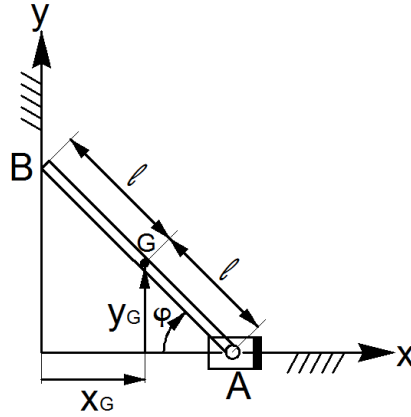
BULGULAR

4.1 Analitik Statik İle İlgili Uygulamalar

Bu bölümde “Analitik Statik” bölümünde açıklanan teorinin, problemler üzerinde uygulamaya nasıl geçirildiğine açıklık getirilecektir.

4.4.1 Uygulama 1

Bir ucu mafsalla A pistonuna bağlı olan ve uzunluğu 2ℓ olan homojen AB çubuğu yatay pozisyonda hareket etmektedir. Çubuğun B ucu ise dikey yönlendirici kızak üzerinde yukarı aşağı hareket etmektedir. Şekil 12’deki çubuğun, hareketini sınırlandıran bağlantıları (iletişimleri) denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır (Butenin vd., 1985).



Şekil 12. Bir ucu pistonlu rijit çubuk (Butenin vd., 1985).

Yatay konumda bulunan A cisminin hareketi üç parametre ile ifade edilmektedir. Bunlar: x_G , y_G , φ ’dir. Yönlendiriciler bu hareketi sınırlandırmaktadır. Çubuğun herhangi bir durumu için aşağıdaki eşitlik ve eşitsizlik sağlanmalıdır.

$$y_G = \ell \cdot \sin\varphi \quad (81)$$

$$x_G^2 + y_G^2 \geq \ell^2 \quad (82)$$

Çubuk B yönlendiricisinde bulunduğunda ise aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır.

$$x_G^2 + y_G^2 = \ell^2 \quad (83)$$

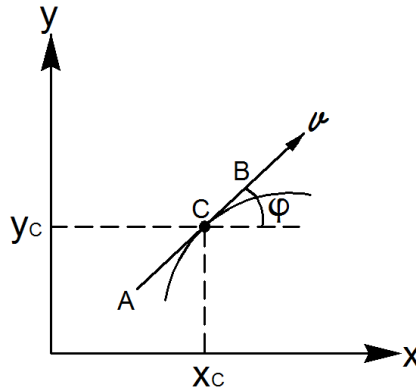
Eğer çubuğun B ucu yönlendiriciden harekete geçerse aşağıdaki eşitsizlik geçerli olacaktır.

$$x_G^2 + y_G^2 > \ell^2 \quad (84)$$

Bu problemdeki bağlardan biri tutan diğeri ise tutamayan türdendir.

4.4.2 Uygulama 2

Buz üzerinde kayan birinin temsili Şekil 13 ile gösterilmiştir.



Şekil 13. Buz üzerinde kayan bir adamın temsili (Butenin vd., 1985).

Buz üzerinde kayan birinin pateni ile buz arasında bir temas noktası bulunmaktadır. Bu temas noktası Şekil 10'da C noktası ile gösterilmektedir. C noktasının hızı tanjant üzere yönelmekte ve patenin konumu x_c , y_c ve φ değişkenleri ile ifade edilmektedir. Bu patenin kaymama şartı aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Butenin vd., 1985).

$$\frac{\dot{y}_c}{\dot{x}_c} = \text{tg}\varphi \quad (85)$$

Ve ya

$$\dot{x}_c \cdot \sin\varphi - \dot{y}_c \cdot \cos\varphi = 0 \quad (86)$$

(86) denklemini daha açık bir biçimde aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{dx_c}{dt} \cdot \sin\varphi - \frac{dy_c}{dt} \cdot \cos\varphi = 0 \quad (87)$$

(87) denkleminin tüm terimlerini dt ile çarpacak olursak aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$dx_c \cdot \sin\varphi - dy_c \cdot \cos\varphi = 0 \quad (88)$$

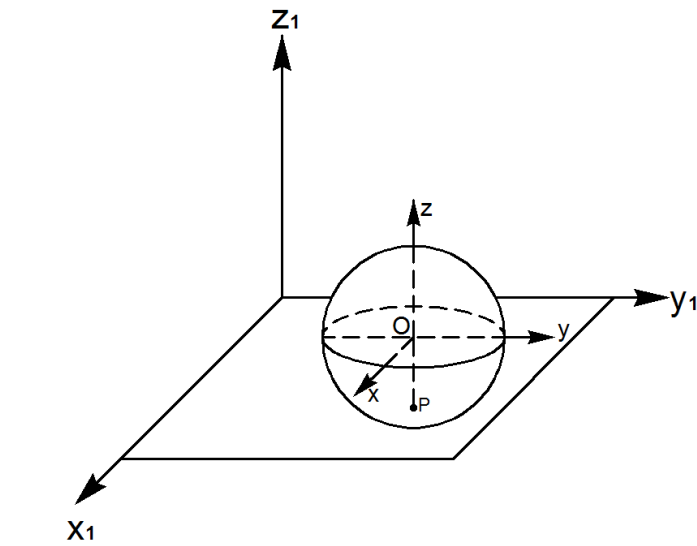
(88) denkleminin integrali alınmamaktadır. Burada denklem koordinat ve onların türevlerinden oluştuğundan bunlar integrali alınamayan diferansiyellerdir ve matematiksel olarak sadece yukarıdaki denklemlerle ifade edilebilmektedir.

4.4.3 Uygulama 3

Şekil 14'deki küre x_1 - y_1 düzlemiyle P noktasında temas halinde iken kaymadan yuvarlanmaktadır. Kürenin hareketiyle ilgili tüm şartları aşağıdaki gibi olacaktır (Butenin vd., 1985).

Öncelikle kürenin O merkezi aşağıdaki şartı sağlaması gerekmektedir.

$$z_1 \geq R \quad (89)$$



Şekil 14. Kaymadan yuvarlanan küre (Butenin vd., 1985).

Burada R kürenin yarıçapı, z_1 ise hareketsiz $Ox_1y_1z_1$ koordinat sistemine göre “aplikat eksen” olarak isimlendirilmektedir ve kürenin bağlantısı tutamayan stasyonier bağlantılara örnektir.

Kürenin Şekil 14’teki gibi kaymadan yuvarlandığı düşünülduğünde kürenin herhangi bir noktasının hızı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{\rho} \quad (90)$$

(90) denkleminde, \bar{v}_o kürenin O merkezinin hızı, $\bar{\omega}$ küre üzerindeki herhangi bir noktanın açısal hızı, $\bar{\rho}$ ise küre üzerindeki herhangi bir noktanın göreceli konum vektörüdür.

Kürenin x_1 - y_1 düzlemiyle temasta olduğu P noktasının hızı ise sıfır olmaktadır. ($\bar{v}_P = 0$) Bu durumda (90) denklemi P noktası için aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_P = 0 \quad (91)$$

(91) denkleminin her iki tarafını, öteleme hareketi yapan x,y,z koordinat eksenleri üzerindeki izdüşümlerine göre düzenlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} v_{ox} + \omega_y z_P - \omega_z y_P &= 0 \\ v_{oy} + \omega_z x_P - \omega_x z_P &= 0 \\ v_{oz} + \omega_x y_P - \omega_y x_P &= 0 \end{aligned} \quad (92)$$

P noktası esas alındığında Şekil 11’e göre $v_{ox} = \dot{x}_1$, $v_{oy} = \dot{y}_1$, $v_{oz} = 0$, $y_P = 0$, $x_P = 0$, $z_P = -R$ olmaktadır.

Euler’in kinematik denklemlerinden faydalanarak açısal hızın izdüşümleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - \dot{\theta} \cdot \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (93)$$

(93) denkleminde, ψ spin (dönme) açısı, φ presesyon açısı ve θ ise nütasyon açısıdır. (93) denklemindeki açısal hızın izdüşümlerini (92) denkleminde yerlerine yazacak olursak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - R(\dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - \dot{\theta} \cdot \sin\varphi) &= 0 \\ \dot{y}_1 - R(\dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad (94)$$

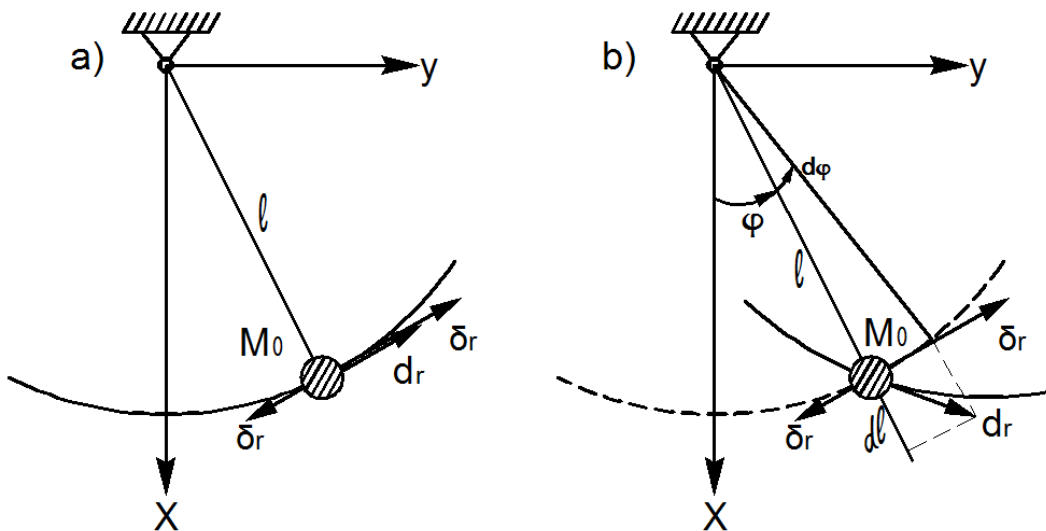
(94) denklem sistemindeki eşitlikleri dt ile çarpacak olursak aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} dx_1 - R(d\psi \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - d\theta \cdot \sin\varphi) &= 0 \\ dy_1 - R(d\psi \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + d\theta \cdot \cos\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

(95) denklem sistemindeki eşitliklerin integrali alınmamaktadır. Kürede kayma olmadığı için de kürenin yüzey ile bağlantısı (95) denklem sistemindeki iki eşitlik ile ifade edilmektedir. Bu tür bağlara daha önce de belirtildiği gibi “holonom olmayan bağlantılar” denir.

4.4.4 Uygulama 4

Bu uygulamada Şekil 15.a'daki Oxy düzlemine yerleştirilen matematiksel sarkacın hareketi incelenmiştir (Ercan, 2014).



Şekil 15. Matematiksel sarkaç (a) ve virtüel yer değişimi (b) (Butenin vd., 1985).

Şekil 15.a'da görülen matematiksel sarkaç ℓ uzunluğunda bir ip ve M_0 maddesel noktasından oluşmaktadır. Burada bağlantılar denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$x^2 + y^2 = \ell^2, \ell = \text{Sabit} \quad (96)$$

(96) Denklemiyle verilen bağlantı basit, stasyoner ve holonomik bir bağlantı türüne örnektir.

Düzlemsel hareket meydana geldiği için yüzeyin denklemi, bağlantılar denklemi ile ifade edilebilir. Bu denklem sayesinde sarkacın ucundaki maddesel noktanın yörünge denklemi elde edilmektedir.

Şekil 15.b'de görüldüğü M_0 noktası saat yönünün tersi yönünde ℓ yarıçaplı bir çember üzerinde ve çemberin teğeti boyunca $\delta\vec{r}$ virtüel yer değiştirmesine maruz kalmaktadır. Gerçekte ise sarkaç ipinin $d\ell$ kadar uzadığı düşünüldüğünde gerçek yer değiştirme de $d\vec{r}$ olacaktır. Bu gerçek, Şekil 15.b'deki yer değişim vektörü, virtüel yer değişim vektörlerinin biriyle, yani ya saat yönündeki ya da tersi yöndeki vektörle, bağdaşacaktır.

Şekil 15'teki matematiksel sarkaç ipinin uzunluğunun zamanla değiştiğini düşündüğünüzde ise bağlantılar denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

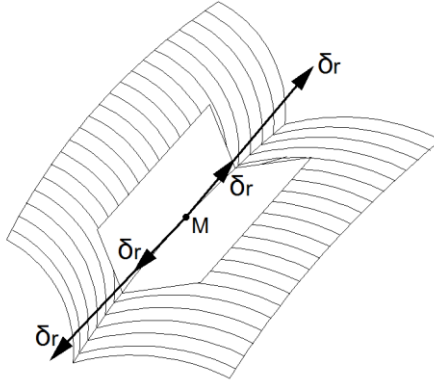
$$x^2 + y^2 = \ell^2(t) \quad (97)$$

(97) ile gösterilen bağlantı, stasyoner olmayan holonom bağlantıdır. Şekil 15.b'de gösterilen M_0 noktasının yörüngesini gösteren kesikli çizgi t zamanı ile belirlenmiştir. $\delta\vec{r}$ virtüel yer değiştirmesi de kesikli çizgiyle gösterilen dairesel yörüngeye teğettir. Sarkacın gerçek yer değiştirmesinde ipin uzunluğu da değişeceği için M_0 noktasının yörüngesi, $d\vec{r}$ vektörünün teğet olduğu tam çizgidir.

4.4.5 Uygulama 5

Şekil 16'da görülen iki dairesel yüzeyin kesişme noktasında bir M noktası bulunmaktadır. Burada M noktası iki bağlantı denklemiyle ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (98)$$



Şekil 16. Dairesel yüzeylerin kesişme noktasındaki virtüel yer değıştirme (Butenin vd., 1985).

M noktasının $\delta\vec{r}$ virtüel yer değıştirmesini belirleyecek olursak, $\delta\vec{r}$ vektörü aşağıdaki iki koşulu sağlaması gerekmektedir.

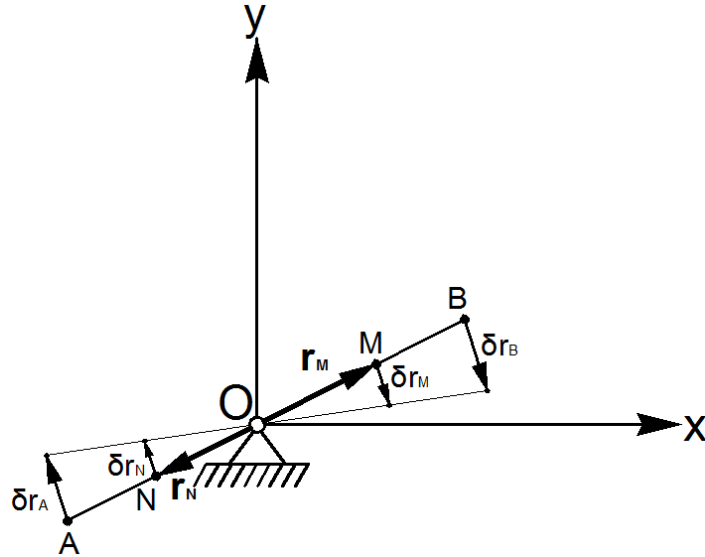
$$\begin{aligned} \text{grad } f_1 \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ \text{grad } f_2 \cdot \delta\vec{r} &= 0 \end{aligned} \quad (99)$$

(99) numara ile gösterilen eşitliklere göre, $\delta\vec{r}$ vektörü iki dairesel yüzeyin kesişimindeki iki teğetsel çizgide yer alacaktır. Birbiriyle çakışan teğetsel çizgideki vektörler de biriyle çakışacak, $f_1=0$ ve $f_2=0$ şartı sağlanacak ve $\delta\vec{r}$ yer değıştirmeleri birbirini yok edecektir.

4.4.6 Uygulama 6

Şekil 17’de O noktasında mafsalla bağlanmış bir manivela görölmektedir. Bu manivelaya verilen virtüel bir yer değıştirme hareketi aşağıdaki gibi incelenecektir (Butenin vd., 1985).

Manivelaya O merkezli olmak üzere ve saat yönünde bir virtüel dönüş hareketi yaptırılınsın. Bu durumda keyfi olarak seçilen M noktası OM yarıçaplı bir çember üzerinde hareket edecektir. M noktasının $\delta\vec{r}_M$ virtüel yer değıştirme vektörü OM yarıçaplı dairesel yörünge nin teğeti doğrultusunda yönelecektir. M noktasının O noktasına göre yerini tayin eden konum vektörü $\vec{r}_M = \overline{OM}$ ise $\delta\vec{r}_M$ vektörüne diktir. ($\vec{r}_M \perp \delta\vec{r}_M$) Bu durum bize manivelanın tüm noktalarının virtüel yer değıştirmelerinin manivelaya dik olduğunu ve bu yer değıştirme vektörlerinin modüllerinin keyfi seçilemeyeceğini göstermektedir.



Şekil 17. Mafsallı manivelanın virtüel yer değişimi (Butenin vd., 1985).

Bağlı olmayan virtüel yer değişirmeyi $\delta \bar{r}_M$ olarak kabul edilirse, Şekil 17'deki N noktasının virtüel yer değişirmesini $\delta \bar{r}_N$ olarak gösterilebilir. Bu durumda N noktası için aşağıdaki eşitlik yazılacaktır.

$$\bar{r}_N = -\frac{ON}{OM} \cdot \bar{r}_M \quad (100)$$

Virtüel yer değişirmeleri göz önüne alındığında (100) denklemini aşağıdaki şekli almaktadır.

$$\delta \bar{r}_N = -\frac{ON}{OM} \cdot \delta \bar{r}_M \quad (101)$$

Şekil 17'deki manivelanın tüm maddesel noktaları düşünüldüğünde sisteme h tane stasyonery olmayan holonomik tutan bağlantı uygulanmaktadır ve bağlantılar denklemini aşağıdaki olmaktadır.

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, h \quad (102)$$

Bu sistemin tüm maddesel noktalarına bilinen bir t anında virtüel yer değişirmeler verildiğinde, bu yer değişirmeler $\delta \bar{r}_1, \delta \bar{r}_2, \dots, \delta \bar{r}_n$ ile gösterilmektedir. Bu virtüel yer değişirmeler ile aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır.

$$\sum \left[\left(\frac{\delta f_i}{\delta x_k} \right)_0 \cdot \delta x_k + \left(\frac{\delta f_i}{\delta y_k} \right)_0 \cdot \delta y_k + \left(\frac{\delta f_i}{\delta z_k} \right)_0 \cdot \delta z_k \right] = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, h \quad (103)$$

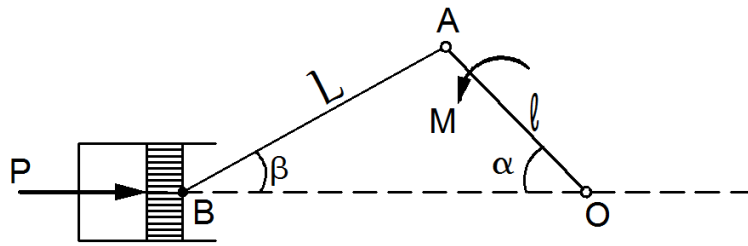
(103) eşitliğinde $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ vektörleri, $\delta \bar{r}_k$ vektörünün iz düşümleridir. (103) denkleminde göre M noktasının 3 boyutlu uzaydaki konumunun tayini, izdüşümleri $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ olan \bar{r} konum vektörü ile belirlenebilir. Buru durumda (103) denkleminin sol tarafı aşağıdaki skaler çarpım şeklinde de yazılmaktadır.

$$(\text{grad } f_i)_0 \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, h \quad (104)$$

(104) denklemindeki $(\text{grad } f_i)_0$, bilinen bir t zamanında M_0 noktasından geçen yüzeyin normali üzere yönelmiş vektördür.

4.4.7 Uygulama 7

Şekil 18'deki çark kolu sürgü kolu mekanizmasında pistonu \bar{P} kuvveti etki etmektedir. Mekanizmanın AO kolu krank milini temsil etmekte ve ℓ uzunluğu ile gösterilirken, AB kolu ise biyel kolunu temsil etmekte ve \mathcal{L} uzunluğu ile gösterilmektedir. AO kolu ile yatay düzlem arasındaki açı α ile gösterilirken, AB kolu ile yatay düzlem arasındaki açı ise β ile gösterilmiştir. Sürtünmenin ve piston, krank ve biyelin ağırlıklarının ihmal edildiği bu mekanizmada M ile gösterilen moment aşağıdaki gibi tespit edilmiştir (Butenin vd., 1985).



Şekil 18. Krank-biyel-piston mekanizmasının temsili (Butenin vd., 1985).

Şekil 18'e göre OB uzunluğu aşağıdaki eşitlikle ifade edilecektir.

$$|OB| = \ell \cdot \cos \alpha + \mathcal{L} \cdot \cos \beta \quad (105)$$

Vektörel Mekanik'te kullanılan sinüs teoremine göre aşağıdaki gibi bir eşitlik yazılacaktır.

$$\frac{\sin\beta}{\ell} = \frac{\sin\alpha}{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{\ell}{\mathcal{L}} \cdot \sin\alpha \quad (106)$$

Ayrıca OB uzunluğu da aşağıdaki gibi tekrar yazılabilmektedir.

$$|OB| = r = \ell \cdot \cos\alpha + \mathcal{L} \cdot \sqrt{1 - a^2 \cdot \sin^2\alpha} \quad a = \ell/\mathcal{L} \quad (107)$$

(107) denkleminin virtüel yer değiştirmeye göre varyasyonunu yazacak olursan aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$\delta r = - \left(\ell \cdot \sin\alpha + \mathcal{L} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - a^2 \cdot \sin^2\alpha}} \right) \cdot \delta\alpha \quad (108)$$

(108) denkleminde eksi işareti, α açısının artarken r uzunluğunun azaldığını göstermektedir.

Virtüel yer değiştirme prensibine göre aşağıdaki eşitlik yazılmıştır.

$$\delta A_p + \delta A_M = 0 \quad (109)$$

(109) eşitliğindeki δA_p ve δA_M ifadeleri \bar{P} kuvvetinin virtüel yer değiştirmesinde yapmış oldukları işlerdir ve aşağıdaki denklemlerle gösterilmektedirler.

$$\delta A_M = -M \cdot \delta\alpha \quad (110)$$

$$\delta A_p = P \cdot |\delta\bar{r}| = P \cdot \ell \cdot \sin\alpha \cdot \left(1 + a \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - a^2 \cdot \sin^2\alpha}} \right) \cdot \delta\alpha \quad (111)$$

(110) ve (111) eşitliklerini (109) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\left[P \cdot \ell \cdot \sin\alpha \cdot \left(1 + a \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - a^2 \cdot \sin^2\alpha}} \right) - M \right] \cdot \delta\alpha = 0 \quad (112)$$

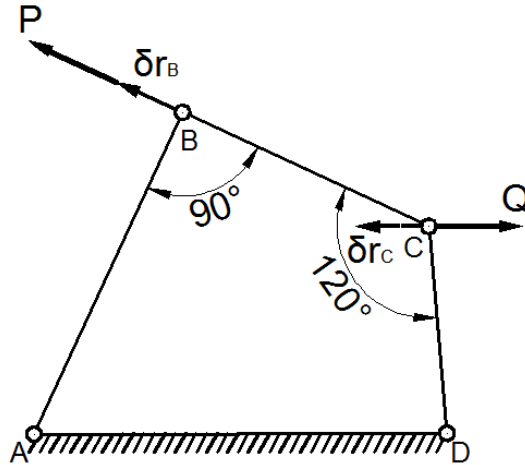
$\delta\alpha \neq 0$ olduğu için (112) eşitliğinin sağlanabilmesi için eşitliğin diğer çarpanını sıfıra eşitlememiz gerekmektedir. Bu durumda aşağıdaki denklemlerle M elde edilmektedir.

$$P \cdot \ell \cdot \sin\alpha \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1-a^2 \cdot \sin^2\alpha}}\right) - M = 0 \quad (113)$$

$$M = P \cdot \ell \cdot \sin\alpha \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1-a^2 \cdot \sin^2\alpha}}\right) \quad (114)$$

4.4.8 Uygulama 8

Şekil 19’da ABCD noktalarından bağlanmış dört bağlantılı bir mekanizma görülmektedir. Mekanizmanın B ve C mafsallarına \bar{P} ve \bar{Q} kuvvetleri etki etmekte olup bu kuvvetler AB ve CD kollarına diktirler. \bar{P} kuvvetinin biliniyor olduğu ve çubuk ağırlıklarının da ihmal edildiğinde, bu sistemin dengede olabilmesi için, \bar{Q} kuvveti aşağıdaki gibi belirlenmiştir (Bakioğlu ve Kadiroğlu, 1999).



Şekil 19. Dört bağlantılı mekanizma (Butenin vd., 1985).

\bar{Q} kuvvetini belirleyebilmek için virtüel işler prensibinden yararlanılabilir. Bunun için sisteme virtüel bir yer değiştirme verildiği düşünülürse, AB kolu A noktası etrafında, CD kolu ise D noktası etrafında dönüş yapacaktır. B ve C noktalarının virtüel yer değiştirmeleri şekil 19’da δr_B ve δr_C ile gösterilmiştir. Virtüel yer değiştirme vektörleri olan δr_B ve δr_C sırasıyla AB ve CD kollarına diktirler. Netice olarak \bar{P} ve \bar{Q} kuvvetlerinin virtüel işler denklemi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\delta A_P + \delta A_Q = P \cdot |\delta \bar{r}_B| - Q \cdot |\delta \bar{r}_C| = 0 \quad (115)$$

Şekil 19'daki mekanizmaya dikkat edildiğinde, (115) denkleminin, BC kolunun iki uç noktası için yazılmış olduğu görülebilir. Virtüel işler teoremine göre mutlak bir cismin iki noktasının virtüel yer değiştirmelerinin o cisim üzerindeki iz düşümlerinin birbirine eşit olduğu bilinmektedir (Bakioğlu, 2006). Buna göre BC kolunun B ve C noktalarında virtüel yer değiştirmeler için aşağıdaki eşitlik yazılmaktadır.

$$\delta r_B = \delta r_C \cdot \cos 30^\circ \quad (116)$$

Bu durumda (115) denklemini aşağıdaki hali almaktadır.

$$P \cdot \delta r_C \cdot \cos 30^\circ - Q \cdot \delta r_C = 0 \quad (117)$$

(117) denklemini δr_C parantezine alınarak düzenlenecek olursa aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\delta r_C \cdot (P \cdot \cos 30^\circ - Q) = 0 \quad (118)$$

Virtüel yer değiştirme, δr_C , sıfır olamayacağı için (117) eşitliğinin sol tarafındaki diğer çarpan sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$P \cdot \cos 30^\circ - Q = 0 \quad (118)$$

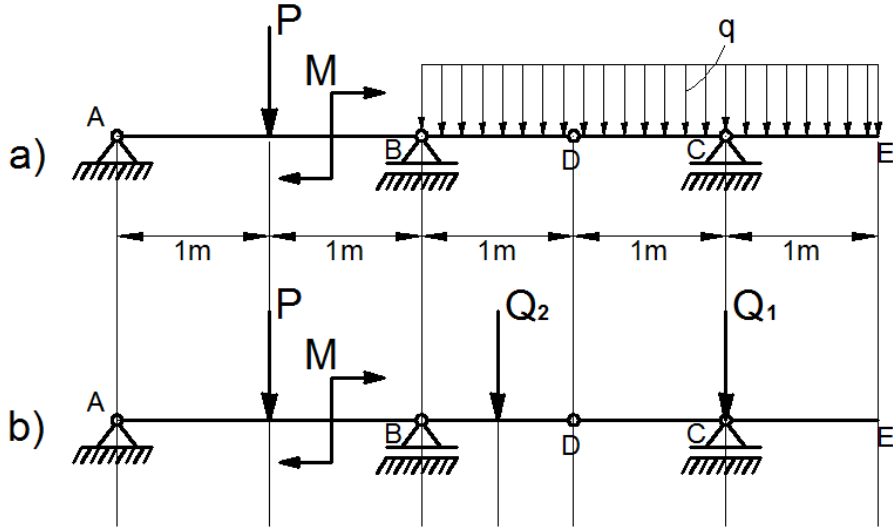
(118) eşitliği düzenlenecek olursa \bar{Q} kuvveti \bar{P} kuvveti cinsinden aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$Q = P \cdot 0,866 \quad (119)$$

4.4.9 Uygulama 9

Şekil 20.a'da AE konsol kirişine ait bir yükleme durumu verilmiştir. Bu kirişe dikey doğrultuda 16kN'luk bir \bar{P} kuvveti, 4kN/m'lik bir q yayılı yükü ve 6kN.m'lik bir M kuvvet çifti etkimektedir. Etkiyen kuvvetler ve mesnetler arasındaki mesafeler şekil 20.a'da

belirtildiğine göre, bu konsol kirişi destekleyen mesnetlerdeki tepki kuvvetleri aşağıdaki gibi tespit edilmiştir (Butenin vd., 1985).



Şekil 20. Konsol bir kirişe ait yükleme durumu (a) ve dış kuvvetler (b) (Butenin vd., 1985).

Şekil 20.a'da görülen q yayılı yükü, şekil 20.b'de görüldüğü üzere Q_1 ve Q_2 kuvvetlerine dönüştürülmüş ve bu Q_1 ve Q_2 kuvvetleri aşağıdaki eşitlikler ile belirlenmiştir.

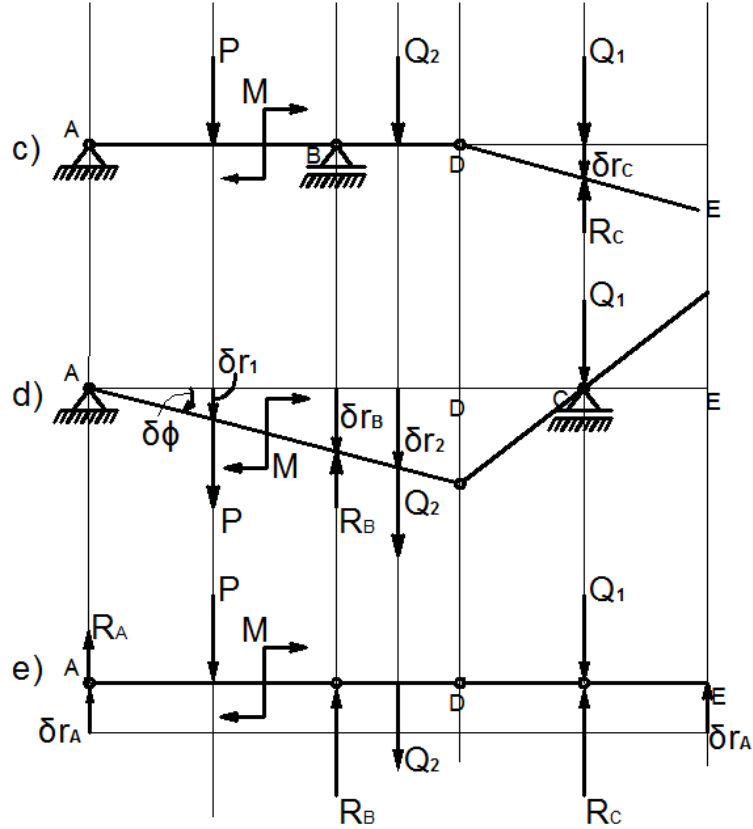
$$Q_1 = 2 \cdot q = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kN} \quad (120)$$

$$Q_2 = 1 \cdot q = 1 \cdot 4 = 4 \text{ kN} \quad (121)$$

AE konsol kirişinde Şekil 20'de görüldüğü üzere A, B ve C olmak üzere üç adet mesnet bulunmaktadır. Şekil 21.e'de görüldüğü üzere bu üç mesnedin R_A , R_B ve R_C olmak üzere üç adet tepki kuvveti bulunmaktadır.

R_C kuvvetini belirleyebilmek için AE konsolunun DE kısmına, D noktası etrafında bir virtüel öteleme hareketi verilmiştir (Şekil 21.c). Bu durumda C mafsalında da bir öteleme meydana gelecek ve bu virtüel öteleme $\delta \bar{r}_C$ ile gösterilecektir. Virtüel yer değiştirme prensibine göre Şekil 21.c durumu için virtüel iş denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Q_1 \cdot \delta \bar{r}_C - R_C \cdot \delta \bar{r}_C = 0 \quad (122)$$



Şekil 21. AE konsol kirişine ait birinci virtüel hareket (c), ikinci virtüel hareket (d) ve üçüncü virtüel hareket (e)

(122) denklemini iz düşümle ifade edildiğinde aşağıdaki hali alacaktır.

$$Q_1 \cdot \delta r_C - R_C \cdot \delta r_C = 0 \quad (123)$$

(123) denklemi δr_C parantezine alınıp düzenlenecek olursa aşağıdaki hali alacaktır.

$$\delta r_C \cdot (Q_1 - R_C) = 0 \quad (124)$$

$\delta r_C \neq 0$ olduğu için $Q_1 = R_C = 8\text{kN}$ olacaktır.

R_B tepki kuvvetini belirleyebilmek için AE konsolunu B mesnedinden kurtarılması gerekmektedir. Bunun için de B mesnedi virtüel bir hareket yapacaktır. Şekil 21.d'de görüldüğü gibi AE konsolunun DE kısmı C mesnedi etrafında dönüş yapmakta ve AE konsolunun AC kısmı ise A mesnedi etrafında dönme hareketi yapmaktadır. Bu durumda virtüel iş denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\bar{P} \cdot \delta \bar{r}_1 - \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B + \bar{Q}_2 \cdot \delta \bar{r}_2 + M \cdot \delta \varphi = 0 \quad (125)$$

Ve ya

$$P \cdot \delta r_1 - R_B \cdot \delta r_B + Q_2 \cdot \delta r_2 + M \cdot \delta \varphi = 0 \quad (126)$$

Burada $\delta \varphi$ AD kirişinin A eksenini etrafında dönme açısıdır. (126) denklemindeki virtüel yer değiştirmeler $\delta \varphi$ virtüel açısı ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= 1 \cdot \delta \varphi \\ \delta r_B &= 2 \cdot \delta \varphi \\ \delta r_2 &= 2,5 \cdot \delta \varphi \end{aligned} \quad (127)$$

(126) denkleminde virtüel yer değiştirmeleri $\delta \varphi$ cinsinden değerleri ile yazacak ve daha sonra denklemi $\delta \varphi$ parantezine alacak okursak aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$(P - 2 \cdot R_B + 2,5 \cdot Q_2 + M) \cdot \delta \varphi = 0 \quad (128)$$

(128) denkleminde $\delta \varphi \neq 0$ olacağı için parantez içindeki çarpanı düzenleyip R_B 'yi yalnız bırakılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$R_B = \frac{P + 2,5 \cdot Q_2 + M}{2} \quad (129)$$

(129) eşitliğinden $R_B = 16 \text{ kN}$ bulunmaktadır.

Şekil 21.e'deki R_A tepki kuvvetini bulabilmek için AE konsol kirişine dikey doğrultuda yukarı yönde bir virtüel hareket verilmiştir.

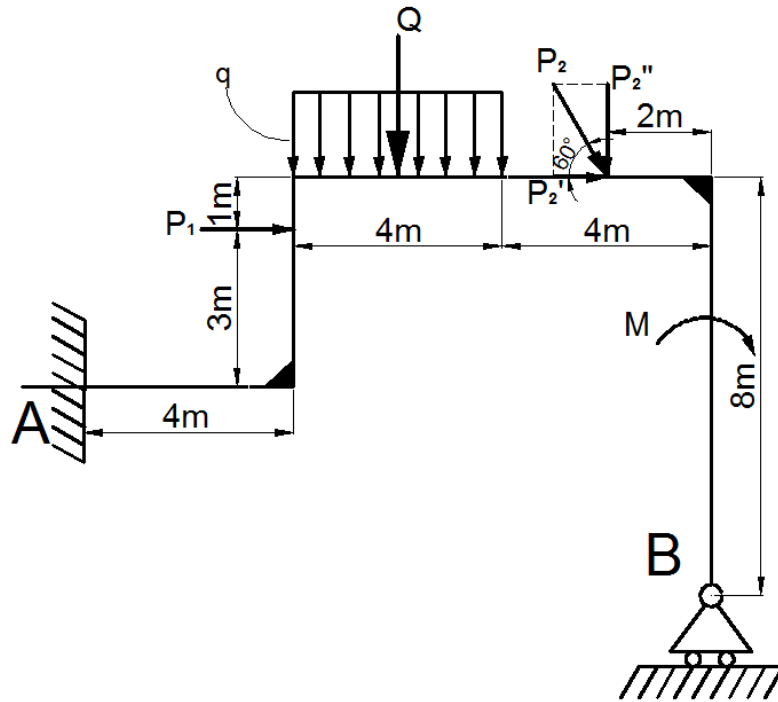
Bütün kuvvetlerin etki noktalarındaki virtüel hareket eşit ve aynı yönlü olmak üzere δr_A olmaktadır. Bu durumda bütün mesnetler serbest kalmakta ve aşağıdaki gibi bir virtüel iş denklemi elde edilmektedir.

$$(R_A + R_B + R_C - Q_1 - Q_2 - P) \cdot \delta r_A = 0 \quad (130)$$

$\delta r_A \neq 0$ ve R_A haricindeki tüm kuvvetlerin değerleri bilindiği için $R_A = 4\text{kN}$ bulunmaktadır.

4.4.10 Uygulama 10

Şekil 22'da farklı yüklere maruz bırakılmış ve bir ucu ankastre mesnet, bir ucu ise hareketli mesnetle bağlanmış olan bir çerçeve görülmektedir. Bu çerçevenin mesnetlerindeki reaksiyon kuvvetleri virtüel yer değiştirme prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi belirlenmiştir ($P_1=10\text{kN}$, $q=5\text{kN/m}$, $P_2=80\text{kN}$, $M=200\text{kN.m}$) (Eyvazov ve Musayev, 2009).

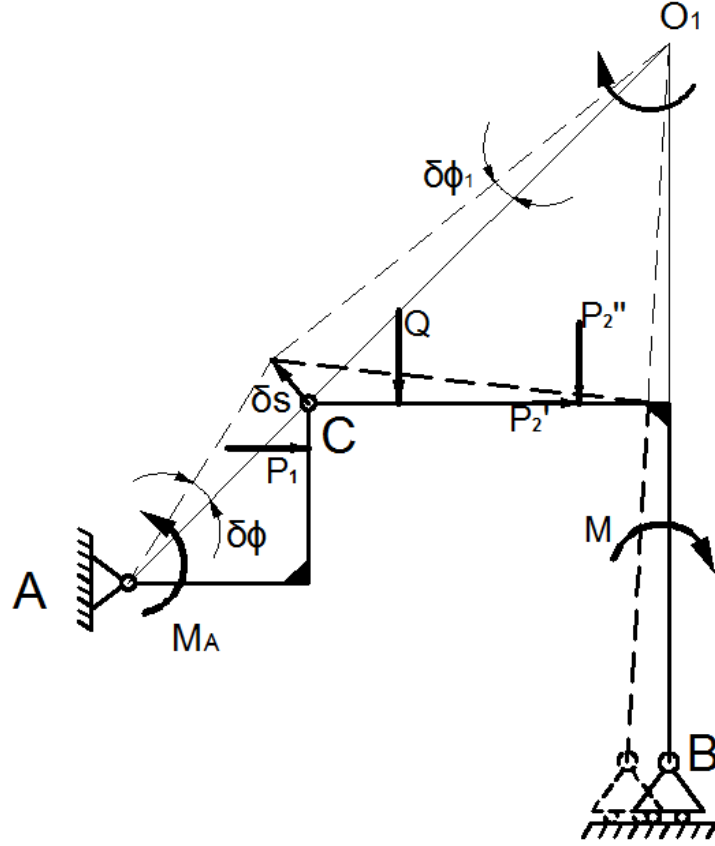


Şekil 22. Farklı yüklemelere sahip mesnetlenmiş çerçeve (Eyvazov ve Musayev, 2009).

A mesnedi ankastre mesnet olduğu için bu mesnette M_A ile gösterilen reaktif momenti ve R_{Ax} ve R_{Ay} ile gösterilen yatay ve dikey tepki kuvvetleri oluşmaktadır. B mesnedi ise hareketli mesnet olduğu için sadece dikey doğrultuda R_B tepki kuvveti oluşmaktadır. Görüldüğü gibi bulunması gereken dört adet bilinmeyen vardır. Bunun için çerçeveye dört adet virtüel hareket verilmesi gerekmektedir.

Öncelikle M_A - reaktif momentini bulabilmek için çerçeveyi, dönüş hareketini engelleyen ankastre bağlantıdan kurtarılması ve onun yerine sabit mesnet yerleştirilmesi

gerekmektedir. Ardından çerçeve AC ve CB olarak iki ayrı parça gibi düşünülmesi ve AC parçasına A mafsalı etrafında dönüş hareketi yapabilecek şekilde bir virtüel hareket verilmesi gerekmektedir. AC parçası saat yönünün tersi yönde $\delta\varphi$ açısı kadar bir virtüel dönüş yapacaktır. Bu durumda çerçevenin CB parçası ise yassı hareket yapacaktır.



Şekil 23. M_A - Reaktif momentini için virtüel hareket.

Şekil 23'te O_1 ile gösterilen nokta ani dönme merkezidir. Bu virtüel harekette üç adet virtüel yer değiştirme söz konusudur, bunlar: $\delta\varphi$, $\delta\varphi_1$ ve δs 'dir. $\delta\varphi_1$ ve δs yer değiştirmelerini $\delta\varphi$ cinsinden ifade edilmesi çözümü kolaylaştıracaktır. Şekil 19'daki ölçülere göre $\delta\varphi_1$ ve δs , $\delta\varphi$ cinsinden aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$\delta s = |AC|. \delta\varphi = 4\sqrt{2}. \delta\varphi \quad (131)$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{|AC|}{|O_1C|}. \delta\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = 0,5. \delta\varphi \quad (132)$$

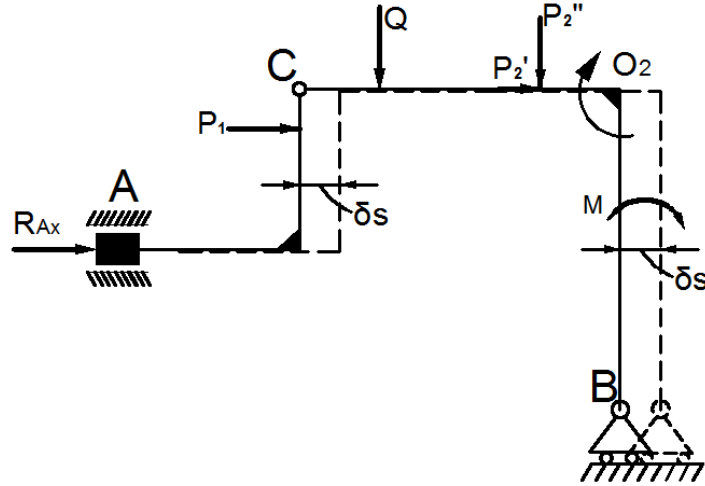
M_A - reaktif momentini için verilen virtüel harekette çerçeveye etki eden kuvvetlerin yaptıkları iş için aşağıdaki denklem yazılacaktır.

$$M_A \cdot \delta\varphi - 3 \cdot P_1 \cdot \delta\varphi - 6 \cdot Q \cdot \delta\varphi_1 - 8 \cdot P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta\varphi_1 - 2 \cdot P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 = 0 \quad (133)$$

(133) denkleminde $\delta\varphi_1$ açısı yerine, (132) eşitliğinde bulunan değer yazıldığında (133) denklemini bir bilinmeyenli denklem haline gelecektir. Ardından denklem $\delta\varphi$ parantezine alınıp diğer çarpan sıfıra eşitlendiğinde M_A - reaktif momentini aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$M_A = 3 \cdot P_1 + 3 \cdot Q + 2 \cdot P_2 + 0,866 \cdot P_2 - 0,5 \cdot M = 219,28 \text{ kN.m} \quad (134)$$

R_{Ax} tepki kuvvetinin bulunabilmesi için A mesnedi yatay doğrultuda çalışan bir piston gibi kabul edilecek ve tüm sisteme δs öteleme hareketi verilecektir (Şekil 24).



Şekil 24. R_{Ax} - tepki kuvveti için virtüel hareket.

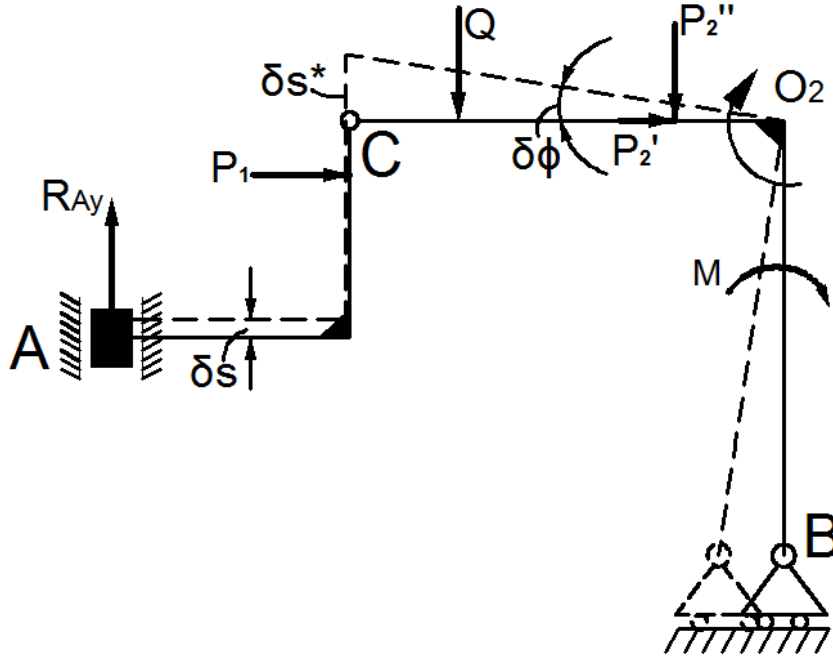
Bu durumda çerçeveye etki eden kuvvetlerin yaptıkları virtüel işlerin denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\delta A_K = 0 \rightarrow R_{Ax} \cdot \delta s + P_1 \cdot \delta s + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta s = 0 \quad (135)$$

(135) denklemini δs parantezine alıp diğer çarpan sıfıra eşitlendiğinde R_{Ax} aşağıdaki elde edilmektedir.

$$\delta s \cdot (R_{Ax} + P_1 + P_2 \cdot 0,5) = 0 \rightarrow R_{Ax} = -P_1 - P_2 \cdot 0,5 \rightarrow R_{Ax} = -50 \text{ kN} \quad (136)$$

R_{Ay} tepki kuvvetinin bulunabilmesi için A mesnedi düşey doğrultuda çalışan bir piston gibi kabul edilecektir. Çerçevenin AC parçası yukarı yönde δs ötelemesini yaparken, çerçevenin CB parçası O_2 ile gösterilen ani dönme merkezi etrafında $\delta\phi$ dönme açısını oluşturacaktır (Şekil 25).



Şekil 25. R_{Ay} – tepki kuvveti için virtüel hareket.

Bu durumda çerçeveye etki eden kuvvetlerin yaptıkları virtüel işlerin denklemi, tüm virtüel hareketler $\delta\phi$ ile ifade edilerek, aşağıdaki gibi olmaktadır.

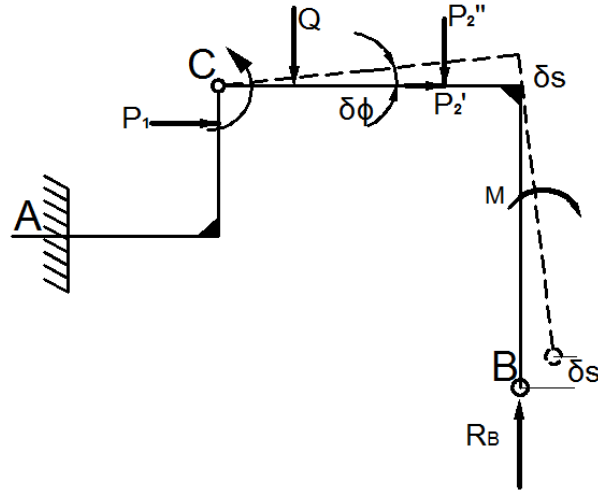
$$\delta A_k = 0 \rightarrow 8 \cdot R_{Ay} \cdot \delta\phi - 6 \cdot Q \cdot \delta\phi - 2 \cdot P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \delta\phi + M \cdot \delta\phi = 0 \quad (137)$$

(137) denklemi $\delta\phi$ parantezine alınıp düzenlenecek olursa R_{Ay} aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\delta\phi \cdot (8 \cdot R_{Ay} - 6 \cdot Q - 1,732 \cdot P_2 + M) = 0 \quad (138)$$

$$R_{Ay} = \frac{6 \cdot Q + 1,732 \cdot P_2 - M}{8} \rightarrow R_{Ay} = 7,32 \text{ kN} \quad (139)$$

R_B tepki kuvvetini bulabilmek için çerçevenin CB parçası C noktası etrafında $\delta\phi$ kadar dönüş yapacak ve B noktası δs kadar öteleneyecektir.



Şekil 26. R_B – tepki kuvveti için virtüel hareket.

Bu durumda çerçeveye etki eden kuvvetlerin yaptıkları virtüel işlerin denklemi, tüm virtüel hareketler $\delta\varphi$ ile ifade edilerek, aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\delta A_k = 0 \rightarrow 8 \cdot R_B \cdot \delta\varphi - 2 \cdot Q \cdot \delta\varphi - 6 \cdot P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \delta\varphi - M \cdot \delta\varphi = 0 \quad (140)$$

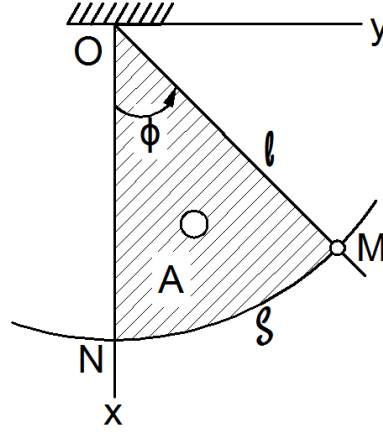
(140) denklemi $\delta\varphi$ parantezine alınıp düzenlenirse R_B aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\delta\varphi \cdot (8 \cdot R_B - 2 \cdot Q - 5,196 \cdot P_2 - M) = 0 \quad (141)$$

$$R_B = \frac{2 \cdot Q + 5,196 \cdot P_2 + M}{8} \rightarrow R_B = 81,96 \text{ kN} \quad (142)$$

4.4.11 Uygulama 11

Şekil 27’de matematiksel bir sarkaç görülmektedir. Bu sarkacın serbestlik derecesi birdir, yani $s=1$ ’dir. Sarkacın durumu bir tane q -genelleşmiş koordinatla belirlenebilir. Burada Genelleşmiş koordinatlar φ , s ve A ’dır. φ sarkaç kolunun x eksenine yaptığı açı, s sarkacın uç noktası olan M ile N noktası arasındaki yayın uzunluğu, A ise şekil 27’de taralı olarak gösterilen sektörel alandır. Görüldüğü gibi M noktasının konumu x apsisi ile belirlenmesi aşağıdaki gibi gösterilmiştir (Butenin vd., 1985).



Şekil 27. Bir serbestlik dereceli matematiksel sarkaç (Butenin vd., 1985).

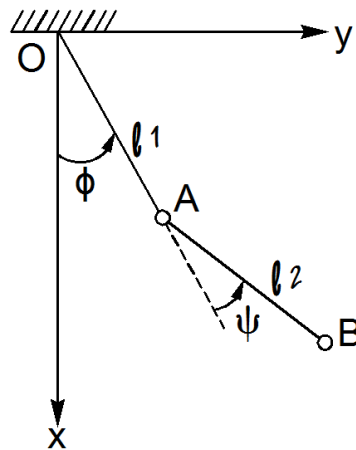
Genelleşmiş koordinat olarak sadece φ açısı kabul edilir ve matematiksel sarkaca $\delta\varphi$ kadar açısal virtüel bir yer değiştirme verilirse, M noktasının konumu, kartezyen koordinatlarla ve vektörel formda aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$x = l \cdot \cos\varphi, \quad y = l \cdot \sin\varphi \quad (143)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (144)$$

4.4.12 Uygulama 12

Şekil 28 'te görülen matematiksel sarkacın ise iki serbestlik derecesi vardır, yani $s=2$ 'dir. Genelleşmiş koordinat olarak q_1 ve q_2 kabul edilmelidir. Çünkü sarkacın A noktasına kadar olan bölümünün konumu φ açısı ile sarkacın AB parçasının konumu ise ψ açısı ile değişmektedir. Bu durumda $q_1 = \varphi, q_2 = \psi$ yazılmalıdır (Butenin vd., 1985).



Şekil 28. İki serbestlik dereceli matematiksel sarkaç (Butenin vd., 1985).

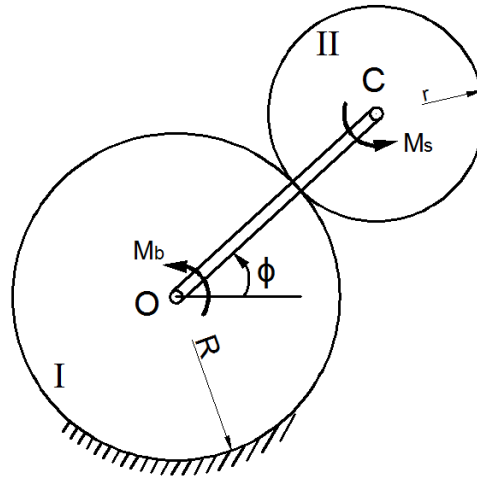
φ ve ψ açıları birbirine bağlı değildir. Örneğin ψ açısı sabit olsa da φ açısı değişken olabilir. Bu sisteme $\delta\varphi$ ve $\delta\psi$ kadar açısal virtüel yer değiştirmeler verildiğinde A ve B noktalarının konumunu, kartezyen koordinatlara göre ve vektörel olarak genelleşmiş koordinatlar kullanılarak aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$x_A = \ell_1 \cdot \cos\varphi_1, \quad x_B = \ell_1 \cdot \cos\varphi_1 + \ell_2 \cdot \cos(\varphi + \psi) \quad (145)$$

$$\bar{r}_A = \bar{r}_A(\varphi), \quad \bar{r}_B = \bar{r}_B(\varphi, \psi) \quad (146)$$

4.4.13 Uygulama 13

Şekil 29'da görülen mekanizmada OC çark kolu, R yarıçaplı I dişli çarkının ağırlık merkezinden geçen eksen etrafında dönmekte ve çark kolunun C ucuna tam ağırlık merkezinden mesnetlenmiş olan II güneş dişli çarkını (planet dişli) I dişli çarkı etrafında döndürmektedir (Butenin vd., 1985).



Şekil 29. Yatay düzlemde bir çark kolu dişli mekanizması (Butenin vd., 1985).

Bu mekanizmada OC çark kolunun O ucuna M_b momenti etki etmekte ve C ucuna ise sürtünme kuvvetleri tarafından M_s momenti etki ettirilmektedir. Sistem yatay düzlemde çalışmaktadır yani dişli çarkların ağırlık kuvvetleri sayfa düzlemine dik doğrultudadır.

Bu mekanizmanın hareketi çark koluna bağlı olduğu için mekanizma bir serbestlik derecesine sahiptir. Çark kolunun konumunun değişimi de φ açısına bağlı olduğu için genelleşmiş koordinat olarak φ açısı kabul edilmektedir.

Bu mekanizmaya $\delta\varphi$ virtüel yer değişimi verilerek, sisteme etkiyen kuvvetlerin yaptıkları işler aşığıdaki virtüel iş denkleminde hesaplanmaktadır.

$$\Sigma \delta A = \delta A_p + \delta A_{M_b} + \delta A_{M_s} \quad (147)$$

(147) denklemindeki δA_p dişli çarkların ağırlıklarının yaptığı virtüel işler ve sifıra eşittir. Çünkü mekanizma yatay düzlemde hareket etmektedir ve dişli çarkların ağırlık kuvvetlerinin uygulandığı noktalar ile yer değişimler birbirlerine diktir. (147) denkleminde δA_{M_b} çark kolunun O ucuna uygulanan momentin yaptığı virtüel iş ve δA_{M_s} ise sürtünme kuvvetlerinden doğan momentin yapmış olduğu virtüel işe karşılık gelmektedir. δA_{M_b} ve δA_{M_s} aşığıdaki eşitliklerle ifade edilmektedir.

$$\delta A_{M_b} = M_b \cdot \delta\varphi \quad \delta\varphi - \text{çark kolunu açısıl virtüel yer değişimi} \quad (148)$$

$$\delta A_{M_s} = -M_s \cdot \delta\varphi_1 \quad \delta\varphi_1 - \text{güneş dişlisinin nisbi açısıl virtüel yer değişimi} \quad (149)$$

$\delta\varphi$ ve $\delta\varphi_1$ arasında bir bağıntı kurulacak olursa aşığıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\delta\varphi_1 = \frac{R}{r} \cdot \delta\varphi \quad (150)$$

(148), (149) ve (150) eşitliklerini (147) denkleminde yerlerine yazıp düzenleme yapılacak olursa aşığıdaki eşitlik elde edilmektedir.

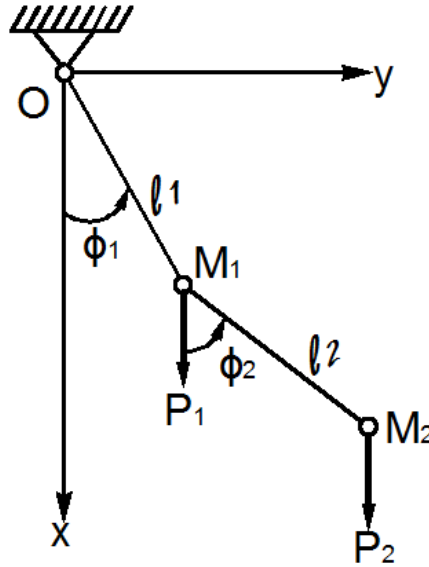
$$\Sigma \delta A = \left(M_b - M_s \cdot \frac{R}{r} \right) \cdot \delta\varphi \quad (151)$$

(151) eşitliği çark kolu dişli mekanizmasının toplam virtüel iş denklemdir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki parantezin bize sistemin φ genelleşmiş koordinatına göre genelleşmiş kuvvetini vermektedir ve aşığıdaki gibi gösterilmektedir.

$$Q_\varphi = M_b - M_s \cdot \frac{R}{r} \quad (152)$$

4.4.14 Uygulama 14

Şekil 30'da İki serbestlik dereceli bir matematiksel sarkaç görülmektedir. Bu sarkaç, uzunlukları ℓ_1 ve ℓ_2 olan ve sırasıyla $|OM_1|$ ve $|M_1M_2|$ olarak adlandırılan iki adet koldan oluşmaktadır. $|OM_1|$ kolunun kütlesi m_1 , $|M_1M_2|$ kolunun kütlesi ise m_2 ile verilmektedir. $|OM_1|$ kolu O noktası etrafında dönebildiği ve konumu φ_1 açısının değişimine bağlı olduğu için, $|M_1M_2|$ kolu ise M_1 noktası etrafında dönebildiği ve konumu φ_2 açısının değişimine bağlı olduğu için şekil 30'deki matematiksel sarkaç iki serbestlik derecesine sahiptir. Genelleş koordinat olarak $q_1 = \varphi_1$ ve $q_2 = \varphi_2$ kabul edilmektedir. Bu sistemin genelleşmiş kuvvetini iki farklı yöntemle aşağıdaki gibi belirlenmektedir. (Butenin vd., 1985).



Şekil 30. Yüklmeli matematiksel sarkaç (Butenin vd., 1985).

1. Yöntem: Şekil 30'da görüldüğü gibi matematiksel sarkaç M_1 noktasında \bar{P}_1 , M_2 noktasında \bar{P}_2 kuvvetleriyle yüklenmiştir. Öncelikle \bar{P}_1 ve \bar{P}_2 kuvvetlerinin koordinat eksenleri üzerine gelen izdüşümlerini aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

$$P_{1x} = m_1 \cdot g, \quad P_{2x} = m_2 \cdot g \quad (153)$$

$$P_{1y} = 0, \quad P_{2y} = 0 \quad (154)$$

$$P_{1z} = 0, \quad P_{2z} = 0 \quad (155)$$

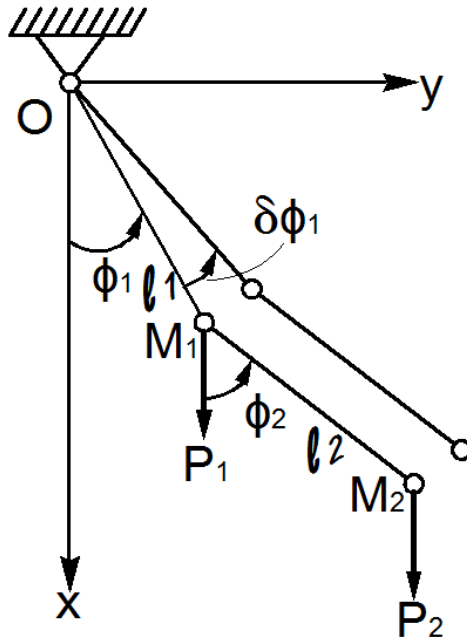
Görüldüğü gibi sadece x-koordinatının iz düşümleri bulunmaktadır. M_1 ve M_2 noktalarının konum koordinatları ise aşağıdaki eşitliklerle göre belirlenebilmektedir.

$$x_1 = l_1 \cdot \cos\varphi_1, \quad x_2 = l_1 \cdot \cos\varphi_1 + l_2 \cdot \cos\varphi_2 \quad (156)$$

$$y_1 = l_1 \cdot \sin\varphi_1, \quad y_2 = l_1 \cdot \sin\varphi_1 + l_2 \cdot \sin\varphi_2 \quad (157)$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0 \quad (158)$$

Genelleşmiş kuvvetleri belirleyebilmek için sisteme bir virtüel hareket verilmesi gerekmektedir. Şekil 31'de görüldüğü gibi matematiksel sarkaç için öncelikle, $|OM_1|$ kolu $\delta\varphi_1$, $|M_1M_2|$ kolu $\delta\varphi_2$ açısal hareket yapacak şekilde, bir virtüel yer değiştirme verilecektir.



Şekil 31. Yükllemeli matematiksel sarkaç için birinci virtüel hareket.

Şekil 31'deki virtüel hareket neticesinde sistemin genelleşmiş kuvvetleri, P_1 ve P_2 kuvvetlerinin iz düşümleriyle aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

$$Q_1 = P_{1x} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + P_{1y} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + P_{1z} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} + P_{2x} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} + P_{2y} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} + P_{2z} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1} \quad (159)$$

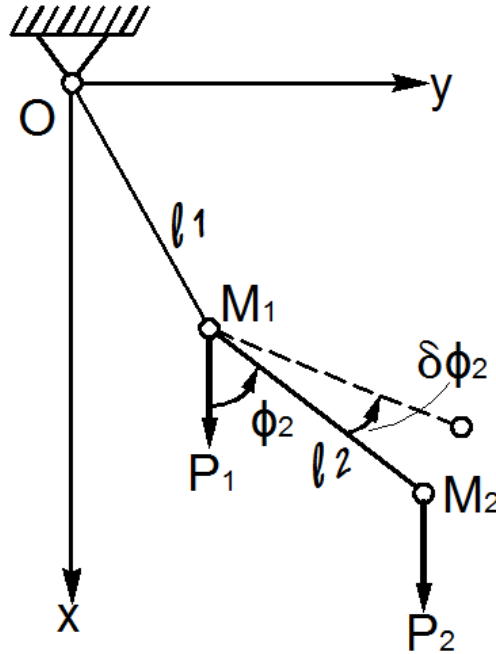
$$Q_2 = P_{1x} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} + P_{1y} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_2} + P_{1z} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_2} + P_{2x} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} + P_{2y} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_2} + P_{2z} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_2} \quad (160)$$

(159) ve (160) eşitlikleri düzenlenecek olursa, Q_1 ve Q_2 genelleşmiş kuvvetleri daha sade bir biçimde aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin \varphi_1 \quad (161)$$

$$Q_2 = -m_2 \cdot g \cdot \ell_2 \cdot \sin \varphi_2 \quad (162)$$

2. Yöntem: Şekil 32’de görüldüğü gibi matematiksel sarkaç için, $|OM_1|$ kolu sabit tutulup, $|M_1M_2|$ kolu $\delta\varphi_2$ açısal hareket yapacak şekilde, bir virtüel yer değiştirme verilecektir.



Şekil 32. Yüklemeli matematiksel sarkaç için ikinci virtüel hareket.

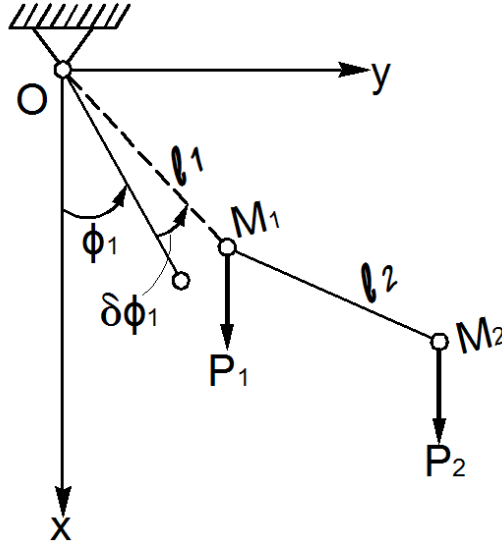
İkinci virtüel harekette φ_1 açısı değişmediği ve sadece φ_2 açısı değiştiği için $\delta\varphi_1 = 0$ iken $\delta\varphi_2 \neq 0$ olacaktır. Bu durumda \bar{P}_1 kuvveti iş yapmayacak sadece \bar{P}_2 kuvveti iş yapacaktır. \bar{P}_2 kuvvetinin yaptığı δA_2 işini hesaplayabilmek için sisteme etki eden kuvvetlerin M_1 noktası etrafındaki momentlerini içeren aşağıdaki eşitlik yazılmaktadır.

$$\delta A_2 = -m_2 \cdot g \cdot \ell_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 \quad (163)$$

(163) eşitliğine göre Q_2 genelleşmiş kuvveti aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$Q_2 = -m_2 \cdot g \cdot \ell_2 \cdot \sin\varphi_2 \quad (164)$$

Q_1 genelleşmiş kuvvetini hesaplayabilmek için sisteme üçüncü bir virtüel hareket verildiğinde $|OM_1|$ kolu $\delta\varphi_1$ virtüel hareketini yaparken , $|M_1M_2|$ kolu sabit kalacaktır. Yani bu üçüncü durumda $\delta\varphi_1 \neq 0$ iken $\delta\varphi_2 = 0$ olacaktır.



Şekil 33. Yüklemeli matematiksel sarkaç için üçüncü virtüel hareket.

Sisteme etkiyen kuvvetlerin O noktası etrafında yaptıkları momentleri içeren virtüel iş denklemini aşağıdaki gibi olur ve neticede Q_1 genelleşmiş kuvveti de belirlenmiş olmaktadır.

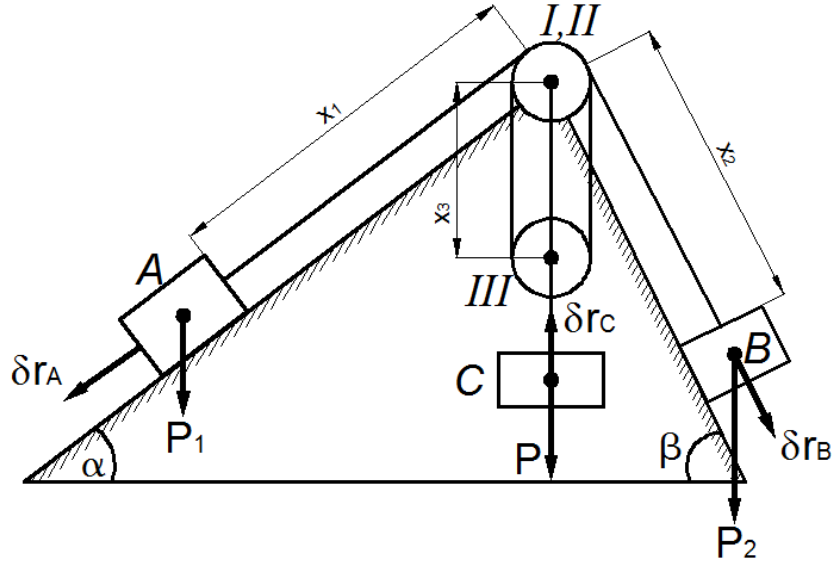
$$\delta A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 - m_2 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 \quad (165)$$

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin\varphi_1 \quad (166)$$

4.4.15 Uygulama 15

Şekil 34'te görülen pürüzsüz eğik düzlemde \bar{P}_1 ve \bar{P}_2 yükleri tatbik edilmiş A ve B cisimleri, aynı eksenli yerleştirilmiş olan P yükü tatbik edilmiş C bloku, sabit I, II makarası ve serbest III makarasıyla uzamayan kablolar aracılığıyla dengede tutulmaktadır. Eğik düzlem açılı olan α ve β 'nin belli olduğu düşünüldüğünde, sürtünmenin, blok, makara ve

kablo ağırlıklarının ihmal edilmesi durumunda \bar{P}_1 ve \bar{P}_2 yükleri aşağıdaki gibi belirlenmektedir (Butenin vd., 1985).



Şekil 34. Pürüzsüz eğik düzlem makara blok düzeneği (Butenin vd., 1985).

Uzamayan kablo Holonom stasyonier bir bağlantı oluşturduğundan denklemini aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = a \quad (167)$$

Pürüzsüz eğik düzlemdeki A ve B bloklarının konumu x_1 ve x_2 uzunluklarının değişimine bağlı olduğu için sistemin iki serbestlik derecesi vardır. Genelleşmiş koordinatlar olarak da x_1 ve x_2 uzunlukları kabul edilebilir. Bu nedenle (167) eşitliğinin varyasyonu ve düzenlenmiş hali aşağıdaki iki eşitlikle verilmiştir.

$$\delta x_1 + \delta x_2 + 2 \cdot \delta x_3 = 0 \quad (168)$$

$$\delta x_3 = -1/2 \cdot (\delta x_1 + \delta x_2) \quad (169)$$

A, B ve C bloklarına δr_A , δr_B ve δr_C virtüel yer değiştirmeleri verildiğinde sistem üzerindeki \bar{P} , \bar{P}_1 ve \bar{P}_2 yüklerinin yapmış oldukları işler aşağıdaki iki farklı eşitlikle belirlenmektedir.

$$\bar{P}_1 \cdot \overline{\delta r_A} + \bar{P}_2 \cdot \overline{\delta r_B} + \bar{P} \cdot \overline{\delta r_C} = 0 \quad (170)$$

$$\bar{P}_1 \cdot |\overline{\delta r_A}| \cdot \sin\alpha + \bar{P}_2 \cdot |\overline{\delta r_B}| \cdot \sin\beta - \bar{P} \cdot |\overline{\delta r_C}| = 0 \quad (171)$$

(171) eşitliğindeki bazı ifadeler aşağıdaki gibi dönüşüme uğramaktadır.

$$|\overline{\delta r_A}| = \delta x_1, \quad |\overline{\delta r_B}| = \delta x_2, \quad |\overline{\delta r_C}| = \delta x_3 = -1/2 \cdot (\delta x_1 + \delta x_2) \quad (172)$$

(171) eşitliği (172) eşitliğindeki dönüşümler sayesinde aşağıdaki gibi düzenlenmektedir.

$$\left(P_1 \cdot \sin\alpha - \frac{P}{2}\right) \cdot \delta x_1 + \left(P_2 \cdot \sin\beta - \frac{P}{2}\right) \cdot \delta x_2 = 0 \quad (173)$$

$\delta x_1 \neq 0$ ve $\delta x_2 \neq 0$ olduğu için (173) eşitliğinde parantez içindeki ifadeler bize genelleşmiş kuvvetleri vermektedir.

$$Q_1 = P_1 \cdot \sin\alpha - \frac{P}{2} = 0 \quad (174)$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \sin\beta - \frac{P}{2} = 0 \quad (175)$$

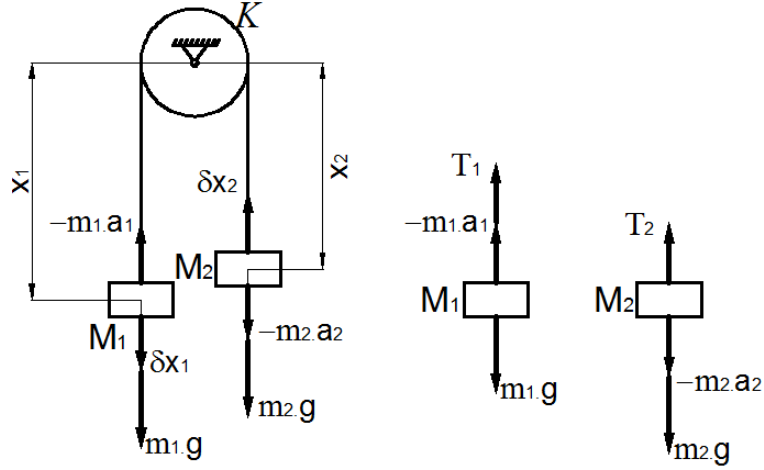
(174) ve (175) eşitliklerinden P_1 ve P_2 kuvvetleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$P_1 = \frac{P}{2 \cdot \sin\alpha} \quad (176)$$

$$P_2 = \frac{P}{2 \cdot \sin\beta} \quad (177)$$

4.4.16 Uygulama 16

Şekil 35'de uzamayan esnek ipe K makarasına bağlı m_1 ve m_2 kütleli, M_1 ve M_2 blokları bağlanmıştır. Blokların, makaranın ve ipin kütlelerinin ve sistemdeki sürtünmenin ihmal edildiği düşünüldüğünde, blokların hareket denklemini ve iplerde meydana gelen çekme kuvvetleri aşağıdaki gibi tespit edilmektedir (Butenin vd., 1985).



Şekil 35. Makara blok düzeneği (Butenin vd., 1985).

Şekil 35'te görüldüğü üzere sistem iki kısma ayrılmış ve iplerde meydana gelen tepki kuvvetleri T_1 ve T_2 olarak, ayrıca blokların ağırlık kuvvetleri bloklar üzerinde gösterilmiştir. Bu yeni durumda sistem öteleme hareketi yapan iki ayrı noktadan oluşmaktadır. M_1 ve M_2 bloklarına δx_1 ve δx_2 olarak virtüel hareket verilerek iki diferansiyel denklem yazılarak istenilenler bulunmaktadır.

Öncelikle ikiye ayrılan sistemin iki ayrı noktası için iki ayrı hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g - T_1 \quad (178)$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g - T_2 \quad (179)$$

M_1 ve M_2 bloklarının hareket yönleri birbirinin tersi olduğu için ivmeleri de ters işaretli olmaktadır ve aşağıdaki eşitlik oluşmaktadır.

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (180)$$

M_1 ve M_2 blokları aynı ip üzerinde yer aldıkları için blokları tutan iplerdeki tepki kuvvetleri için aşağıdaki eşitlik oluşmaktadır.

$$T_1 = T_2 = T \quad (181)$$

(180) ve (181) eşitliklerine göre hareket denklemleri aşağıdaki hali almaktadır.

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g - T \quad (182)$$

$$-m_2 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_2 g - T \quad (183)$$

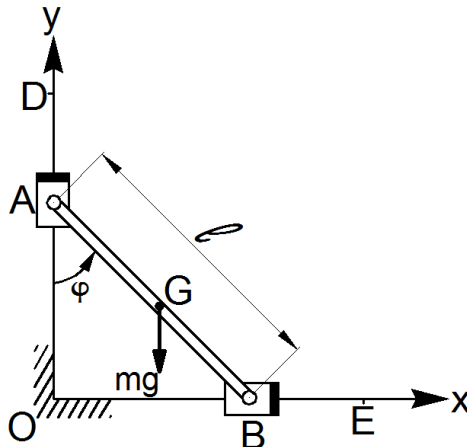
(182) ve (183) denklemlerinde iki bilinmeyen olduğu için çözülebilir durumdadırlar. Uygun matematiksel denklem çözme yöntemi kullanıldığında hareket denklemi ve ipteki tepki kuvveti için aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır.

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (184)$$

$$T = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (185)$$

4.4.17 Uygulama 17

Şekil 36'de görüldüğü üzere, uçlarında A ve B pistonları bulunan, ℓ uzunluklu, ince, homojen bir çubuk, ağırlık kuvvetinin etkisinde OD ve OE eksenleri boyunca kaymaktadır. Pistonların kütleleri ve sistemdeki sürtünmenin ihmal edildiği düşünülerek, çubuğun hareketinin diferansiyel denklemi ve açısal hızı aşağıda gibi belirlenmektedir (Butenin vd., 1985).



Şekil 36. Piston çubuk düzeneği (Butenin vd., 1985).

Şekil 36 incelendiğinde çubuğun hareketi sadece φ açısına bağlıdır. Bu nedenle sistemin serbestlik derecesi birdir. ($n=1$) Dolayısıyla genelleşmiş koordinat da φ olacaktır. ($q = \varphi$)

Çubuğun kinetik enerjisi ise aşağıdaki eşitlikle belirlenmektedir.

$$T = \frac{m.v_G^2}{2} + \frac{I_G.\omega^2}{2} \quad (186)$$

(186) eşitliğindeki ifadeler aşağıdaki gibi açıklanabilir:

- 1) T - Çubuğun kinetik enerjisi
- 2) m - Çubuğun kütlesi
- 3) v_G - Çubuğun kütle merkezinin hızı
- 4) I_G - Çubuğun hareket yüzeyine dik olan ve G ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti. $I_G = \frac{m.\ell^2}{12}$
- 5) ω - Çubuğun açısal hızı. $\omega = \dot{\varphi}$

Çubuğun kütle merkezinin hızının hesaplanabilmesi için G noktasının koordinatları aşağıdaki eşitliklerle belirlenmektedir.

$$x_G = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \sin\varphi \quad (187)$$

$$y_G = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \cos\varphi \quad (188)$$

(187) ve (188) eşitliklerinin zamana göre türevi alındığında aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$\dot{x}_G = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \quad (189)$$

$$\dot{y}_G = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \quad (190)$$

\dot{x}_G ve \dot{y}_G çubuğun kütle merkezinin hızının iz düşümlerini göstermektedir. v_G - Çubuğun kütle merkezinin hızının izdüşümleri de tespit edildiğine göre (189) ve (190) eşitliklerini de kullanarak v_G aşağıdaki eşitlikle elde edilmektedir.

$$(v_G)^2 = (\dot{x}_G)^2 + (\dot{y}_G)^2 = \frac{\ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{4} \quad (191)$$

Bulunan ifadeler (186) eşitliğindeki kinetik enerji denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$T = \frac{m \cdot \ell^2 \cdot \omega^2}{8} + \frac{m \cdot \ell^2 \cdot \omega^2}{24} = \frac{m \cdot \ell^2 \cdot \omega^2}{6} \quad (192)$$

Şekil 36'daki sistemin genelleşmiş kuvvetinin hesaplanabilmesi için sistemin potansiyel enerjisi aşağıda gibi olacaktır.

$$\Pi = \frac{m \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \varphi}{2} \quad (193)$$

Çubuk tamamen yatay pozisyonda olduğu anda ise potansiyel enerji aşağıda gibi sifıra eşit olacaktır.

$$\Pi_0 = 0 \quad (194)$$

Sistemin genelleşmiş koordinatına uygun olarak genelleşmiş kuvvet ise aşağıdaki gibidir.

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin \varphi}{2} \quad (195)$$

Lagrange denkleminin en genel hali de aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q \quad (196)$$

Kinetik enerji ifadesinin açısal hıza göre kısmi türevi ve bunun zamana göre türevi ise aşağıda gibi olmaktadır.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m \cdot \ell^2 \cdot \dot{\varphi}}{3} \quad (197)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \cdot \ell^2 \cdot \dot{\varphi}}{3} \right) = \frac{m \cdot \ell^2 \cdot \ddot{\varphi}}{3} \quad (198)$$

Kinetik enerji φ açısına bağlı olmadığı için, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerli olacaktır.

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (199)$$

(199) eşitliğine göre (198) eşitliği aşağıda gibi düzenlenebilmektedir.

$$\frac{m \cdot \ell^2 \cdot \ddot{\varphi}}{3} = \frac{m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin \varphi}{2} \quad (200)$$

Çubuğa ait açısal ivme ise aşağıda gibi bulunmaktadır.

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{3g}{2\ell} \cdot \sin \varphi \quad (201)$$

Genelleşmiş açısal hızın bulunabilmesi için (201) eşitliğinin her iki tarafı $d\varphi$ ile çarpılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\ddot{\varphi} \cdot d\varphi = \frac{3g}{2\ell} \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (202)$$

(202) eşitliği düzenlenecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\ddot{\varphi} \cdot d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot d\varphi = \dot{\varphi} \cdot d\dot{\varphi} = d \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right) = - \frac{3g}{2\ell} \cdot d\cos \varphi \quad (203)$$

(203) eşitliğinde koyu renkle gösterilen kısmın her iki tarafının integrali alındığında aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$\int d \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right) = \int - \frac{3g}{2\ell} \cdot d\cos \varphi \quad (204)$$

$$\dot{\varphi}^2 = -3 \cdot \frac{g}{\ell} \cdot \cos\varphi + C \quad (205)$$

İntegral sabiti C, çubuğun hareketinin başlangıç şartlarından bulabilmektedir. Çubuk harekete durağan halden başladığı için $\varphi = \varphi_0$ ve $\dot{\varphi} = 0$ olur. Bu durumda C sabiti aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$C = \frac{3g}{\ell \cdot \cos\varphi_0} \quad (206)$$

Bulunan C sabiti (205) eşitliğinde yerine yazılırsa açısal hız aşağıdaki eşitlikle bulunmaktadır.

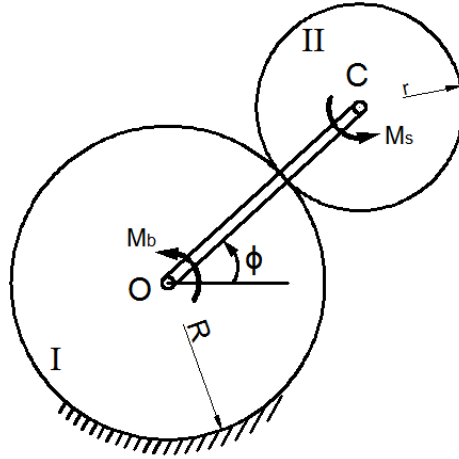
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{\ell} \cdot (\cos\varphi_0 - \cos\varphi) \quad (207)$$

4.4.18 Uygulama 18

Şekil 37’de II numaralı disk şeklindeki cisim bir gezegeni temsil etmekte ve kütlesi m_2 ’dir. II numaralı gezegen OC çark kolu ile I numaralı cisme bağlıdır. II numaralı gezegen hem kendi merkezi (C noktası) etrafında dönebilmekte hem de OC çark kolu aracılığıyla O merkezi etrafında dönebilmektedir. OC çark kolunun kütlesi ise m_1 ’dir. M_b ile gösterilen moment “burucu momenttir” ve aşağıdaki formül ile ifade edilmektedir (Butenin vd., 1985).

$$M_b = M_0 - \kappa \cdot \omega \quad (208)$$

(208) formülündeki M_0 ve κ pozitif sabitlerdir, ω ise çark kolunun açısal hızıdır. Şekil 37’deki M_s sürtünme momentidir ve sabit kabul edilecektir. Bu sistemde OC çark kolunun açısal hızının, ω , değişim kanunu aşağıdaki gibi belirlenmektedir (Butenin vd., 1985).



Şekil 37. Gezegen çark kolu mekanizması (Butenin vd., 1985).

Şekil 37’de de görüldüğü üzere sistemin hareketi çark kolunun hareketine bağlıdır. Çark kolunun hareketi de φ açısının değişimine bağlı olduğu için sistemin bir serbestlik derecesi vardır ve genelleşmiş koordinat olarak φ açısı kabul edilebilir. Bu sistemin kinetik enerjisi aşağıdaki eşitliklerle belirlenmektedir.

$$T = T_1 + T_2 \quad (209)$$

$$T_1 = \frac{I_1 \cdot \omega^2}{2} \quad (210)$$

$$I_1 = \frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot (r + R)^2 \quad (211)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (212)$$

(211) ve (212) eşitliklerine göre T_1 aşağıdaki gibi düzenlenmektedir.

$$T_1 = \frac{1}{6} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot m_1 \cdot (r + R)^2 \quad (213)$$

II numaralı disk şeklindeki gezegen yassı hareket yaptığından kinetik enerjisi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_C^2 + \frac{1}{2} \cdot I_C \cdot \omega_{II}^2 \quad (214)$$

(214) eşitliğinde v_C gezegenin kütle merkezinin hızı, I_C gezegenin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti, ω_{II} ise gezegenin açısal hızıdır. (214) eşitliği, eşitlikteki ifadeler aşağıdaki gibi açılımlarıyla verilerek tekrar düzenlenmiştir.

$$v_C = (r + R) \cdot \omega_{II} = (r + R) \cdot \dot{\varphi} \quad (215)$$

$$I_C = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r^2 \quad (216)$$

$$\omega_{II} = \frac{R+r}{r} \cdot \omega = \frac{R+r}{r} \cdot \dot{\varphi} \quad (217)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (r + R)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot r^2 \cdot \frac{(R+r)^2}{r^2} \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (218)$$

$$T_2 = \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot (r + R)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (219)$$

Bu durumda (209) eşitliği tekrar yazılacak olursa aşağıdaki hali almaktadır.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \cdot I_{getir} \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (220)$$

I_{getir} ise (214) ve (219) eşitliklerinden gelen terimlerin bir kısaltmasıdır ve aşağıdaki gibidir.

$$I_{getir} = \left(\frac{1}{3} \cdot m_1 + \frac{3}{2} \cdot m_2 \right) \cdot (r + R)^2 \quad (221)$$

Uygulama 13'te yer alan (152) eşitliğine göre sistemin genelleşmiş kuvveti mevcut çözüme uyarlanması aşağıdaki gibidir.

$$Q_\varphi = M_b - M_s \cdot \frac{R}{r} = (M_0 - \kappa \cdot \omega) - M_s \cdot \frac{R}{r} = M_0 - M_s \cdot \frac{R}{r} - \kappa \cdot \dot{\varphi} \quad (222)$$

Lagrange'nin 2. tür denklemini mevcut uygulamaya uyarlanırsa aşağıdaki eşitlikler yazılmaktadır.

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \quad (223)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{getir}} \cdot \dot{\varphi} \quad (224)$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{getir}} \cdot \ddot{\varphi} \quad (225)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (226)$$

(223)-(226) arası eşitlikleri kullanarak (222) eşitliği tekrar düzenlenecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$I_{\text{getir}} \cdot \ddot{\varphi} = M_0 - M_s \cdot \frac{R}{r} - \kappa \cdot \dot{\varphi} \quad (227)$$

(227) eşitliği bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü M_s sabit değerine göre çözümlendiğinde açısal hız değeri aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{\kappa} \cdot \left(M_0 - M_s \cdot \frac{R}{r} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{I_{\text{getir}}} \cdot t} \right) \quad (228)$$

t -zaman ifadesi sonsuza yaklaştığında aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{I_{\text{getir}}} \cdot t} \right) = 1 - 0 = 1 \quad (229)$$

$$\omega_{\text{getir}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \left(M_0 - M_s \cdot \frac{R}{r} \right) \quad (230)$$

4.4.19 Uygulama 19

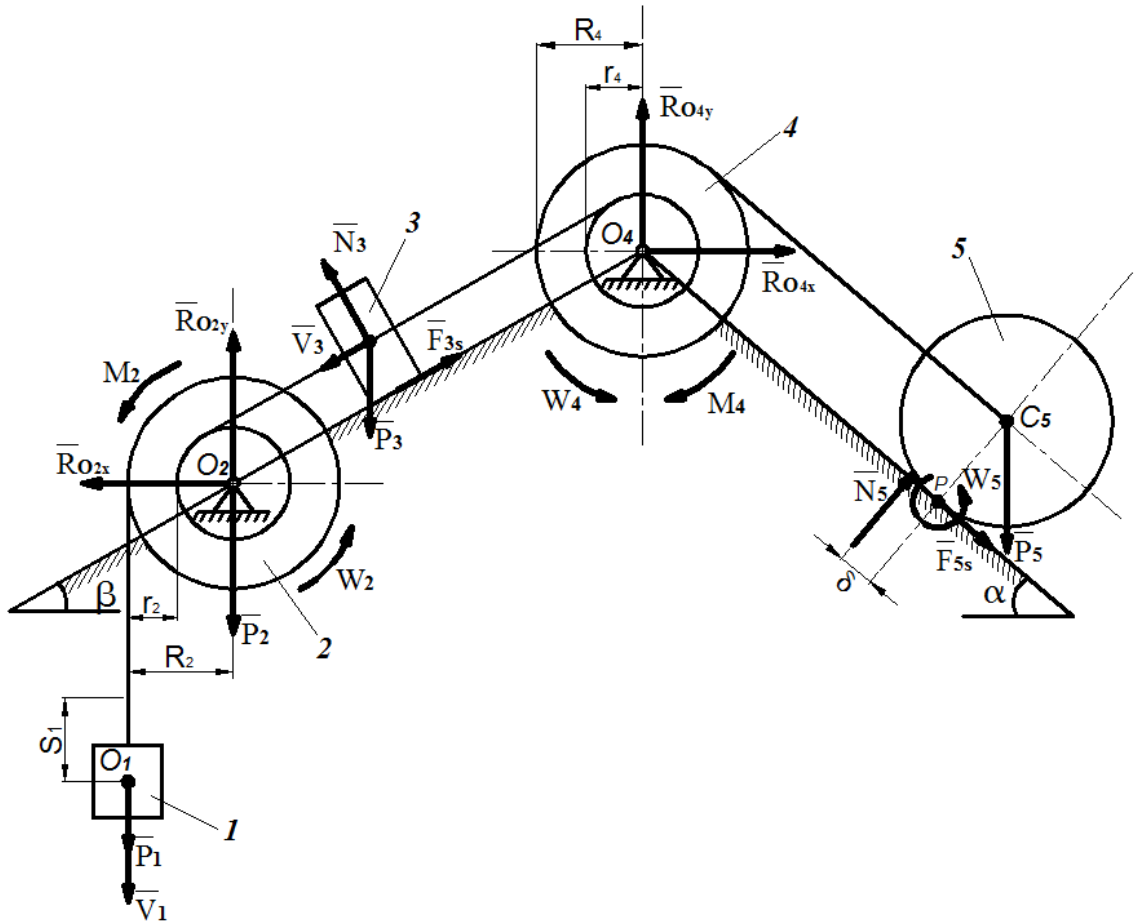
Şekil 38'de görülen eğik düzleme iki kasnak monte edilmiştir. Kasnaklara iki yük ve bir adet sildir bağlanarak sistem dengeye getirilmeye çalışılmıştır. Bu sistemde 1 numaralı yükün kütlesi m_1 'dir. 2 numaralı kasnağın yarıçapları r_2 ve R_2 , atalet yarıçapı ρ_2 , kütlesi

m_2 'dir ve bu kasnağa etki eden M_2 momentini bulunmaktadır. 3 numaralı yükün kütlesi m_3 , yük ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı f ile ifade edilmektedir. 4 kasnağının yarıçapları r_4 ve R_4 , atalet yarıçapı ρ_4 ve bu kasnağa etki eden M_4 momentini bulunmaktadır. 5 numaralı silindirin kütlesi m_5 ve yuvarlanma sürtünme katsayısı δ ile ifade edilmektedir. Eğik düzlem için verilen α ve β açıları bulunmaktadır. Bu verilere göre 1 numaralı yükün ivmesi aşağıdaki gibi tespit edilmektedir (Butenin vd., 1985).

Sistemin hareketi 1 numaralı yükün hareketine bağlıdır. 1 numaralı yükte S_1 yer değiştirmesi meydana geldiğinde sistem hareket edecek ve tüm mekanizma harekete geçecektir. Bu nedenle sistem bir serbestlik derecesine sahiptir ve $q_1 = S_1$ olacaktır.

Bu sistem için Lagrange'nin 2. tür denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_{S_1} \quad (231)$$



Şekil 38. Eğik düzlem kasnak düzeneği (Butenin vd., 1985).

Sistemin durağan halden harekete başladığı düşünülduğünde toplam kinetik enerji ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5, \quad T_0 = 0 \quad (232)$$

Bu mekanizmada 1 numaralı yük öteleme, 2 numaralı kasnak dönme, 3 numaralı yük öteleme, 4 numaralı kasnak dönme ve 5 numaralı silindi yuvarlanarak öteleme (yassı hareket) yapmaktadır. Buna göre her bir cismin kinetik enerjisi aşağıdaki eşitliklerle bulunmaktadır.

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{P_1}{2g} \cdot v_1^2 \quad (233)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \omega_2^2 = \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{2} \cdot \frac{v_1^2}{R_2^2} = \frac{P_2}{2g} \cdot \frac{\rho_2^2}{R_2^2} \cdot v_1^2 \quad (234)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_3^2 = \frac{P_3}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot v_1^2 \quad (235)$$

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot I_4 \cdot \omega_4^2 = \frac{m_4 \cdot \rho_4^2}{2} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{v_1^2}{r_4^2} = \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{\rho_4^2}{r_4^2} \cdot v_1^2 \quad (236)$$

$$T_5 = \frac{1}{2} \cdot m_5 \cdot v_{C_5}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{C_5} \cdot \omega_5^2 = \frac{P_5}{2g} \cdot v_{C_5}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P_5}{g} \cdot R_5^2 \cdot \frac{v_{C_5}^2}{R_5^2} \quad (237)$$

$$T_5 = \frac{3 \cdot P_5}{4g} \cdot v_{C_5}^2 = \frac{3 \cdot P_5}{4g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{R_4^2}{r_4^2} \cdot v_1^2 \quad (238)$$

Yukarıdaki eşitliklerle belirlenen sistemdeki cisimlerin kinetik enerjileri (232) eşitliğinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$T = v_1^2 \cdot \left(\frac{P_1}{2g} + \frac{P_2}{2g} \cdot \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{P_3}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} + \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{\rho_4^2}{r_4^2} + \frac{3 \cdot P_5}{4g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{R_4^2}{r_4^2} \right) \quad (239)$$

Yer değiştirmenin zamana göre türevi hızı verdiği için aşağıdaki eşitlik yazılmaktadır.

$$\partial \dot{S}_1 = \partial v_1 \quad (240)$$

Bu durumda (231) eşitliği ile ilgili aşağıdaki gibi düzenlemeler yapılabilmektedir.

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = \frac{\partial T}{\partial v_1} = 2v_1 \cdot \left(\frac{P_1}{2g} + \frac{P_2}{2g} \cdot \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{P_3}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} + \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{\rho_4^2}{r_4^2} + \frac{3 \cdot P_5}{4g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{R_4^2}{r_4^2} \right) \quad (241)$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial S_1} = 2 \cdot a_1 \cdot \left(\frac{P_1}{2g} + \frac{P_2}{2g} \cdot \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{P_3}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} + \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{\rho_4^2}{r_4^2} + \frac{3 \cdot P_5}{4g} \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot \frac{R_4^2}{r_4^2} \right) \quad (242)$$

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0, \quad S_1 = \text{sabit} \quad (243)$$

Sistemdeki kuvvetler için virtüel işler prensibi denklemini yazılacak olursa aşağıdaki eşitlikler karşımıza çıkacaktır.

$$Q_{S_1} \cdot \delta S_1 = \delta A \quad (244)$$

$$\begin{aligned} \delta A = & \delta A. (\bar{P}_1) + \delta A. (\bar{P}_2) + \delta A. (\bar{R}_{O_{2x}}) + \delta A. (\bar{R}_{O_{2y}}) + \delta A. (M_2) + \delta A. (\bar{P}_3) + \delta A. (\bar{N}_3) + \\ & \delta A. (\bar{F}_{3s}) + \delta A. (\bar{P}_4) + \delta A. (\bar{R}_{O_{4x}}) + \delta A. (\bar{R}_{O_{4y}}) + \delta A. (M_4) + \delta A. (\bar{P}_5) + \delta A. (\bar{N}_5) + \\ & \delta A. (M_s) + \delta A. (\bar{F}_{5s}) \end{aligned} \quad (245)$$

(245) eşitliğindeki terimleri δS_1 ifadesini içerecek şekilde düzenlenecek olursa aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$\delta A. (\bar{P}_1) = P_1 \cdot \delta S_1 \quad (246)$$

$$\delta A. (M_2) = M_2 \cdot \delta \varphi_2 = M_2 \cdot \frac{\delta S_1}{R_2} \quad (247)$$

$$\delta A. (\bar{P}_3) = P_3 \cdot \delta S_3 \cdot \sin \beta = P_3 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \beta \cdot \delta S_1 \quad (248)$$

$$\delta A. (\bar{F}_{3s}) = -f \cdot P_3 \cdot \cos \beta \cdot \delta S_3 = -f \cdot P_3 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \cos \beta \cdot \delta S_1 \quad (249)$$

$$\delta A. (M_4) = -M_4 \cdot \delta \varphi_4 = -M_4 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{\delta S_1}{r_4} \quad (250)$$

$$\delta A. (\bar{P}_5) = -P_5. \delta S_5. \sin\alpha = -P_5. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \delta S_1. \sin\alpha \quad (251)$$

$$\delta A. (M_5) = -M_5. \delta\varphi_5 = -\delta. N_5. \delta\varphi_5 = -\delta. P_5. \cos\alpha. \delta\varphi_5 = -\delta. P_5. \cos\alpha. \frac{S_5}{R_5} \quad (252)$$

$$\delta A. (M_5) = -\delta. P_5. \cos\alpha. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \frac{\delta S_1}{R_5} \quad (253)$$

$$\delta A. (\bar{F}_{5_s}) = 0 \quad (254)$$

\bar{F}_{5_s} değerinin sıfır olmasının sebebi, bu kuvvetin ani hızlar merkezine doğru yönelmiş olmasından kaynaklanmaktadır.

Sistemdeki kuvvetlerin yaptıkları işler δS_1 cinsinden yazılmasının ardından (245) eşitliği aşağıdaki hali alacaktır.

$$\delta A = \delta S_1 \left(P_1 + P_3. \frac{r_2}{R_2}. \sin\beta + \frac{M_2}{R_2} - f. P_3. \frac{r_2}{R_2}. \cos\beta - M_4. \frac{r_2}{R_2}. \frac{1}{r_4} - P_5. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \sin\alpha - \delta. P_5. \cos\alpha. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \frac{1}{R_5} \right) \quad (255)$$

S_1 yer değiştirmesi cinsinden genelleşmiş kuvvet yazacak olursak aşağıdaki eşitlik geçerli olacaktır.

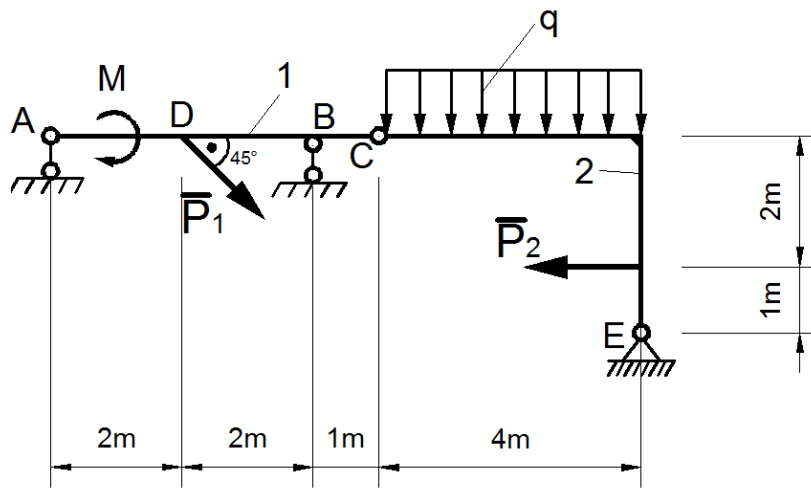
$$Q_{S_1} = \frac{\delta A}{\delta S_1} = \left(P_1 + P_3. \frac{r_2}{R_2}. \sin\beta + \frac{M_2}{R_2} - f. P_3. \frac{r_2}{R_2}. \cos\beta - M_4. \frac{r_2}{R_2}. \frac{1}{r_4} - P_5. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \sin\alpha - \delta. P_5. \cos\alpha. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \frac{1}{R_5} \right) \quad (256)$$

(242), (243) ve (256) eşitliklerini Lagrange'ın 2. tür denklemi olarak yazılan (231) eşitliğinde yerlerine yazıldığında ivmenin değişimini veren eşitlik aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$a_1 = \left(P_1 + P_3. \frac{r_2}{R_2}. \sin\beta + \frac{M_2}{R_2} - f. P_3. \frac{r_2}{R_2}. \cos\beta - M_4. \frac{r_2}{R_2}. \frac{1}{r_4} - P_5. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \sin\alpha - \delta. P_5. \cos\alpha. \frac{R_4}{r_4}. \frac{r_2}{R_2}. \frac{1}{R_5} \right) \div 2. \left(\frac{P_1}{2g} + \frac{P_2}{2g}. \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{P_3}{2g}. \frac{r_2^2}{R_2^2} + \frac{P_4}{2g}. \frac{r_2^2}{R_2^2}. \frac{\rho_4^2}{r_4^2} + \frac{3.P_5}{4g}. \frac{r_2^2}{R_2^2}. \frac{R_4^2}{r_4^2} \right) \quad (257)$$

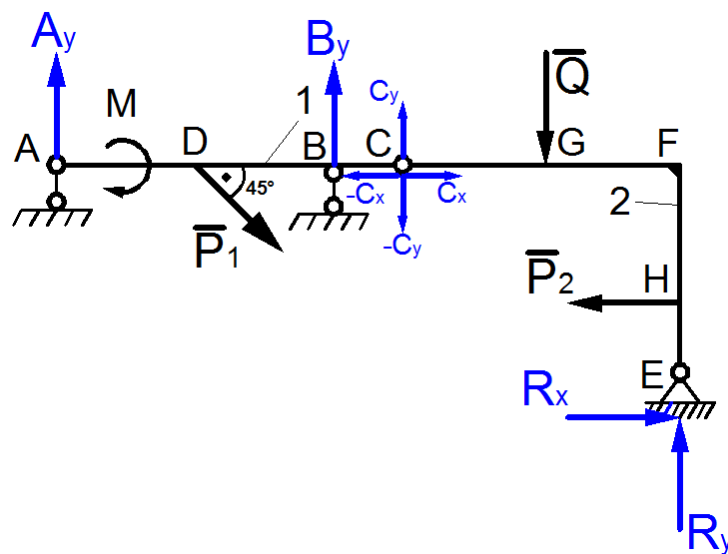
4.4.20 Uygulama 20

Şekil 39'daki düzenek AC çubuğu ve CE parçasından oluşmakta ve iki eleman C mesnediyle birleştirilmektedir. Düzenek, şekil 39'da görüldüğü üzere, \bar{P}_1 , \bar{P}_2 yüklerine, q yayılı yüküne ve M momentine maruz kalmıştır. C mesnedi haricinde A, B ve E mesnetleri ile desteklenen düzenekte, mesnetlerdeki tepki kuvvetleri, öncelikle statik denge denklemleriyle çözümlenip, virtüel işler prensibiyle de çözülebileceği kanıtlanmaya çalışılacaktır. ($P_1 = 4\text{kN}$, $P_2 = 6\text{kN}$, $M = 4\text{kN.m}$, $q=2\text{kN/m}$, $Q=2.4=8\text{kN}$) (Butenin vd., 1985).



Şekil 39. Farklı yüklemeli mesnet-çubuk-parça düzenegi (Butenin vd., 1985).

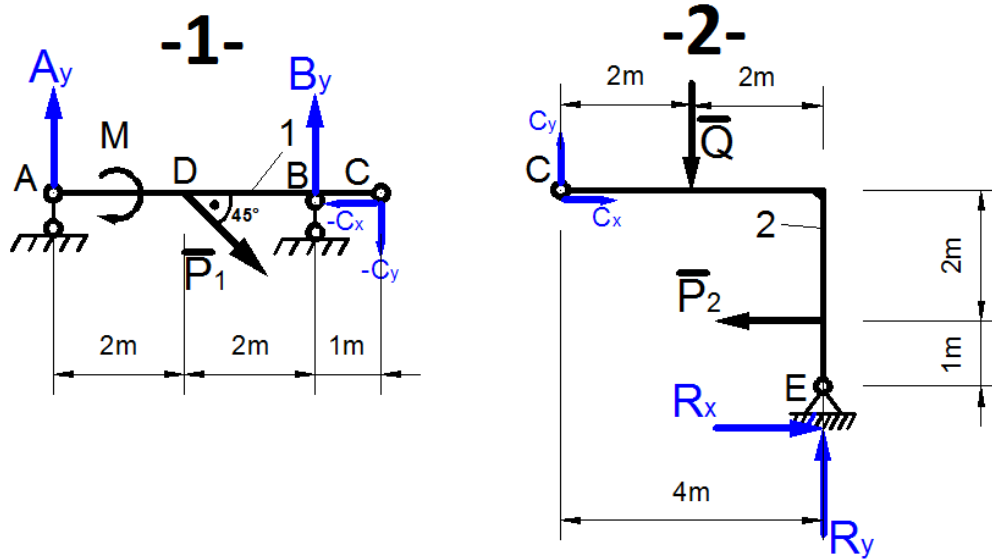
Bu düzeneg'e ait serbest cisim diyagramı Şekil 40'ta verilmiştir.



Şekil 40. Şekil 39'daki düzenegin serbest cisim diyagrami.

Şekil 40'ta görüldüğü üzere, A,B ve E mesnetlerindeki tepki kuvvetlerinin tespit edilmesi gerekmektedir. Toplamda belirlenmesi gereken dört adet tepki kuvveti bulunmaktadır. C noktası düğüm noktası olduğu için AC çubuğu ve CE parçalarından kaynaklanan tepki kuvvetleri birbirini dengelemektedir ve neticede C noktasındaki tepki kuvveti sıfırdır.

Statik Denge Denklemleriyle Çözüm: Statik denge denklemleriyle mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini belirleyebilmek için C noktası düğüm noktası gibi kabul edilip sistem şekil 41'de görüldüğü gibi ikiye ayrılacak ve iki ayrı şekil için statik denge denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 41. Şekil 39'daki düzeneğin ikiye ayrılmış halinin serbest cisim diyagramı.

Şekil 41.1 için Statik Denge Denklemleri:

$$\sum F_x = P_1 \cdot \cos 45^\circ - C_x = 0 \quad (258)$$

$$C_x = 2,83 \text{ kN} \quad (259)$$

$$\sum F_y = A_y + B_y - C_y - P_1 \cdot \sin 45^\circ = 0 \quad (260)$$

$$A_y + B_y - C_y = 2,83 \quad (261)$$

$$\sum M_C = -M - A_y \cdot 5 + P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - B_y \cdot 1 = 0 \quad (262)$$

$$5 \cdot A_y + B_y = 4,49 \quad (263)$$

Şekil 41.2 için Statik Denge Denklemleri:

$$\sum F_x = C_x - P_2 + R_x = 0 \quad (264)$$

$$R_x = 3,17 \text{ kN} \quad (265)$$

$$\sum F_y = C_y - Q + R_y = 0 \quad (266)$$

$$C_y + R_y = 8 \quad (267)$$

$$\sum M_C = -Q \cdot 2 - P_2 \cdot 2 + R_x \cdot 3 + R_y \cdot 4 = 0 \quad (268)$$

$$R_y = 4,62 \text{ kN} \quad (269)$$

(269) eşitliğindeki değer (267) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki değer elde edilmiştir.

$$C_y = 3,38 \text{ kN} \quad (270)$$

(270) eşitliğindeki değer (261) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir.

$$A_y + B_y = 6,21 \quad (271)$$

(263) ve (271) eşitlikleri kullanılarak A_y ve B_y aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

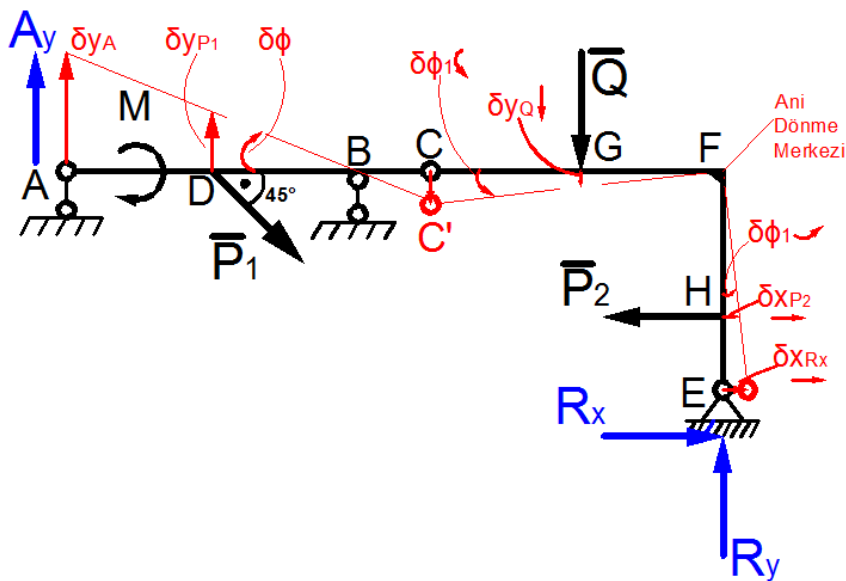
$$A_y = -0,43 \text{ kN}, \quad B_y = 6,64 \text{ kN} \quad (272)$$

Statik denge denklemleriyle yapılan çözüm neticesinde bulunması gereken dört tepki kuvvetinin sonuçları aşağıdaki gibi olmaktadır.

- 1) $A_y = -0,43 \text{ kN}$
- 2) $B_y = 6,64 \text{ kN}$
- 3) $R_x = 3,17 \text{ kN}$
- 4) $R_y = 4,62 \text{ kN}$

Statik denge denklemleriyle elde sonuçların virtüel işler prensibiyle de elde edilebilir olması gerekmektedir. C noktası düğüm noktası olduğu için AC çubuğu ve CE parçalarından kaynaklanan tepki kuvvetleri birbirini dengelemektedir ve neticede C noktasındaki tepki kuvveti sıfırdır. Bu nedenle virtüel işler prensibiyle çözüm yapılırken C noktasındaki yükler dikkate alınmayacaktır. Neticede dört adet tepki kuvveti bulunması gerektiğinden sisteme dört adet virtüel hareket verilip, dört adet denklem elde edilecek ve denklemler çözülüp sonuca gidilecektir.

1 Numaralı Virtüel Hareket: Bu ilk virtüel harekette A-C çubuğu B mesnedi etrafında dönmektedir. Bu nedenle B noktasındaki B_y kuvveti iş yapmamaktadır. Şekil 42'de aşağıya doğru kayan C noktası C-E elemanını Ani dönme merkezi (F noktası) etrafında döndürmektedir.



Şekil 42. Şekil 39'daki düzeneğin 1 numaralı virtüel hareketi

1 numaralı virtüel harekete göre sistem üzerindeki yüklerin yapmış oldukları işler aşağıda maddeler halinde açıklanmıştır:

- 1) E mesnedi +x yönünde ötelenir. (R_x kuvveti ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 2) P_2 kuvvetinin etki noktası olan H noktası +x yönünde ötelenir. (P_2 kuvveti ile zıt yönlü, negatif iş)
- 3) Q kuvvetinin etki noktası olan G noktası -y yönünde ötelenir. (Q kuvveti ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 4) C noktası -y yönünde ötelenir. (Bu nokta düğüm noktası olduğu için, iç kuvvetlerin virtüel iş prensibine göre iş yapmadığını unutulmamalıdır.)
- 5) P_1 kuvvetinin etkidiği D noktası +y yönünde ötelenir. (P_1 kuvvetinin düşey bileşeni ile zıt yönlü, negatif iş)
- 6) M momentinin etkidiği AC çubuğu saat yönünde dönüş yapar. (M momenti ile zıt yönlü, pozitif iş.)
- 7) A mesnedi de +y yönünde ötelenir. (A_y kuvveti ile aynı yönlü, pozitif iş)

Yukarıda yazılan yedi maddeye göre 1 numaraları virtüel hareket için toplam virtüel iş denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\sum \delta A_k = A_y \cdot \delta y_A + M \cdot \delta \varphi - P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta y_{P_1} + Q \cdot \delta y_Q - P_2 \cdot \delta x_{P_2} + R_x \cdot \delta x_{R_x} = 0 \quad (273)$$

Virtüel hareketler x ve y eksenini doğrultusunda meydana gelmektedir. Virtüel iş prensibini uygulayabilmek için (272) denklemindeki kuvvetlere ait ötelemelerin $\delta \varphi$ cinsinden yazılması gerekmektedir. Bu durum için aşağıdaki eşitlikler yazılmaktadır.

$$\delta y_A = \delta \varphi \cdot 4 \quad (274)$$

$$\delta y_{P_1} = \delta \varphi \cdot 2 \quad (275)$$

$$\delta y_Q = \delta \varphi_1 \cdot 2 \quad (276)$$

$$\delta x_{P_2} = \delta \varphi_1 \cdot 2 \quad (277)$$

$$\delta x_{R_x} = \delta \varphi_1 \cdot 3 \quad (278)$$

Şimdi $\delta \varphi_1$ dönüşünün $\delta \varphi$ cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. Bunun için BCC' ile FCC' üçgenlerinden yararlanılmıştır. Bu iki üçgende bulunan CC' kenarı $\delta \varphi$ ve $\delta \varphi_1$ cinsinden yazılıp birbirine eşitlendiğinizde $\delta \varphi_1$ açısı $\delta \varphi$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\delta \varphi = \delta \varphi_1 \cdot 4 \quad (279)$$

(274)-(279) arası eşitlikler kullanılarak (273) eşitliği düzenlenecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\sum \delta A_k = A_y \cdot \delta \varphi \cdot 4 + M \cdot \delta \varphi - P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta \varphi \cdot 2 + Q \cdot \delta \varphi \cdot 0,5 - P_2 \cdot \delta \varphi \cdot 0,5 + R_x \cdot \delta \varphi \cdot 0,75 = 0 \quad (280)$$

(280) eşitliği $\delta \varphi$ parantezine alınır ve kuvvetlerin sayısal değerleri yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

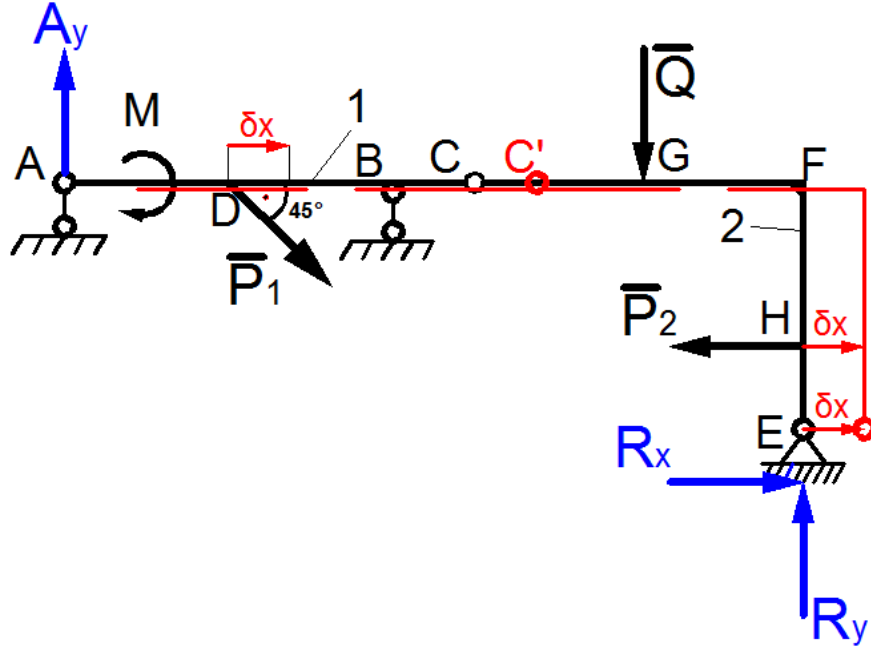
$$\delta \varphi \cdot (A_y \cdot 4 + R_x \cdot 0,75 - 0,68) = 0 \quad (281)$$

(281) eşitliğinde $\delta \varphi \neq 0$ olduğu için eşitliğin parantez içindeki kısmı sıfıra eşitlenir ve aşağıdaki iki bilinmeyenli denklem elde edilmektedir.

$$A_y \cdot 4 + R_x \cdot 0,75 = 0,68 \quad (282)$$

2 Numaralı Virtüel Hareket: Bu 2 numaralı virtüel harekette, sistemin tamamı, herhangi bir dönüş olmadan +x yönünde ötelenmektedir. Burada iş yapan kuvvetler sadece P_1 kuvvetinin yatay bileşeni, P_2 kuvveti ve R_x tepki kuvvetidir. Bu kuvvetlerin yaptıkları işleri aşağıda maddeler halinde açıklanmıştır:

- 1) E mesnedi +x yönünde ötelenir. (R_x ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 2) H noktası +x yönünde ötelenir. (P_2 ile zıt yönlü, negatif iş)
- 3) D noktası +x yönünde ötelenir. (P_1 'in yatay bileşeni ile aynı yönlü, pozitif iş)



Şekil 43. Şekil 39'daki düzeneğin 2 numaralı virtüel hareketi.

Yukarıda yazılan üç maddeye göre 2 numaralı virtüel hareket için toplam virtüel iş denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\sum \delta A_k = P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta x - P_2 \cdot \delta x + R_x \cdot \delta x = 0 \quad (283)$$

(283) denklemi δx parantezine alınıp tekrar düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\delta x \cdot (P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_2 + R_x) = 0 \quad (284)$$

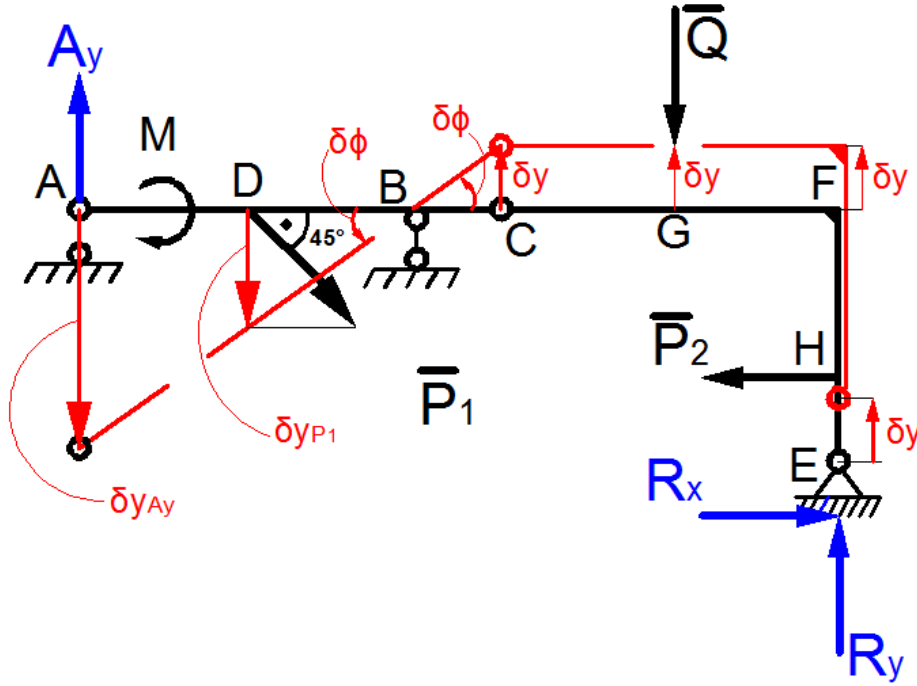
$\delta x \neq 0$ olduğuna göre (284) denkleminin sol tarafındaki parantez sifira eşitlenip düzenlendiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$R_x = P_2 - P_1 \cdot \cos 45^\circ \quad (285)$$

P_2 ve P_1 kuvvetlerinin sayısal değerleri (285) eşitliğinde yerlerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

$$R_x = 3,17 \text{ kN} \quad (286)$$

3 Numaralı Virtüel Hareket: Bu 3 numaraları virtüel öteleme hareketinde C-E parçası herhangi bir dönüş hareketi olmadan +y yönünde yukarı doğru ötelenmektedir. C noktası da aynı miktarda ötelenirken, A-C çubuğu B noktası etrafında saat yönünün tersi istikametinde bir dönüş yapmaktadır. Burada iş yapan kuvvetler R_y , Q , P_1 'in düşey bileşeni ve A_y 'dir. A-C çubuğu dönüş yaptığı için M momenti de iş yapmaktadır.



Şekil 44. Şekil 39'daki düzeneğin 3 numaralı virtüel hareketi.

Bu virtüel harekette yapılan işler ayrıntılı olarak aşağıda maddeler halinde belirtilmiştir.

- 1) E noktası +y yönünde ötelenir. (R_y ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 2) G noktası +y yönünde ötelenir. (Q ile zıt yönlü, negatif iş)
- 3) D noktası -y yönünde ötelenir. (P_1 'in düşey bileşeni ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 4) A noktası -y yönünde ötelenir. (A_y ile zıt yönlü, negatif iş)
- 5) A-C çubuğu saat yönünün tersi istikamette dönüş yapar. (M momenti ile zıt yönlü, negatif iş)

Yukarıda yazılan beş maddeye göre 3 numaraları virtüel hareket için toplam virtüel iş denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\sum \delta A_k = -A_y \cdot \delta y_A - M \cdot \delta \phi + P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta y_{P_1} + Q \cdot \delta y + R_y \cdot \delta y = 0 \quad (287)$$

Tüm y doğrultusundaki ötelemeler, aşağıdaki gibi $\delta\varphi$ cinsinden ifade edilmektedir.

$$\delta y_A = 4. \delta\varphi \quad (288)$$

$$\delta y_{P_1} = 2. \delta\varphi \quad (289)$$

$$\delta y = 1. \delta\varphi \quad (290)$$

Bu durumda (287) eşitliği aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilmektedir.

$$\sum \delta A_k = -A_y. 4. \delta\varphi - M. \delta\varphi + P_1. \sin 45^\circ. 2. \delta\varphi + Q. \delta\varphi + R_y. \delta\varphi = 0 \quad (291)$$

(291) denklemini $\delta\varphi$ parantezine alınıp tekrar düzenlenecek olursa aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\delta\varphi. (-A_y. 4. -M. + P_1. \sin 45^\circ. 2 + Q + R_y) = 0 \quad (292)$$

$\delta\varphi \neq 0$ olduğuna göre (292) denkleminin sol tarafındaki parantez sıfıra eşitlenip düzenlendiğinde aşağıdaki gibi bir eşitlik elde edilmektedir.

$$-A_y. 4. -M. + P_1. \sin 45^\circ. 2 + Q + R_y = 0 \quad (293)$$

(293) denklemini, bilinen kuvvetler ve moment değerleri yerlerine yazılıp düzenlendiğinde ise aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$R_y - A_y. 4 = 6,34 \quad (294)$$

Neticede üç adet virtüel hareket için aşağıdaki gibi üç adet eşitlik elde edilmiştir.

$$1) A_y. 4 + R_x. 0,75 = 0,68$$

$$2) R_x = 3,17 \text{ kN}$$

$$3) R_y - A_y. 4 = 6,34$$

Bulunan R_x değeri 1 numaralı eşitlikte yerine yazıldığında aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

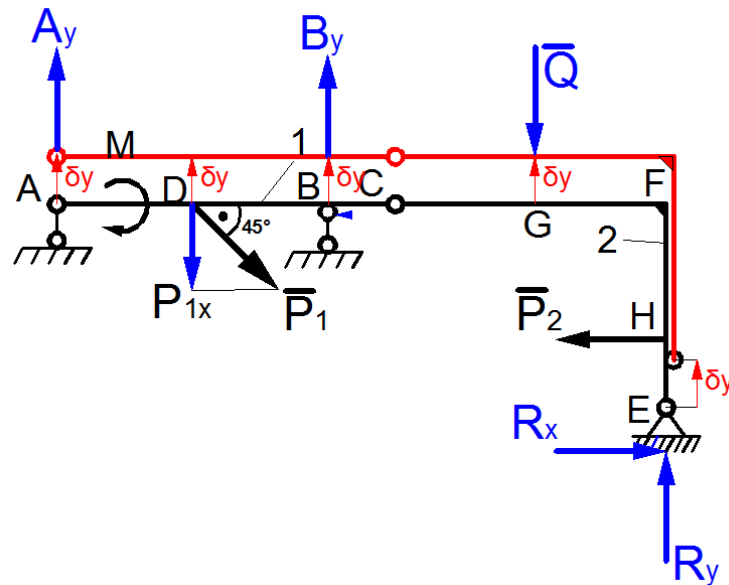
$$A_y = -0,42 \text{ kN} \quad (295)$$

Bulunan bu A_y değeri 3 numaralı denklemde yerine yazılarak aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

$$R_y = 4,66 \text{ kN} \quad (296)$$

4 Numaralı Virtüel Hareket: Bu 4 numaralı virtüel harekette, sistemin tamamı, herhangi bir dönüş olmadan +y yönünde ötelenmektedir. Burada iş yapan kuvvetler sadece P_1 kuvvetinin düşey bileşeni A_y , B_y ve R_y tepki kuvvetleridir. Bu kuvvetlerin yaptıkları işler aşağıda maddeler halinde açıklanmıştır:

- 1) A mesnedi +y yönünde ötelenir. (A_y ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 2) D noktası +y yönünde ötelenir. (P_{1x} ile zıt yönlü, negatif iş)
- 3) B noktası +y yönünde ötelenir. (B_y ile aynı yönlü, pozitif iş)
- 4) G noktası +y yönünde ötelenir. (\bar{Q} ile zıt yönlü, negatif iş)
- 5) E noktası +y yönünde ötelenir. (R_y ile aynı yönlü, pozitif iş)



Şekil 45. Şekil 39'daki düzeneğin 4 numaralı virtüel hareketi.

Yukarıda yazılan beş maddeye göre 4 numaraları virtüel hareket için toplam virtüel iş denklemi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\sum \delta A_k = A_y \cdot \delta y - P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta y + B_y \cdot \delta y - Q \cdot \delta y + R_y \cdot \delta y = 0 \quad (297)$$

(297) denklemi δy parantezine alınıp tekrar düzenlenecek olursa aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\delta y (A_y - P_1 \cdot \sin 45^\circ + B_y - Q + R_y) = 0 \quad (298)$$

$\delta y \neq 0$ olduğuna göre (298) denkleminin sol tarafındaki parantez sifıra eşitlenip B_y aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$B_y = 6,59 \text{ kN} \quad (299)$$

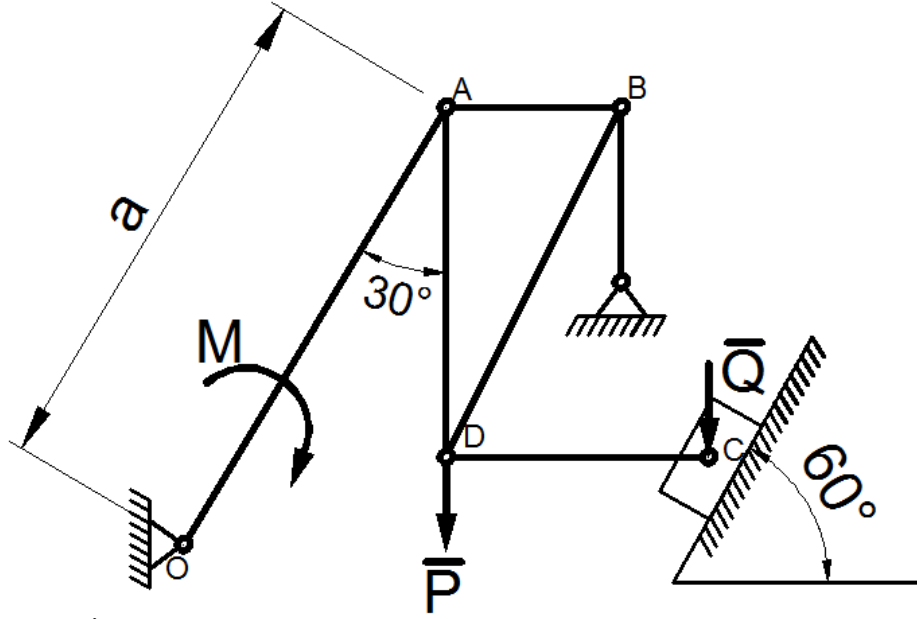
Statik denge denklemleri ve virtüel işler prensibi ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır.

Tepki Kuvveti	Virtüel İşler Prensibine Göre Sonuç (kN)	Statik Denge Denklemlerine Göre Sonuç (kN)
A_y	-0,42	-0,43
B_y	6,59	6,64
R_x	3,17	3,17
R_y	4,66	4,62

Tablo 1. Uygulama 20'deki sonuçların karşılaştırılması.

4.4.21 Uygulama 21

Şekil 46 'da ideal ve saklayan iletişime (bağlantılara) sahip düzlemsel bir mekanizma P, Q kuvvetleri ve M momenti ile denge durumundadır. P ve Q kuvvetlerinin ve OA çark kolunun bilinen değerleri neticesinde M momentinin değeri aşağıdaki gibi belirlenmiştir (P=Q=2 kN, OA=a=1 m) (Butenin vd., 1985).



Şekil 46. İdeal ve saklayan bağlantılara sahip mekanizma (Butenin vd., 1985).

M momentinin değerinin belirlenebilmesi için düzeneğe bir virtüel hareket verilecektir. Bu harekette OA kolu, çark kolu gibi davranacak ve saat yönünün aksine bir dönüş hareketi yapıp $\delta\varphi$ dönüşünü gerçekleştirecektir. A,B ve D noktaları 1 numaralı ani dönme merkezine dik doğrultuda bir virtüel hareket, C noktası ise 2 numaralı ani dönme merkezine göre dik doğrultuda bir virtüel hareket gerçekleştirecektir (Şekil 48).

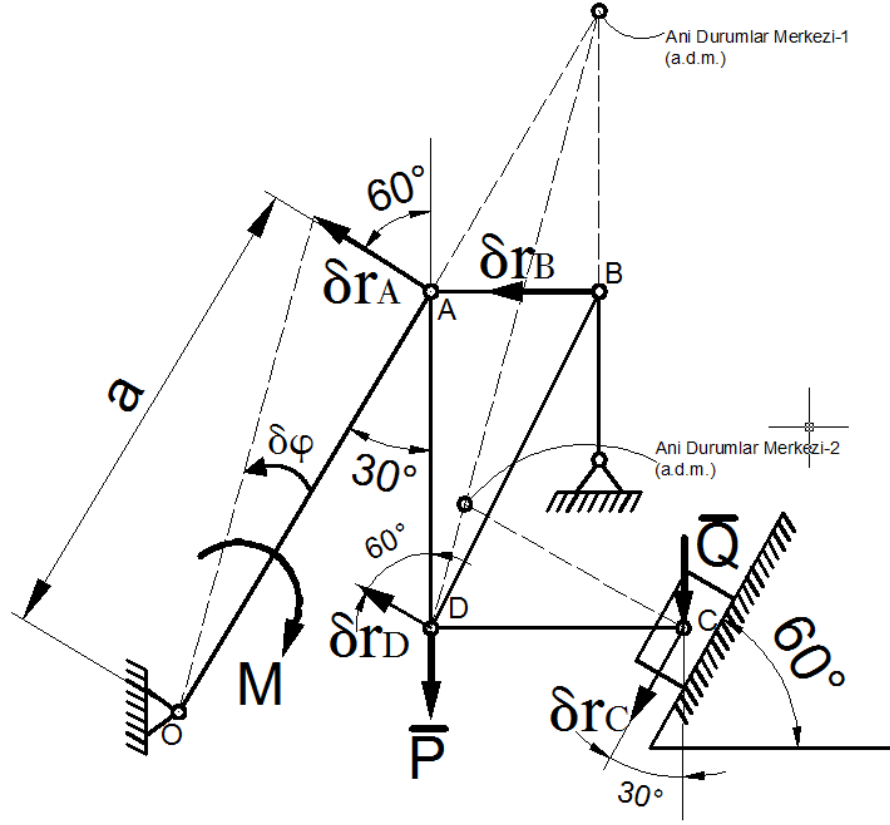
Şekil 46'daki virtüel hareketlerden yola çıkarak düzeneğin virtüel işler denklemini aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\sum \delta A_k = -M \cdot \delta\varphi - P \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta r_D + Q \cdot \sin 60^\circ \cdot \delta r_C = 0 \quad (300)$$

Şekil 47'deki virtüel harekete göre (300) denklemindeki tüm virtüel yer değiştirmeleri $\delta\varphi$ cinsinden yazabilmek için aşağıdaki dönüşümleri kullanılabilir.

$$\delta r_A = a \cdot \delta\varphi \quad (301)$$

$$\delta r_A \cdot \cos 60^\circ = \delta r_D \cdot \cos 60^\circ \quad (302)$$



Şekil 47. Şekil 46'daki düzeneğe ait virtüel hareket.

$$a \cdot \delta\varphi = \delta r_D \quad (303)$$

$$\delta r_C \cdot \sin 30^\circ = \delta r_D \cdot \sin 60^\circ \quad (304)$$

$$\delta r_C = a \cdot \delta\varphi \cdot 1,732 \quad (305)$$

Yukarıdaki dönüşümlere göre (300) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilmektedir.

$$-M \cdot \delta\varphi - P \cdot \cos 60^\circ \cdot a \cdot \delta\varphi + Q \cdot \sin 60^\circ \cdot a \cdot \delta\varphi \cdot 1,732 = 0 \quad (306)$$

(306) denklemi $\delta\varphi$ parantezine alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\delta\varphi \cdot (-M - P \cdot \cos 60^\circ \cdot a + Q \cdot \sin 60^\circ \cdot a \cdot 1,732) = 0 \quad (307)$$

$\delta\varphi \neq 0$ olduğuna göre parantez içindeki ifadeler sıfıra eşitlenip düzenlenirse M momenti aşağıdaki elde edilmektedir.

$$-P \cdot \cos 60^\circ \cdot a + Q \cdot \sin 60^\circ \cdot a \cdot 1,732 = M \quad (308)$$

(308) denkleminde, verilen sayısal değerler yerlerine yazıldığında M momenti aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$M = 2 \text{ kN.m} \quad (309)$$

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada mekanik sistemler statik ve dinamik olarak incelenmiştir. Bir başka deyişle, mekanik sistemlerin durağan ve hareketli durumları göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Statik sistemlerin incelenmesinde, sistemin maruz kaldığı kuvvet sayısınınca yazılan denklemler ile değil de virtüel işler prensibiyle sonuca ulaşılmıştır. Dinamik sistemlerin incelenmesinde ise kinetik ve kinematik denklemleri yerine Lagrange denklemleri ile sonuca ulaşılmıştır.

Statik sistemlerde virtüel işler prensibini tercih ederek, sistemin çözülmesinde kuvvet sayısı kadar denklemin yazılmadığı durumlarda, bilinmeyen kuvvetler belirlenmiştir. Bu da çok yüklemeli statik sistemlerin çözülmesinde, uzun ve zaman alıcı denklemlerle kaybedilen zamanı en aza indirmiştir.

Dinamik sistemlerde Lagrange denklemlerini tercih ederek, kuvvetler etkisinde kalarak hareket eden sistemlerin çözülmesinde kinetik ve kinematik formüllerine başvurmadan sistemin hızı, ivmesi ve bu harekete sebep olan kuvvetler belirlenmiştir. Lagrange Denklemleri ile dinamik sistemlerin hareketi statik bir sistem gibi ele alınmış, bir başka deyişle hareket halindeki sistemler dinamik denge durumundaymış gibi incelenmiştir. Bu sayede hareket halindeki sistemlerin hız ve ivmesini ve bu hız ve ivmeye neden olan kuvvetlerin belirlenmesinde denklem kargaşası ortadan kaldırılmış ve doğrudan çözüm elde edilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlara göre, farklı kuvvet tiplerine maruz kalan statik sistemlerde Vektörel Mekanik yöntemleri yerine Lagrange Mekaniği kapsamındaki virtüel işler prensibinin uygulanması önerilmektedir. Aynı şekilde farklı kuvvetler etkisinde kalan hareket halindeki sistemleri çözümlerken kinetik ve kinematik denklemleri yerine Lagrange Denklemlerinin kullanılması önerilmektedir. Bu sayede bilinmeyen sayısının artmasıyla yazılan denklemler neticesinde ortaya çıkan kargaşa en aza indirilmiş olacak, daha sağlıklı ve net sonuçlar elde edilecek ve kaybedilen zaman ortadan kaldırılacaktır.

KAYNAKLAR

- Bakioğlu, M. (2006). *Mühendislik Mekaniği Statik*. Birsen Yayın Evi, İstanbul, 472 s.
- Bakioğlu, M. ve Kadioğlu, N. (1999). *Statik Problemleri Kısa Teori ve Problemler*. Beta Yayınları, İstanbul, 470 s.
- Butenin, N. B., Lunts, Y. L. ve Merkin, D. R. (1985). *Kurs Teoretiçesкой Mechaniki*. Moskova.
- Ercan, Y. (2014). İleri Dinamik, İzmir Yüksek Teknoloji Üniversitesi Kütüphanesi Web Sitesi, <http://library.iyte.edu.tr/dosya/kitap/dinamikyucelercan.pdf> (15.07.2017).
- Eyvazov, E. B. ve Kuliyeв, S. A. (2003). *Nezeri Mexanika (Kısa Kurs)*. Bakü, 396 s.
- Eyvazov, E. B. ve Musayev, C. (2008). *Nezeri Mexanika (Muharizereler) Statik Kinematik I Hisse*. Bakü, 172 s.
- Eyvazov, E. B. ve Kuliyeв, S. A. (2014). *Teorik Mekanik-Statik (Cilt 1)*. Nobel Yayıncılık: Ankara, 180 s.
- Eyvazov, E. B. ve Kuliyeв, S. A. (2015). *Kinetamatik (2. Cilt) Teorik Mekanik*. Nobel Yayıncılık: Ankara, 156 s.
- Eyvazov, E. B. (2016). *Dinamik*. Nobel Yayıncılık: Ankara, 306 s.
- Gürgöze, M. (2016). *Analitik Mekaniğe Giriş*. İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul, 734 s.
- Ginsberg, J. H. (1988). *Advanced Engineering Dynamics*. Harper-Row: New York.
- Hibbeler, R. C. (2001). *Engineering Mechanics.: Dynamics*. Prentice Hall: New Jersey.
- Pala, Y. (2007). *Mühendislik Mekaniği Dinamik Matlab Destekli*. Nobel Yayıncılık, Ankara, 538 s.
- Tarq, S. M. (1975). *Kratkiy Kurs Teoretiçesкой Mechaniki.:* Moskova.
- Timoshenko, S. ve Young, D. H., Çeviren: İlhan Kayan (1979). *Mühendislik Mekaniği*. İTÜ Yayınları: İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Serkan ALTIN
Doğum Yeri ve Tarihi : Mustafakemalpaşa, 21.08.1983

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği, KTÜ
Yüksek Lisans Öğrenimi :
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
Bilimsel Faaliyet/Yayımlar : Alkan, S. ve Altın, S. (2015). Kurucaşile’de Ahşap Tekne Üretimi Faaliyetlerinin Gelişimi, *1 Bartın Sektörel Kalkınma Sempozyumu Bildiriler Kitabı*, ed. S. Kınır vd., Bartın Üniversitesi Yayınları, Bartın, s 19-28.
Aldığı Ödüller :

İş Deneyimi

Stajlar : Tuzla Tersaneleri
Projeler ve Kurs Belgeleri :
Çalıştığı Kurumlar : Özel Sektör Tersaneleri, Çay Fabrikası, Bartın Üniversitesi

İletişim

E-Posta Adresi : seralt16@yahoo.com

Tarih : 29/12/2017 (Tez sınav tarihi)